← PC版は別頁

== 不定積分 ==

○　はじめに

例

　x^2 を微分すると $2x$ になるが，x^2+1，x^2+2，x^2+3，…の微分も $2x$ となる．

　一般に，微分して $2x$ となる元の関数は，x^2+C（C は任意定数）と書ける．

　このとき，$2x$ の不定積分は，x^2+C であるといい，

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

と書く．

（任意定数が定まらないので，不定積分と呼ばれる．）

○　不定積分

　一般に，$F'(x)=f(x)$ のとき，微分して関数 $f(x)$ となる元の関数 $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数といい，

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

を $f(x)$ の不定積分という．

　すなわち，$F'(x)=f(x)$　⇔ $\int f(x)dx=F(x)+C$

※高校の教科書では，$F'(x)=f(x)$ のとき，$F(x)$ を $f(x)$ の（１つの）原始関数といい，任意定数 C を付けた式 $F(x)+C$ を不定積分ということが多い．

※また，他方で

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

を原始関数または不定積分と定義して，原始関数と不定積分を全く同じ意味に用いる教科書もある．

例

$$\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int 3x^2 dx=x^3+C$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \quad \Leftrightarrow \quad \int \cos x\, dx=\sin x+C$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \quad \Leftrightarrow \quad \int e^x dx=e^x+C$$

○　不定積分の公式

　次の各微分公式から，不定積分の公式が得られる．（これらの公式は，不定積分を微分すれば証明できる．）

$$\frac{d}{dx}(x^a)=ax^{a-1} \rightarrow \quad \int x^a dx=\frac{x^{a+1}}{a+1}+C \quad \cdots(1)$$

（ただし，$a\neq 0$ とする）

$$\frac{d}{dx}(\log|x|)=\frac{1}{x} \rightarrow \quad \int \frac{1}{x}dx=\log|x|+C \quad \cdots(2)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x \rightarrow$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad \cdots(3)$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a \rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad \cdots(4)$$

（ただし，$a>0,\ a\neq 1$）

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + C \cdots(5)$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C \cdots(6)$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \cdots(7)$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\frac{1}{\sin^2 x} \rightarrow \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \cdots(8)$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \cdots(9)$$

また，$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=g(x)$ のとき次の公式が成り立つ．

$$\frac{d}{dx}\{F(x)+G(x)\} = f(x)+g(x) \rightarrow$$
$$\int \{f(x)+g(x)\}dx = F(x)+G(x)+C \cdots(\text{i})$$

$$\frac{d}{dx}\{kF(x)\} = kf(x) \rightarrow$$
$$\int \{kf(x)\}dx = kF(x)+C \cdots(\text{ii})$$

例

(1)　無理関数の不定積分は有理指数（分数の指数）に直せば計算できる．

$$\int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C$$
$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$$
$$\int \sqrt[3]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{\frac{2}{3}+1}x^{\frac{2}{3}+1} + C$$
$$= \frac{1}{\frac{5}{3}}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C = \frac{5}{3}x\sqrt[3]{x^2} + C$$

(2)　分数関数の不定積分では，部分分数分解の利用も考える．

$$\int \frac{dx}{x(x+1)} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$$
$$= \log|x| - \log|x+1| + C = \log\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$$

(3)　三角関数の積や累乗の不定積分では，積を和に直すことを考える．

$$\int \sin x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}\{\sin 4x + \sin(-2x)\}dx$$
$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2}\right) + C$$
$$= \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 4x}{8} + C$$

短答問題

次の空欄を埋めよ．（半角数字で！）

(1)

$$\int x\sqrt{x}dx = \frac{\square}{\square} x^{\square} \sqrt{x} + C$$

(2)

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \square \sqrt{x} + C$$

(3)

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{\square} \log\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$$

(4)

$$\int \frac{1}{x(x+2)}dx = \frac{1}{\square} \log\left|\frac{x}{x+2}\right| + C$$

Check Reset