← PC版は別頁

== 部分積分法 ==

○ はじめに

この単元では，積の微分法の逆計算を考えることにより，不定積分の計算を式の形を変えて行うことを学ぶ．

以下，見やすくするために $f(x)$，$g(x)$ を f，g で表わすと，積の微分法の公式は，次のとおりであった．

$$(fg)'=f'g+fg'$$

この式の両辺を x で積分すると，

$$fg=\int f'g\,dx+\int fg'\,dx$$

移項すると，

$$\int fg'\,dx=fg-\int f'g\,dx$$

これを「部分積分法」の公式という．

例1

$$\int x\sin x\,dx$$

------

x を微分すると 1 になる（次数が下がる）ことに着目する．

微分する側	$f(x)=x$	→	$f'(x)=1$
積分する側	$g(x)=-\cos x$	←	$g'(x)=\sin x$

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$

この右辺の形ならば，積分計算が簡単にできる．

（右辺）$=-x\cos x+\sin x+C$

※　一般に，整式を微分すると次数が下がる（計算しやすくなる）ので，(整式)×(他の関数) の形の積分は，整式の方を微分する側：$f(x)$ に選ぶと，計算が簡単になることが多い．

例2

$$\int e^x\sin x\,dx$$

------

e^x や $\sin x$ は，何回微分しても消えないが，$I=\dots-I$ のように同じ式が再度登場すれば，方程式と考えて解ける．

同じ式が登場するまで，２回以上部分積分法を使う．このとき，１つの関数（例えば $\sin x$）は，微分する側ばかりに選ぶことが重要．途中で入れ替わると（微分してから積分するなど）何も残らないので注意．

微分する側	$f(x)=e^x$	→	$f'(x)=e^x$
積分する側	$g(x)=-\cos x$	←	$g'(x)=\sin x$

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx$$

第2項について，もう一度，部分積分法を実行する．

微分する側	$p(x)=e^x$	→	$p'(x)=e^x$
積分する側	$q(x)=\sin x$	←	$q'(x)=\cos x$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

代入すると，

$$\int e^x \sin x\,dx = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

ここで，$I=\int e^x \sin x\,dx$ 　とおくと，

$I=-e^x \cos x+e^x \sin x-I$ 　･･･（※　この式では I は任意定数を含めた式とする．）

$2I=-e^x \cos x+e^x \sin x$

$I=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$ 　･･･（※により $+C$ が付く．）

（別解）

微分する側	$f(x)=\sin x$	→	$f'(x)=\cos x$
積分する側	$g(x)=e^x$	←	$g'(x)=e^x$

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

第2項について，もう一度，部分積分法を実行する．

微分する側	$p(x)=\cos x$	→	$p'(x)=-\sin x$
積分する側	$q(x)=e^x$	←	$q'(x)=e^x$

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

代入すると，

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \left(e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx\right)$$

ここで，$I=\int e^x \sin x\,dx$ 　とおくと，

$I=e^x \sin x-e^x \cos x-I$

$2I=e^x \sin x-e^x \cos x$

$I=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$

（ダメな例）

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$= e^x \sin x - \left(e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx\right) = 0 + \int e^x \sin x\,dx$$

例3

部分積分法で計算するには，$f(x)$，$g(x)$ のうち，不定積分が容易に求まらない方は，微分する側に選ぶほかない．
特に，対数関数 $\log x$ は，（整式との積になっていても），微分する側に選ぶとできることが多い．

$$\int x \log x\,dx$$

$\log x$ を微分する側に選ぶ．

微分する側	$f(x)=\log x$	→	$f'(x)=\dfrac{1}{x}$

積分する側	$g(x)=\frac{x^2}{2}$	←	$g'(x)=x$

$$\int x\log x\,dx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx=\frac{x^2}{2}\log x-\int\frac{x}{2}dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\log x-\frac{x^2}{4}+C$$

例4

次のように，1 との積に分けるとできるものがある．

$$\int\log x\,dx=\int 1\cdot\log x\,dx$$

$\log x$ を微分する側に選ぶ．

微分する側	$f(x)=\log x$	→	$f'(x)=\frac{1}{x}$
積分する側	$g(x)=x$	←	$g'(x)=1$

$$\int\log x\,dx=x\log x-\int dx=x\log x-x+C$$

短答問題

次の関数の不定積分を求めよ．［半角数字(=1バイト文字)を書き込む］（計算用紙：必要）

(1) $\displaystyle\int x e^{2x}\,dx=\cdots=\frac{e^{2x}(\square x-\square)}{\square}+C$

Check Reset Help

(2) $\displaystyle\int e^x\cos 2x\,dx=\cdots=\frac{e^x(\square\sin 2x+\cos 2x)}{\square}+C$

Check Reset Help

(3) $\displaystyle\int x^3\log x\,dx=\cdots=\frac{x^{\square}(\square\log x-1)}{\square}+C$

Check Reset Help