

== 指数関数(1) ==

スマホ画面の横幅が、教材の横幅と少し合わないときは、リンクの掛かっている文字 [例えばこの文字] をトントンとたたくと合うようです (ダブルクリック, ダブルタップ)

○ 負の指数, 分数指数の定義

$a \neq 0$  とする. (分母が 0 にならないようにするため)

(1)  $a^0 = 1$

(2)  $n$  を正の整数とすると,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(3)  $m, n$  を正の整数とすると,  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

(\*) 「負の分数」が指数であるときは, 上記(2)(3)の組み合わせによる.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

(要約すると)

負の指数 → 分数

分数の指数 → 累乗根

となるが, 次のような混乱が多いので注意  
 分数の指数が, 分数になるということではない

$$a^{\frac{1}{n}} \rightarrow \times \leftarrow \frac{1}{a^n}$$

負の指数が, 分数の指数に等しいということではない

$$a^{-n} \rightarrow \times \leftarrow a^{\frac{1}{n}}$$

例1

(1)  $2^0 = 1$ ,  $3^0 = 1$

(2)  $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ ,  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

(3)  $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4} = 2$ ,  $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

(なお, 通常, 2乗根の記号は  $\sqrt[2]{a}$  の代わりに  $\sqrt{a}$  と書く)

n乗根の記号  $\sqrt[n]{a}$  はnが省略されたら, 0でもなく, 1でもなく, 2の略 (←数学では珍しい)

説明

(1) 指数法則  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  が成り立つように, 指数0を定義する:

$m=n=3$  のときを例にとって解説:

[指数法則からは]  $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

[意味からは]  $\frac{a^3}{a^3} = 1$

そこで  $a^0 = 1$  と定義すれば指数法則が常に成り立つようにできる.

(2) 指数法則  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  が成り立つように, 負の指

数を定義する：

$m=2, n=5$  のときを例にとって解説：

[指数法則からは]  $a^2 \div a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$

[意味からは]  $\frac{a^2}{a^5} = \frac{1}{a^3}$

そこで  $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$  と定義すれば指数法則が常に成り立つようにできる。

**(3)** 指数法則  $(a^m)^n = a^{mn}$  が成り立つように、分数の指数を定義する：

$m=4, n=3$  のときを例にとって解説：

[指数法則からは]  $(a^x)^3 = a^{3x} = a^4$  のとき  $x = \frac{4}{3}$

[意味からは]  $(\sqrt[4]{a})^3 = a^4$

そこで  $a^{\frac{4}{3}} = \sqrt[4]{a^3}$  と定義すれば指数法則が常に成り立つようにできる。

### ■ 即答問題 ■

(1) 次の値を求めよ。

(半角数字で答えること)

・  $4^{-2} = \frac{1}{\square}$

・  $10^{-1} = \frac{1}{\square}$

・  $5^0 = \square$

Check Reset

(2) 次の値を累乗根の形で表せ。

(半角数字を書き込むこと)

・  $7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[\square]{7^{\square}}$

・  $3^{\frac{5}{4}} = \sqrt[\square]{3^{\square}}$

・  $10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[\square]{10}$

Check Reset

## ○ 指数法則と指数計算

○  $p, q$  を有理数 (正負の整数や分数) とするとき, 次の指数法則が成り立つ. (証明略)

(1)  $a^p a^q = a^{p+q}$  (2)  $a^p \div a^q = a^{p-q}$

(3)  $(a^p)^q = a^{pq}$

(4)  $(ab)^p = a^p b^p$  (5)  $(\frac{a}{b})^p = \frac{a^p}{b^p}$

指数計算を行うには, 右の例のように, 途中経過は「負の指数」や「分数の指数」を用いて機械的に行うとよい。

高校では, 指数の意味が分かっているかどうかを確かめる

ために、最終形を「分数」や「累乗根」の形で答えることが多いが、以下の問題では、最終形も「負の指数」や「分数の指数」で答えてよい。

## 例2

- $a^7 \div a^{-3} \times a^2 = a^{7-3-2} = a^2$
- $(ab^2)^{-1} \div (a^{-2}b)^2 = (a^{-1}b^{-2}) \div (a^{-4}b^2)$   
 $= a^{-1+4}b^{-2-2} = a^3b^{-4}$

数値計算では、素因数分解して表わすとよい。

- $6^8 \times 12^{-2} \div 18^3 = (2 \times 3)^8 \div (2^2 \times 3)^{-2} \times (2 \times 3^2)^3$   
 $= 2^{8-4-3} \times 3^{8-2-6} = 2 \times 3^0 = 2$

累乗根を分数指数で表わすと、累乗根の掛け算・割り算は、指数の分数の足し算・引き算になる。

- $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt{a}$   
 $= a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{2}}$   
 $= a^{\frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{2}}$   
 $= a^{\frac{5}{12}}$

## ■ 即答問題 ■

(1) 次の値を求めよ。

(半角数字を書き込むこと)

- $2^{-3} \times 2^4 \div 2^{-2} = 2^{-3+4-(-2)} = 2^{\square} = \square$

- $(4^2)^{-1} \times 4^{-1} \times (4^{-1})^{-3} = 4^{-2-1+3} = 4^{\square} = \square$

- $27^3 \div 81^{-2} \times 9^{-8}$   
 $= (3^3)^3 \div (3^4)^{-2} \times (3^2)^{-8} = 3^{9-(-8)+(-16)}$   
 $= 3^{\square} = \square$

Check Reset

(2) 次の計算をせよ。

- $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[6]{a^5} \div \sqrt{a} = a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{2}}$   
 $= a^{\frac{4}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{2}} = a^{\square}$

- $\sqrt[4]{3^2} \div \sqrt[4]{3^3} \div \sqrt[8]{3^{-2}}$   
 $= 3^{\frac{2}{4}} \div 3^{\frac{3}{4}} \div 3^{-\frac{2}{8}}$   
 $= 3^{\frac{2}{4} - \frac{3}{4} - (-\frac{2}{8})}$   
 $= 3^{\square} = \square$

- $a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{2}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$   
 $= a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}$   
 $= a^{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}b^{-\frac{3}{2} + \frac{1}{4}} = a^{\square}b^{-\square}$

Check Reset