← PC版は別頁

== 対数関数(1) ==

○　対数の定義

[記号]

$a^x=b$ のとき x を a , b で表わすために新しい記号を導入し，$x=\log_a b$ で表わす．
（対数の英語： $\log arithm$ を記号にしたもの）

[用語]

$\log_a b$ について，a を底，b を真数，$\log_a b$ を対数という．

対数の記号が表わしている内容は，指数の形に直してみれば分かる．

例1

(1) $4=\log_2 16 \Leftrightarrow 2^4=16$

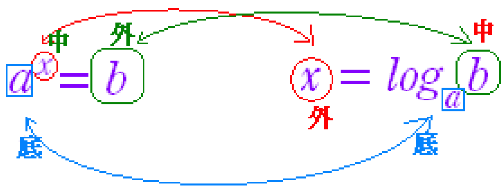
(2) $2=\log_{10} 100 \Leftrightarrow 10^2=100$

(3) $\log_2 64=6 \Leftrightarrow 2^6=64$

○　指数と対数の書き換え

「指数の形」で書かれた式を「対数の形」に直すときも，逆に「対数の形」で書かれた式を「指数の形」に直すときも，次のように対応させればよい．（指数，対数とも左辺，右辺のどちらにあってもよい．）

中	→	外
外	→	中
底	→	底



例2

次の式を対数の形で表せ．

(1) $3^4=81 \Leftrightarrow 4=\log_3 81$

(2) $5^{-2}=\dfrac{1}{25} \Leftrightarrow -2=\log_5 \dfrac{1}{25}$

（なお，この問題で，$2=\log_5 25$ は，式自体は正しくても，指数を対数に書き換えたものとはならないので不可）

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{32} \Leftrightarrow 5=\log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{32}$

（なお，この問題で，$5=\log_2 32$ は，式自体は正しくても，指数を対数に書き換えたものとはならないので不可）

■即答問題■

I)次の式を対数の形で表せ．

(1) $5^3=125$ → ＿ = log ＿ ＿

(2) $100^{-1}=0.01 \to \log_{\square}\square=\square$

(3) $3=2^x \to \square=\log_{\square}\square$

(4) $8=0.5^{-3} \to \log_{\square}\square=\square$

Check Reset

II)次の式を指数の形で表せ.

(1) $\log_4 16=2 \to \square^{\square}=\square$

(2) $\log_p q=r \to \square=\square^{\square}$(小文字で答えること)

(3) $2=\log_6 36 \to \square^{\square}=\square$

(4) $-0.75=\log_{16} 0.125 \to \square=\square^{\square}$

Check Reset

○対数の計算

底$a>0$, $a\neq 1$, 真数>0のとき, 対数は次の性質を満たす.
計算に当たっては, **(3)〜(6)で変形し, (1)(2)に持ち込むとよい.**

(1) $\log_a 1=0$ **(2)** $\log_a a=1$
(3) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$ **(4)** $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ **(5)** $\log_a M^n=n\log_a M$

※初歩的な注意
(3)の公式は, 積の対数が, 対数の和に等しいことを表わしており, 次のような公式はない:

✕ $\log_a MN=\log_a(M+N)$
✕ $\log_a(M+N)=\log_a M\log_a N$

(4)についても同様

✕ $\frac{\log_a M}{\log_a N}=\log_a(M-N)$

✕ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a(M-N)$

[解説]

(1)←：$a^0=1$ だから $\log_a 1=0$ が成り立つ.
（底が何であっても，真数が1なら対数は0となる．）
(2)←：$a^1=a$ だから $\log_a a=1$ が成り立つ.
（底が何であっても，真数と底が同じなら対数は1となる．）
(3)←：
$a^p a^q=a^{p+q}$ だから $\log_a (a^p a^q)=p+q$
ここで，
$p=\log_a M \Leftrightarrow a^p=M$
$q=\log_a N \Leftrightarrow a^q=N$
とおくと，

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

(4)←：
$a^p/a^q=a^{p-q}$ だから $\log_a (a^p/a^q)=p-q$
ここで，
$p=\log_a M \Leftrightarrow a^p=M$
$q=\log_a N \Leftrightarrow a^q=N$
とおくと，

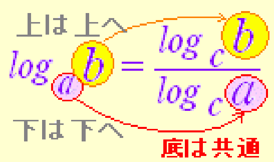
$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

※歴史的には，天文学の計算（天文学的数字！という）において掛け算，割り算を足し算，引き算に直せるところが対数の魅力であったが，初歩的な計算練習では(3)(4)の変形で，和差を積商に直すと簡単になることが多い.
なお，対数方程式，対数不等式ではほとんどの場合，和差を積商に直すとうまくいく.
(5)←：
$(a^p)^n=a^{pn}$ だから $\log_a (a^p)^n=pn$
ここで，
$p=\log_a M \Leftrightarrow a^p=M$
とおくと，

$$\log_a M^n=n\log_a M$$

(底の変換公式) $a, b, c>0$，$a, c\neq 1$ とする

$$\boxed{\textbf{(6)}\ \log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}}$$



(6)←：
$\log_a b=x$ とおくと $a^x=b$
c を底とする両辺の対数をとると
$\log_c a^x=\log_c b$
$x\log_c a=\log_c b$
$\log_a b\ \log_c a=\log_c b$
ゆえに

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

例3
(1) $\log_{10} 100=\log_{10} 10^2 \overset{(5)}{=} 2\log_{10} 10 \overset{(2)}{=} 2$

(2) $\log_2 6+\log_2 \frac{8}{3} \overset{(3)}{=} \log_2 (6\times\frac{8}{3})=\log_2 16$
$=\log_2 2^4 \overset{(5)}{=} 4\log_2 2 \overset{(2)}{=} 4$

(3) $\log_3 36-\log_3 4 \overset{(4)}{=} \log_3 \frac{36}{4} = \log_3 9 = \log_3 3^2$
$\overset{(5)}{=} 2\log_3 3 \overset{(2)}{=} 2$

(底の変換公式)
(4) $\log_2 3\ \log_3 4 \overset{(6)}{=} \log_2 3\ \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_2 4 = \log_2 2^2$
$\overset{(5)}{=} 2\ \log_2 2 = 2$

(5) $\log_{27} 81 \overset{(6)}{=} \frac{\log_3 81}{\log_3 27} = \frac{\log_3 3^4}{\log_3 3^3} \overset{(5)}{=} \frac{4\ \log_3 3}{3\ \log_3 3} \overset{(2)}{=} \frac{4}{3}$

(6) $\log_{0.5} 4 \overset{(6)}{=} \frac{\log_2 4}{\log_2 0.5} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^{-1}} \overset{(5)}{=} \frac{2\ \log_2 2}{-\log_2 2} \overset{(2)}{=} -2$

■数分問題■

I)次の式を簡単にせよ.

(1) $\log_5 125 \overset{(5)}{=} 3\ \log_5 5 \overset{(2)}{=} \square$

(2) $\log_3 54 + \log_3 \frac{3}{2}$

$= \square$

(3) $\log_3 7-\log_3 63$

$= \square$

Check Reset

(底の変換公式)
(4) $\log_3 5\ \log_{25} 9$

$= \square$

(5) $\log_{25} 125 = \frac{\square}{\square}$

(6) $\log_{0.1} 1000$

$= \square$

Check Reset