← PC版は別頁

== 逆三角関数 ==

○　$\sin x$ の逆関数

　三角関数のグラフ，例えば $y=\sin x$ のグラフは，図1のように $y=-1$ から$y=1$ までの値を何度もとる．
　x の値を定めれば y の値は定まるが，ある y の値をとる元の x はただ一つではない．（x :多 対 y : 1 の対応）
　そこで，三角関数の逆の対応，すなわち

$$y=\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x=?(y)$$

という関数を考えるときは，図１の赤で示したように，

$$y=\sin x \ (-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2})\ (-1\leqq y\leqq 1)$$

を考え，$y=\sin x$ の逆関数を

$$y=\arcsin x \text{ または } y=\sin^{-1}x$$

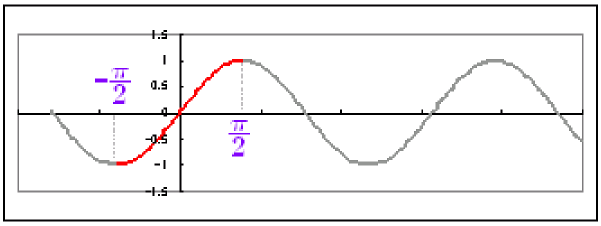
で表わす．

　逆三角関数 $y=\arcsin x$ の値は，$-\frac{\pi}{2}$ ～ $\frac{\pi}{2}$ の値を考え，この値を「主値」と呼ぶ．

　このとき，$y=\arcsin x \quad (-1\leqq x\leqq 1)\ (-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq\frac{\pi}{2})$ となる．

図 1

$y=\sin x$



例1

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin 1=\frac{\pi}{2}$

○　$\cos x$ の逆関数

　$y=\cos x$ の逆関数は

$$y=\arccos x \text{ または } y=\cos^{-1}x$$

で表わす．主値は，0 ～π とする．

　すなわち，

$$y=\cos x \quad (0\leqq x\leqq\pi)(-1\leqq y\leqq 1)$$

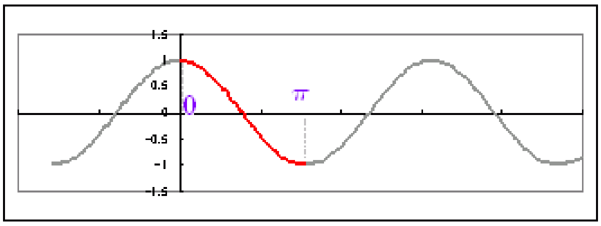
の定義域と値域を入れ替えて，

$$y=\arccos x \quad (-1\leqq x\leqq 1)\ (0\leqq y\leqq\pi)$$

とする．

図2

$y=\cos x$



例2

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \arccos 0=\frac{\pi}{2}$

○　$\tan x$ の逆関数

$y=\tan x$ の逆関数は

$y=\arctan x$ または $y=\tan^{-1}x$

で表わす．主値は $-\frac{\pi}{2}$ ～ $\frac{\pi}{2}$ とする．

すなわち，

$y=\tan x \quad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})(-\infty<y<\infty)$

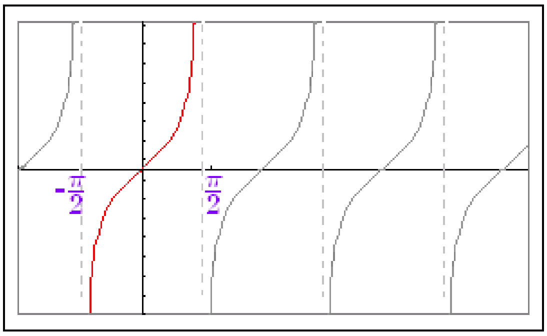
の定義域と値域を入れ替えて，

$y=\arctan x \quad (-\infty<x<\infty)\ (-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$

とする．

図3

$y=\tan x$



例3

$\tan\frac{\pi}{4}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan 1=\frac{\pi}{4}$

