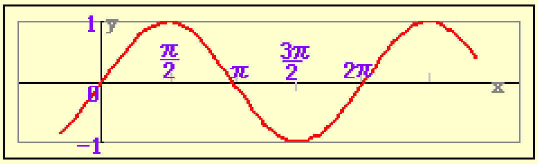
← PC版は別頁

== 三角関数(3) ==

○　三角関数のグラフと最大，最小

(1)　$y=\sin x$ のグラフは，表1により，点をなめらかに結べば得られる．

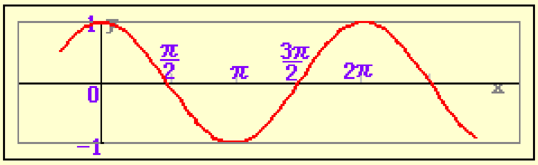


　特に，「原点を通ること」「$-1\leqq \sin\ x\leqq 1$ となること」が重要である．

表1

x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$
$\sin x$	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$

(2)　$y=\cos x$ のグラフも同様にして，表2により，点をなめらかに結べば得られる．



　特に，「$x=0$ のとき $y=1$ になること」「 $-1\leqq \cos\ x\leqq 1$ となること」が重要である．

表2

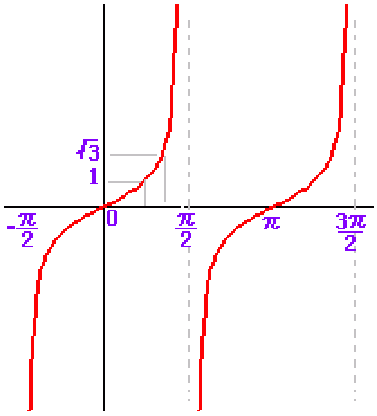
x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$
$\cos x$	$\cdots$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$

(3)　$y=\tan x$ のグラフも同様であるが，このグラフは他の２つと全く異なり，取り得る値の範囲が

$$-\infty<\tan x<\infty$$

となるところが特徴．

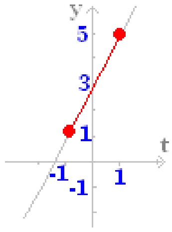
　特に，$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ の区間だけで，y は全実数値を取る．



例と答

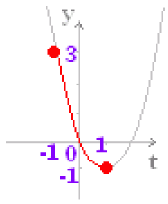
(1)　$y=2\sin x+3$　$(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$ の最大値，最小値を求めよ．

（答案）
$t=\sin x$ とおくと，
$y=2t+3$　$(-1 \leqq t \leqq 1)$
$t=-1$ $(x=-\frac{\pi}{2})$ のとき最小値 1 をとる．
$t=1$ $(x=\frac{\pi}{2})$ のとき最大値 5 をとる．



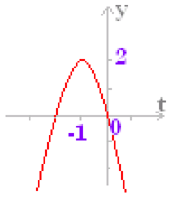
(2)　$y=\cos^2 x-2\cos x$　$(0 \leqq x \leqq \pi)$ の最大値，最小値を求めよ．

（答案）
$t=\cos x$ とおくと，
$y=t^2-2t$　$(-1 \leqq t \leqq 1)$
$y=(t-1)^2-1$　だから
$t=-1$ $(x=\pi)$ のとき最大値 3 をとる．
$t=1$ $(x=0)$ のとき最小値 -1 をとる．



(3)　$y=-2\tan^2 x-4\tan x$　$(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$ の最大値，最小値を求めよ．

（答案）
$t=\tan x$ とおくと，
$y=-2t^2-4t$　$(-\infty < t < \infty)$
$y=-2(t+1)^2+2$　だから



最小値　なし
$t=-1$ $(x=-\frac{\pi}{4})$ のとき最大値 2 をとる．

■即答問題■

次の関数の最大値，最小値を求めよ．ないときは，「 * 」と書け．（最大値，最小値を与えるxの値は省略してよい．）

(1)　$y=-3\sin x+5$　$\left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

最大値

最小値

Check Reset

(2)　$y=\cos^2 x+4\cos x+3$　$(0\leqq x\leqq\pi)$

最大値

最小値

Check Reset

(3)　$y=4\tan^2 x-4\tan x$　$\left(-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}\right)$

最大値

最小値

Check Reset

○　三角関数の微分

［　要点　］

$y=\sin x$　→　$y'=\cos x$　…(1)

$y=\cos x$　→　$y'=-\sin x$　…(2)

$y=\tan x$　→　$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$　…(3)

なお，上の結果に合成関数の微分法を組み合わせた，次の公式はよく登場する．

$y=\sin kx$　→　$y'=k\cos kx$

$y=\cos kx$　→　$y'=-k\sin kx$　など

(証明)

三角関数の微分（導関数）を求めるとき，右の極限値を利用する．

(1)←：

$y=\sin x \quad \to \quad y'=\lim_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

ここで，$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to\cos x$，$\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\to 1$

だから，$y'=\cos x$

(2)←：も同様にして示される．

(3)←：$y=\tan x$ のとき

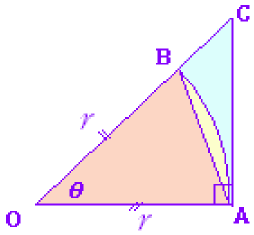
商の微分法により

$$y'=\frac{\cos x\ \cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

（重要な極限値）

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

この式は，通常，次のような図を用いて示される．



△OAB＜扇形OAB＜△OACだから

ア)　$\theta>0$ のとき

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta<\frac{1}{2}r^2\theta<\frac{1}{2}r^2\tan\theta$$

$$0<\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

$0<1<\dfrac{\theta}{\sin\theta}<\cos\theta\to 1$（$\theta\to 0$ のとき）　だから

$\dfrac{\sin\theta}{\theta}\to 1$（$\theta\to 0$ のとき）

イ)　$\theta<0$ のとき，$\theta=-t$ とおくと

$\dfrac{\sin\theta}{\theta}=\dfrac{\sin(-t)}{(-t)}=\dfrac{\sin t}{t}\to 1$（$\theta\to 0$ のとき）

ア）イ）より，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$

例と答

次の関数を微分せよ．

(1)　$y=\sin 2x$

（答案）　$y=\sin t$

$t=2x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\sin t\times 2=2\sin 2x\cdots(\text{答})$$

(2)　$y=\cos^2 x$

（答案）　$y=t^2$

$t=\cos x$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=2t(-\sin x)=-2\cos x\,\sin x$$ ···(答)

(3)　$y=\tan(3x+2)$

（答案）　$y=\tan t$

$t=3x+2$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\,\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\cos^2 t}\times 3=\frac{3}{\cos^2(3x+2)}$$ ···(答)

■即答問題■

次の関数を微分せよ.

(1)　$y=\sin(-3x+2)$

$y'=$ ☐ $\cos(-3x+2)$

Check　Reset

(2)　$y=\tan(2x-3)$

$y'=\dfrac{☐}{\cos^2(-3x+2)}$

Check　Reset

(3)　$y=\cos^3 4x$

$y'=$ ☐ $\sin 4x\cos^2 4x$

Check　Reset　Help