← PC版は別頁

■ 2次関数

スマホ画面の横幅が，教材の横幅と少し合わないときは，リンクの掛かっていない文字［例えばこの文字］をトントンとたたくと合うようです（ダブルクリック，ダブルタップ）

○軸，頂点，凹凸

(1) 2次関数 $y = ax^2$ (ただし，$a \neq 0$) のグラフは，
i) $a > 0$ のとき，右図1のように下に凸（谷形）のグラフになる．
ii) $a < 0$ のとき，右図2のように上に凸（山形）のグラフになる．

図1

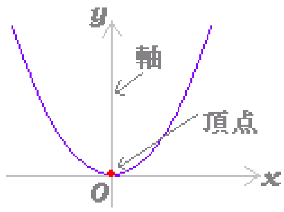
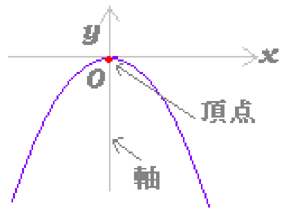


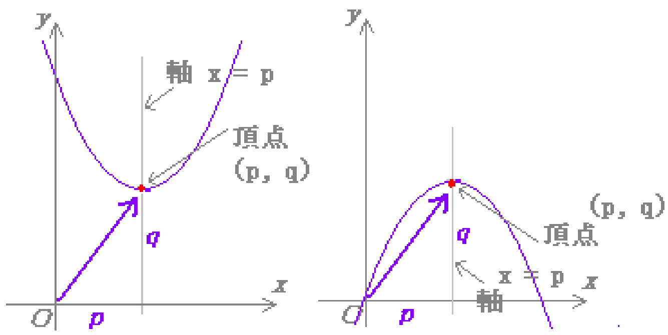
図2



(2) 2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$(ただし，$a \neq 0$) のグラフは，右図3のように，$y = ax^2$ のグラフをx 軸の正の向きにp，y 軸の正の向きにq だけ平行移動したものになる．

このとき，頂点の座標は$(p,\ q)$
軸の方程式は$x = p$となる．

図3

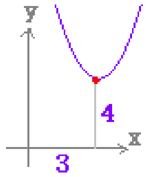


※（補足説明）
・$y = a(x-p)^2 + q$のグラフの形（上に凸か，下に凸かなど）はaの値だけで決まる．
・$a > 0$ のとき，下に凸（谷型）
・$a < 0$ のとき，上に凸（山型）

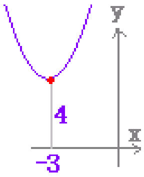
・p，qの値は平行移動だけに関係する．

・p，qの符号に注意すること．次の例をみよ．

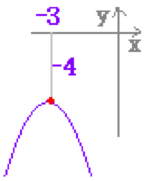
例$y = 2(x-3)^2 + 4$のグラフは$y = 2x^2$のグラフを x 軸の正の向きに3，yの正の向きに4だけ平行移動したもの．頂点の座標は(3，4)，軸の方程式は$x = 3$



例$y = 2(x + 3)^2 + 4$のグラフは$y = 2x^2$のグラフをx 軸の正の向きに-3，y 軸の正の向きに4だけ平行移動したもの．頂点の座標は(-3，4)，軸の方程式はx = -3



例$y = -2(x + 3)^2 - 4$のグラフは$y = -2x^2$のグラフをx 軸の正の向きに-3，y 軸の正の向きに-4だけ平行移動したもの．頂点の座標は(-3，-4)，軸の方程式はx = -3



・２次関数のグラフの頂点は，関数の形を

$$y = a(x-p)^2 + q$$

の形にしたときに分かる．この形を標準形（平方完成形）という．

$$y = ax^2 + bx + c$$

の形（展開形，一般形）のままでは，頂点の座標は分からない．

■即答問題■

◇正しい方を選べ◇

(1)$y = 2x^2$のグラフは･･･→[上に凸 ， 下に凸]

(2)$y = -2x^2$のグラフは･･･→[上に凸 ， 下に凸]

◇空欄を埋めよ◇ （※以下空欄書き込み問題では，必ず「半角数字」「１バイト文字の数字」を書き込むこと）

(3)$y = 5(x-2)^2 + 6$のグラフは$y =$ ____ x^2のグラフをx軸の正の向きに ____ ，y 軸の正の向きに ____ だけ平行移動したもので，頂点の座標は(____ ， ____)，軸の方程式は$x =$ ____

Check Reset

○平方完成

２次式 ax^2+bx+cを平方完成するには,

i) まずx^2 の係数でくくる･･･定数項は後回しにして（あとで定数が出てくるので，最後に調整する方が有利）

ii) 次にxの係数の半分を持ってくる

例

$3x^2+6x+5=3(x^2+2x)+5$ ･･･**i)**

$=3(x^2+2x+1-1)+5$･･･**ii)**

$=3\{(x+1)^2-1\}+5$

$=3(x+1)^2-3+5=3(x+1)^2+2$

※一般に，次のように変形することができるが，この「結果」を覚える必要はなく，右図に示した**「変形方法」**を身につけるとよい．

$$ax^2+bx+c=\cdots=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4bc}{4a}$$