$\tan 0=0 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan 0=0$

■即答問題■

次の値を求めよ．

はじめに，上から問題を選び，続いて下から解答を選べ．

ただし，主値は次の範囲にある値とする．

$-\frac{\pi}{2}\leqq\arcsin y\leqq\frac{\pi}{2}$， $0\leqq\arccos y\leqq\pi$

$-\frac{\pi}{2}<\arctan y<\frac{\pi}{2}$

合っていれば消える．

解説が必要な時は，問題を選んでから

このボタンを押す→HELP

$\arcsin\frac{1}{2}$　　$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\arctan(-\sqrt{3})$

$\arctan(-1)$　　$\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$　　$\arcsin(-\frac{1}{2})$

$\arcsin 0$　　$\arcsin 1$

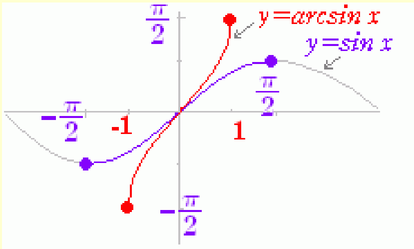
0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{3\pi}{4}$

○　逆三角関数の導関数

［要点］

$y=\arcsin x \quad \rightarrow \quad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ・・・(1)

図4



(証明)
逆関数の微分法を用いる．
(1)←：
$y=\arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x=\sin y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ここで，$\dfrac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$　だから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(図4のように，主値については，$y'\geqq 0$ となる．)

$y=\arccos x \quad \rightarrow \quad y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ・・・(2)

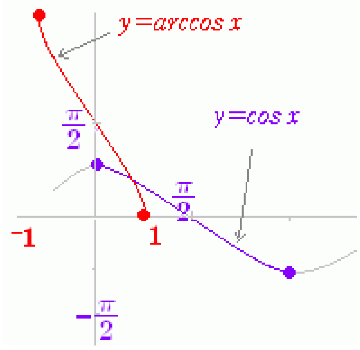
(2)←：
$y=\arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x=\cos y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ここで，$\dfrac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$　だから

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(図5のように，主値 については，$y'\leqq 0$ となる．
図5



$y=\arctan x \quad \rightarrow \quad y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ ···(3)

(3)←：

$y=\arctan x \quad \Leftrightarrow \quad x=\tan y$

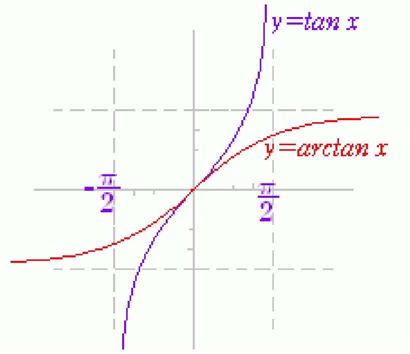
$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ここで，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y$ だから

$$\frac{dy}{dx}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

(図6のように，主値 については，$y'\geqq 0$ となる．

図6



■短答問題■

次の関数の導関数を求めよ．（選択肢の番号で答えよ．半角数字に限る）

解説が必要な時は，このボタンを押す→HELP

$y=\arcsin \dfrac{x}{3} \quad \rightarrow \quad y'=$

$y=\arccos \dfrac{x}{3} \quad \rightarrow \quad y'=$

$y=\dfrac{1}{3}\arctan \dfrac{x}{3} \quad \rightarrow \quad y'=$

Check Reset

1	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	2	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	3	$\dfrac{1}{1+x^2}$
4	$\dfrac{1}{3\sqrt{1-x^2}}$	5	$-\dfrac{1}{3\sqrt{1-x^2}}$	6	$\dfrac{3}{1+x^2}$
7	$\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$	8	$-\dfrac{1}{\sqrt{9-x^2}}$	9	$\dfrac{1}{9+x^2}$