← PC版は別頁

== 置換積分法 ==

○　はじめに

　変数を置き換えて，積分計算を行う方法を置換積分法という．置換積分法は，合成関数の微分法の逆の計算となっている．

［要点］

右の例のように

　(1)　被積分関数

　(2)　dx

の各々を新しい変数を用いて，元の式と等しい式に置き換える．

　(3)　結果は元の変数 x で表わす．

※　積分記号 $\int f(x)\,dx$ の中に書かれる $f(x)$ を被積分関数という．

例

$\int (2x+1)^3\,dx$

$2x+1=t$ とおくと，

　　被積分関数は，$(2x+1)^3=t^3$

　　$\frac{dt}{dx}=2$ だから $dx=\frac{dt}{2}$

$\int (2x+1)^3\,dx = \int t^3\,\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{t^4}{8}+C$

$= \frac{(2x+1)^4}{8}+C$

例と答

(1) $\int e^{3x}\,dx$

$3x=t$ とおくと，

　　被積分関数は，$e^{3x}=e^t$

　　$\frac{dt}{dx}=3$ だから $dx=\frac{dt}{3}$

$\int e^{3x}\,dx = \int e^t\,\frac{dt}{3} = \frac{e^t}{3}+C=\frac{e^{3x}}{3}+C$

---

(2) $\int \sin\,3x\,dx$

$3x=t$ とおくと，

　　被積分関数は，$\sin\,3x=\sin\,t$

　　$\frac{dt}{dx}=3$ だから $dx=\frac{dt}{3}$

$\int \sin\,3x\,dx = \int \sin\,t\,\frac{dt}{3} = \frac{-\cos t}{3}+C=\frac{-\cos 3x}{3}+C$

(*) 一般に，$\int f(x)\,dx=F(x)+C$ のとき，

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C$$

が成り立つ．（ただし，$a\neq 0$）

例

$$\int (ax+b)^n\,dx=\frac{1}{a}\,\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}+C$$

$$\int e^{ax+b}\,dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$$

$$\int \sin(ax+b)dx=\frac{1}{a}\{-\cos(ax+b)\}+C$$

※ $\cos(ax+b)$，$\tan(ax+b)$ も同様．

---

(3) $\int \sin^3 x\cos x\,dx$

$\sin x=t$ とおくと，

$\sin^3 x=t^3$

※ $\cos x$ は保留にしておく．

$\frac{dt}{dx}=\cos x$ だから $dx=\frac{dt}{\cos x}$

$$\int \sin^3 x\cos x\,dx=\int t^3\cos x\,\frac{dt}{\cos x}$$

※ $\cos x$ は約分で消える．

$$=\int t^3\,dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{\sin^4 x}{4}+C$$

---

(4) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

$x^2+1=t$ とおくと，

※ $2x$ は保留にしておく．

$\frac{dt}{dx}=2x$ だから $dx=\frac{dt}{2x}$

$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx=\int \frac{2x}{t}\,\frac{dt}{2x}$$

※ $2x$ は約分で消える．

$$=\int \frac{dt}{t}=\log|t|+C=\log(x^2+1)+C$$

（$x^2+1>0$ だから，絶対値記号は不要）

(*) 一般に，分子が分母の微分となっているとき，

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx=\log|f(x)|+C$$

が成り立つ．

例

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx=\log|\sin x|+C$$

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}dx=\log(e^x+1)+C$$

短答問題

次の不定積分を計算して空欄を埋めよ．［半角数字(=1バイト文字)を記入］（別途，計算用紙が必要）

(1)

$$\int (4x-5)^6\,dx = \cdots = \frac{(\square x - \square)^{\square}}{\square} + C$$

Check Reset Help

(2)

$$\int \frac{dx}{(3x+2)^4} = \cdots = -\frac{1}{\square(\square x + \square)^{\square}} + C$$

Check Reset Help

(3)

$$\int \cos(2x+3)\,dx = \cdots = \frac{\sin(\square x + \square)}{\square} + C$$

Check Reset Help

(4)

$$\int \tan(2x+\pi)\,dx = \cdots = -\frac{1}{\square}\log|\cos(2x+\pi)| + C$$

Check Reset Help

(5)　(計算:やや長い)

$$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \cdots$$

$$= \frac{\square(x+1)\sqrt{x+1}\,(\square x-\square)}{\square}+C$$

Check Reset Help

(6)

$$\int \frac{\log x}{x}dx = \cdots = \frac{(\log x)^{\square}}{\square}+C$$

Check Reset Help

(7)

$$\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx = \cdots = \frac{1}{\square}\log(e^{2x}+e^{-2x})+C$$

Check Reset Help

(8)

$$\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx = \cdots = \log\left(x^2+\square x+\square\right)+C$$

Check Reset Help