← PC版は別頁

== 三角関数(2) ==

○　はじめに

多項式の展開とは異なり，三角関数において（　）をはずす変形は簡単ではない．例えば，次のような変形はできない．

$$\sin(\alpha+\beta) \rightarrow \times\times \rightarrow \sin\alpha+\sin\beta$$
$$\cos(2\alpha) \rightarrow \times\times \rightarrow 2\cos\alpha$$

このページでは，はじめに，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ などの　（　　）をはずす公式「三角関数の加法定理」を解説し，その応用として「２倍角公式」「３倍角公式」「積和の公式」「和積の公式」を解説する．

○　三角関数の加法定理

［要点］

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots(1)$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots(2)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cdots(3)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots(4)$$

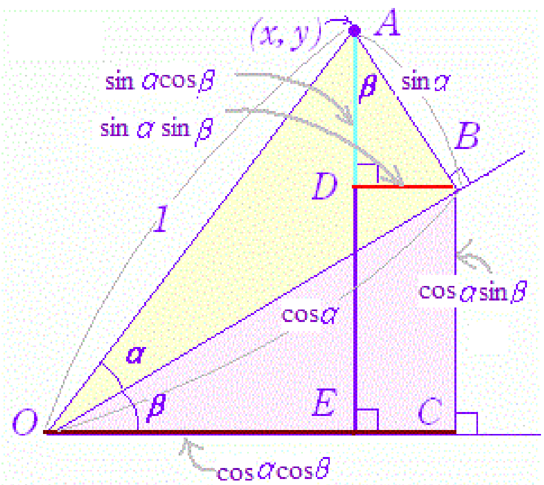
$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdots(5)$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\cdots(6)$$

(1)(2)の証明･･･（以下の証明は第1象限の場合についてのものであるが，この公式は，α，β が任意の角の場合でも成立する．）

図において，$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，$AO=1$ とするとき，点 A の x 座標が $\cos(\alpha+\beta)$，y 座標が $\sin(\alpha+\beta)$となる．

$x=OE=OC-BD=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ →(1)

$y=AE=AD+DE=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ →(2)



公式(1)(2)は必ず言えるようにし，残りは短時間に導けるようにする．（何度も使ううちに(3)以下を覚えてしまっても構わない．）

(3)(4)の証明

(3)←

$\sin(\alpha-\beta)$

$=\sin\{\alpha+(-\beta)\}$ 引き算は符号が逆の数の足し算と同じ

$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$

$\cos\theta$ は偶関数： $\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\sin\theta$ は奇関数： $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ …(3)証明終わり■

(4)←

$\cos(\alpha-\beta)$

引き算は符号が逆の数の足し算と同じ

$=\cos\{\alpha+(-\beta)\}$

$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$

$\cos\theta$ は偶関数： $\cos(-\theta)=\cos\theta$

$\sin\theta$ は奇関数： $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ …(4)証明終わり■

(5)(6)の証明

(5)←

$\tan(\alpha+\beta)$

$=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$ 三角関数の相互関係： $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(1)(2)の結果を使う

$=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

分母分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割る

$=\dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ …(5)証明終わり■

(6)←

$\tan(\alpha-\beta)$

引き算は符号が逆の数の足し算と同じ

$=\tan\{\alpha+(-\beta)\}$

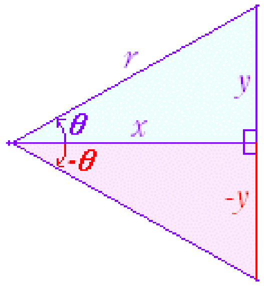
(5)の結果を使う

$=\dfrac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$

$=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ $\tan\theta$ は奇関数： $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

…(6)証明終わり■

次の図において，下半分の桃色の三角形の辺の長さの比を，上半分の水色の三角形の比で表すと，偶関数・奇関数の性質が分かる．



$$\sin(-\theta)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$$

即答問題　　次の各式と等しいものを下から選べ.

はじめに上の式を選び，続いて下の式を選べ．（合っていれば消える．）

$\sin(\alpha+\beta)$

$\cos(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha-\beta)$

$\cos(45°+30°)$

$\cos(60°+45°)$

$\sin(60°+45°)$

$\sin\alpha\ \sin\beta+\cos\alpha\ \cos\beta$

$\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta$

$\cos\alpha\ \sin\beta+\sin\alpha\ \cos\beta$

$\cos\alpha\ \cos\beta+\sin\alpha\ \sin\beta$

$\sin\alpha\ \sin\beta-\cos\alpha\ \cos\beta$

$\sin\alpha\ \cos\beta-\cos\alpha\ \sin\beta$

$\cos\alpha\ \sin\beta-\sin\alpha\ \cos\beta$

$\cos\alpha\ \cos\beta-\sin\alpha\ \sin\beta$

$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}$

○　倍角公式

［要点］

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cdots(7)$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cdots(8)$$
$$=2\cos^2\alpha-1\cdots(9)$$
$$=1-2\sin^2\alpha\cdots(10)$$
$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdots(11)$$

