← PC版は別頁

== 定積分の部分積分法，置換積分法 ==

○　定積分の部分積分法

定積分の部分積分法は，次の公式によって行う．

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

ただし，$f'(x),\ g'(x)$ は各々 $f(x),\ g(x)$ の導関数

例

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx=\Big[f(x)g(x)\Big]_a^b-\int_a^b f'(x)g(x)dx$$

------

x を微分すると 1 になる（次数が下がる）ことに着目する．

微分する側	$f(x)=x$	→	$f'(x)=1$
積分する側	$g(x)=-\cos x$	←	$g'(x)=\sin x$

（原式） $=\Big[-x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$

$=(0-0)+\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

短答問題

次の定積分を求めよ．（入力は半角数字…計算用紙：必要）

(1) $\int_1^e x\log x dx=\cdots=\dfrac{e^2+\square}{\square}$

Check Reset Help

(2) $\int_1^e \log x dx=\cdots=\square$

Check Reset Help

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^x dx = \cdots = \square$

Check Reset Help

(4) $\displaystyle\int_1^3 (x-1)^2(x-3)dx = \cdots = -\frac{\square}{\square}$

Check Reset Help

○ **定積分の置換積分法**

定積分の置換積分法では,

(1) 被積分関数

$$\int_a^b \boxed{f(x)}dx$$

(2) 積分変数

$$\int_a^b f(x)\boxed{dx}$$

(3)　積分区間

$$\int_{\boxed{a}}^{\boxed{b}} f(x)dx$$

の３箇所を書き換える．

※定積分は，積分区間の下端・上端の値を代入すると定数になるので，不定積分の置換積分法とは異なり，変数を元に戻す必要はない．

例

$$\int_1^2 (2x-1)^3 dx$$

$2x-1=t$ とおく

$\frac{dt}{dx}=2 \rightarrow dx=\frac{dt}{2}$

x	$1 \rightarrow 2$
t	$1 \rightarrow 3$

（原式） $\int_1^3 t^3 \cdot \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^3 = \frac{1}{2}\left(\frac{81}{4}-\frac{1}{4}\right) = 10$

例と答

(1)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$$

$1-x=t$ とおく

$\sqrt{1-x}=t^{\frac{1}{2}}$

$\frac{dt}{dx}=-1 \rightarrow dx=-dt$

x	$0 \rightarrow 1$
t	$1 \rightarrow 0$

（原式） $= \int_1^0 t^{\frac{1}{2}}(-dt) = \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} dt$

$= \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

(2)

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$$

$x=3\sin t$ とおく

x	$0 \rightarrow 3$
t	$0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\sin^2 t} = \sqrt{9(1-\sin^2 t)}$

$=3\cos t$　（$0 \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき $\cos t \geqq 0$ ）

$\frac{dx}{dt} = 3\cos t \rightarrow dx = 3\cos t\, dt$

（原式） $= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\cos t \cdot 3\cos t\, dt$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t dt$$

$$=9\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{9}{2}\left[t+\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{9\pi}{4}$$

(3)

$$\int_0^1 2x(x^2+1)^3 dx$$

$x^2+1=t$ とおく

$$\frac{dt}{dx}=2x \rightarrow dx=\frac{dt}{2x}$$

x	$0\rightarrow 1$
t	$1\rightarrow 2$

（原式） $$\int_1^2 2xt^3\frac{dt}{2x}=\int_1^2 t^3 dt$$

$$=\left[\frac{t^4}{4}\right]_1^2=\frac{15}{4}$$

(4)

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$$

$x=\tan t$ とおく

x	$0\rightarrow 1$
t	$0\rightarrow \frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1+\tan^2 t}=\cos^2 t$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}\rightarrow dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$$

（原式） $$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt$$

$$=\left[t\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$$

短答問題

次の定積分を求めよ．(入力は半角数字…計算用紙：必要)

(1) $\int_0^3\sqrt{3-x}dx$ =…= □√□

Check Reset Help

(2) $\displaystyle\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx = \cdots = \frac{\square}{\square}\pi$

Check Reset Help

(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \cdots = \frac{1}{\square}$

Check Reset Help

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \ldots = \frac{\pi}{\square}$

Check Reset Help