［要点］

$$x^2+\square x=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2$$

半分　　２乗

※初歩的な注意：次のようにx の係数が負のときも，「２乗の部分は常に引き算」となる．

$x^2-6x=\mathbf{x^2-6x+9}$ **- 9** $=(x-3)^2$ **- 9**

例題１ 次の式を平方完成せよ．

(1)$3x^2-12x+13$

(与式)$=3(x^2-4x)+13=3\{(x-2)^2-4\}+13$
$=3(x-2)^2-12+13=3(x-2)^2+1$･･･(答)

(2)$2x^2+6x-5$

(与式) $=2(x^2+3x)-5=2\{(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}\}-5$

$=2(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{2}-5=2(x+\frac{3}{2})^2-\frac{19}{2}$･･･(答)

例題２ 次の２次関数の頂点の座標を求めよ．

(1)$y=x^2-6x+10$

$y=(x-3)^2-9+10=(x-3)^2+1$
頂点の座標は $(3,\ 1)$ ･･･(答)

(2)$y=-2x^2+8x+3$

$y=-2(x^2-4x)+3=-2\{(x-2)^2-4\}+3$
$=-2(x-2)^2+8+3=-2(x-2)^2+11$･･･(答)

○最大値・最小値

(1)x の値の範囲が全実数（$-\infty < x < \infty$）のとき

i) **$a>0$のとき**，２次関数 $y = a(x-p)^2 + q$のグラフは，右図4のように下に凸（谷形）のグラフで，頂点の座標は(p, q)だから，
$x=p$ のとき最小値 q をとり，最大値はない．

ii) **$a<0$のとき**，２次関数 $y = a(x-p)^2 + q$のグラフは，右図5のように上に凸（山形）のグラフで，頂点の座標は(p, q)だから，
$x=p$ のとき最大値 q をとり，最小値はない．

---

(2)xの定義域（値の範囲）に制限があるとき

右図6のように，２次関数 $y = a(x-p)^2 + q$のグラフを描き，「左端」「右端」「頂点」のｙ座標を比較して，最大値・最小値を判断する．（定義域が閉区間（両端の値が含まれる）のとき，２次関数の最大値，最小値は，いずれも存在する．）

※初歩的な注意として，頂点が定義域の外にあるとき，頂点の値を含めないように気をつけること．

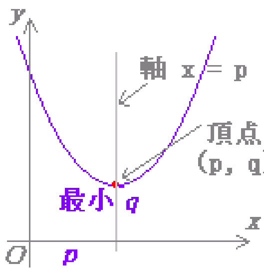
図4


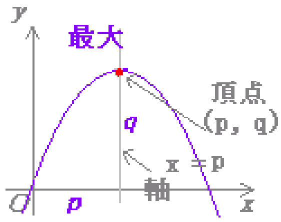
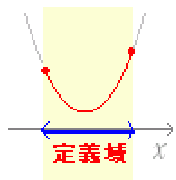
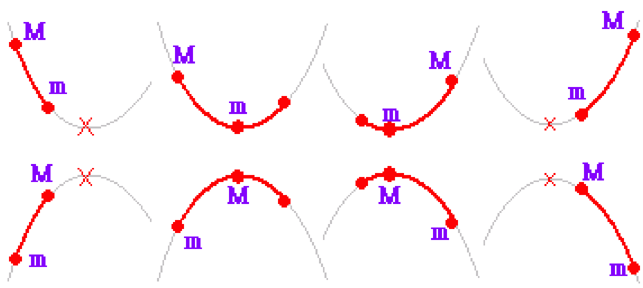
図5


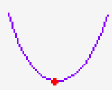
図6




例題3次の２次関数の最大値，最小値を求めよ．

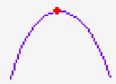
(1)$y = 3(x-1)^2 + 5$

グラフは下に凸で，頂点の座標は$(1, 5)$ だから
最大値なし
最小値5（$x=1$のとき）



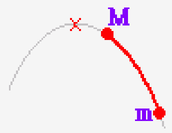
(2)$y =-4(x-2)^2-6$

グラフは上に凸で，頂点の座標は$(2, -6)$ だから
最大値-6（$x=2$のとき）
最小値なし



(3)$y=-x^2+2x+3$ $(2 \leqq x \leqq 3)$

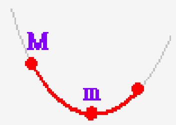
$y=-(x^2-2x)+3=-\{(x-1)^2-1\}+3$
$=-(x-1)^2+4$



最大値3 ($x=2$ のとき)
最小値0 （$x=3$ のとき）

(4)$y=x^2-5x+4$ $(0 \leqq x \leqq 3)$

$y=(x^2-5x)+4=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}$
最大値4 ($x=0$ のとき)
最小値$-\frac{9}{4}$ （$x=\frac{5}{2}$ のとき）



■即答問題■

次の２次関数の最大値，最小値を求めよ．　（※空欄書き込み問題は，「半角数字」「１バイト文字」で書き込むこと）

(1)$y=2(x+1)^2+4$

最大値なし
最小値 　($x=$ 　のとき)
Check Reset

(2)$y=-(x-3)^2+4$

最大値 　($x=$ 　のとき)
最大値なし
Check Reset

(3)$y=2x^2-4x+1$ $(-3 \leqq x \leqq 0)$

最大値 　($x=$ 　のとき)
最小値 　($x=$ 　のとき)
Check Reset

(4)$y=-3x^2+12x-12$ $(1 \leqq x \leqq 4)$

最大値 ____ ($x=$ ____ のとき)
最小値 ____ ($x=$ ____ のとき)

Check Reset