（証明）

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\ \cos\beta+\cos\alpha\ \sin\beta\ \cdots(1)$

において， $\alpha=\beta$ とおくと，

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ →(7)

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ···(2)

において， $\alpha=\beta$ とおくと，

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ →(8)

---

(8)において $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ を代入すると，

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ →(9)

---

(8)において $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ を代入すると，

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ →(10)

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ ···(5)

において， $\alpha=\beta$ とおくと，

$\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ →(11)

○ 半角公式

[要点]

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}\cdots(12)$$
$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}\cdots(13)$$
$$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdots(14)$$

半角公式は，次の形で示されることもある．±は，象限に応じて一方の符号を選ぶことを表わす． α を 2α で表すのと， $\frac{\alpha}{2}$ を α で表わすのとでは，対応関係は同じだから，好きな方を使えばよい．

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdots(12')$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\cdots(13')$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdots(14')$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\cdots(12'')$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\cdots(13'')$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\cdots(14'')$$

(9)(10)を変形すれば→(12)(13)

(12)÷(13)により→(14)

○ 3倍角公式

２倍角公式と加法定理を組み合わせると，次の公式ができる．

[要点]

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\cdots(15)$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdots(16)$$
$$\tan 3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\cdots(17)$$

(15)←

$\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha \cos\alpha+\cos 2\alpha \sin\alpha$

$=2\sin\alpha \cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ …(15)証明終わり■

---

(16)←

$\cos(2\alpha+\alpha)=\cos 2\alpha \cos\alpha-\sin 2\alpha \sin\alpha$

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha \cos\alpha$

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$ …(16)証明終わり■

---

(17)←

$$\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan 2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan 2\alpha\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\tan\alpha}$$

$$=\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1-\tan^2\alpha)-2\tan\alpha\cdot\tan\alpha}$$

$$=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$ …(17)証明終わり■

即答問題　次の各式と等しいものを下から選べ.

はじめに上の式を選び，続いて下の式を選べ．（合っていれば消える．）

$\sin 2\alpha$　$\cos 2\alpha$　$\sin\alpha$　$\cos^2\alpha$

$\sin 22.5°$　$\cos 105°$

（※　±は，いずれかの符号を選ぶことを表わす．）

$2\sin\alpha\cos\alpha$

$\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$　$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$\frac{1+\cos\alpha}{2}$　$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$　$\frac{1-\cos\alpha}{2}$　$\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$

$\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$　$\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$　$\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$\frac{1-\cos 45°}{2}$　$\frac{1+\cos 45°}{2}$

$\sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}}$　$\sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}}$

$\frac{1+\cos 210°}{2}$ $\frac{1-\cos 210°}{2}$

$-\sqrt{\frac{1+\cos 210°}{2}}$ $-\sqrt{\frac{1-\cos 210°}{2}}$

○ 積和の公式（積を和に直す公式）

[要点]

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ ･･･(18)

$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$ ･･･(19)

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ ･･･(20)

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ ･･･(21)

○ 和積の公式（和を積に直す公式）

[要点]

$\sin A+\sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ ･･･(22)

$\sin A-\sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ ･･･(23)

$\cos A+\cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ ･･･(24)

$\cos A-\cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ ･･･(25)

（証明）

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ･･･(1)

+) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ･･･(3)

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ →(18)

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ･･･(1)

－) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ･･･(3)

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$ →(19)

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ･･･(2)

+) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ･･･(4)

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta$ →(20)

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ ･･･(2)

－) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ ･･･(4)

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$ →(21)

(18)~(21)において， $\alpha+\beta=A$ ， $\alpha-\beta=B$ とおくと，
$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$ ， $\beta=\dfrac{A-B}{2}$ →(22)~(25)

即答問題　　次の各式と等しいものを右から選べ．

　はじめに左の式を選び，続いて右の式を選べ．（合っていれば消える．）

$\sin\alpha\cos\beta$　$\cos\alpha\cos\beta$　$\sin\alpha\sin\beta$　$\cos\alpha\sin\beta$
$\cos A-\cos B$　$\sin A-\sin B$　$\cos A+\cos B$　$\sin A+\sin B$

$\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

$\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

$\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

$-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

$2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$　　$2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　　$2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　　$-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

$\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　　$\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$