

== 微分公式のまとめ ==

スマホ画面の横幅が、教材の横幅と少し合わないときは、リンクの掛かっている文字 [例えばこの文字] をトントンとたたくと合うようです (ダブルクリック, ダブルタップ)

○ いろいろな関数の微分

○ 整関数, 有理関数

(1) $y=x^n$ (nは正の整数) $\rightarrow y'=nx^{n-1}$

(2) $y=x^{-n}$ (nは正の整数) $\rightarrow y'=-nx^{-n-1}$

(3) 一般に $y=x^a$ (aは正負の実数) $\rightarrow y'=ax^{a-1}$

※ $a=0$ すなわち $y=1$ の場合も結果はこれでもいいが, $y=k$ (定数) $\rightarrow y'=0$ は分けて覚えるといい.)

例

(1) $y=x^7 \rightarrow y'=7x^6$

(2) $y=x^{-5} \rightarrow y'=-5x^{-6}$

(3) $y=x^{\frac{1}{2}} \rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

○ 指数関数

(4) $y=e^x \rightarrow y'=e^x$

(5) $y=a^x \rightarrow y'=a^x \log a$

(4)の合成 $y=e^{3x} \rightarrow y'=3e^{3x}$

(5) $y=10^x \rightarrow y'=10^x \log 10$

○ 対数関数

(6) $y=\log|x| \rightarrow y'=\frac{1}{x}$

(7) $y=\log_a x \rightarrow y'=\frac{1}{x \log a}$

(6)の合成 $y=\log 3x \rightarrow y=\log x+\log 3 \rightarrow y'=\frac{1}{x}$

(7) $y=\log_{10} x \rightarrow y'=\frac{1}{x \log 10}$

○ 三角関数

(8) $y=\sin x \rightarrow y'=\cos x$

(9) $y=\cos x \rightarrow y'=-\sin x$

(10) $y=\tan x \rightarrow y'=\frac{1}{\cos^2 x}$

(8)の合成 $y=\sin 3x \rightarrow y'=3 \cos 3x$

(9)の合成 $y=\cos 3x \rightarrow y'=-3 \sin 3x$

(10)の合成 $y=\tan 3x \rightarrow y'=\frac{3}{\cos^2 3x}$

○ 積, 商, 合成関数, 逆関数, 陰関数の微分法

(11) $y=f(x)g(x) \rightarrow y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(12) $y=\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(13) $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$

(14) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

(15) $f(x, y)=k$ の形で与えられる方程式については, 両辺をそのまま x で微分するとよい.



例

(11)

i) $y=e^x \sin x \rightarrow y'=e^x \sin x+e^x \cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

ii) $y=(x^2+1) \log x \rightarrow y'=2x \log x+(x^2+1) \frac{1}{x}$
 $=\frac{2x^2 \log x+x^2+1}{x}$

(12)

i) $y=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}$

$\rightarrow y'=\frac{(-\cos x)(1+\sin x)-(1-\sin x) \cos x}{(1+\sin x)^2}$
 $=\frac{-\cos x-\cos x \sin x-\cos x-\sin x \cos x}{(1+\sin x)^2}=\frac{-2 \cos x}{(1+\sin x)^2}$

ii) $y=\frac{e^x}{x} \rightarrow y'=\frac{e^x \cdot x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$

(13)

i) $y=\log (\sin x) \quad (0 < x < \pi)$

$y=\log t$

$t=\sin x$

 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}=\frac{1}{t} \cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$

(なお, $\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x, \frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$ と書く.)

ii) $y=\cos^3 4x$

$y=t^3$

$t=\cos s$

$s=4x$

 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx}=3t^2(-\sin s)4=-12 \cos^2 4x \sin 4x$

(14)

$$y = \arcsin \frac{x}{2} \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \sin y \Leftrightarrow x = 2 \sin y$$

$$\frac{dx}{dy} = 2 \cos y = 2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{4 - x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$$

(15)

$$x^3 + y^3 = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

短答問題

次の各方程式について、 $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

はじめに、関数を選択し、続いて導関数を選択せよ。

合っていれば消える。間違えばヒントが出る。再開するには、次のボタンを押す：[リセット](#)

$$y = \tan x \log x \quad y = \cos(\log x) \quad y = (x^2 + 1)^3$$

$$y = \sin(\cos x) \quad y = \log(\log x) \quad y = \log \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$y = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} \quad y = \frac{e^x}{e^x + 1} \quad y = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$y' = -\sin x (\cos(\cos x)) \quad y' = 6x(x^2 + 1)^2 \quad y' = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad y' = \frac{2 \sin x}{(1 + \cos x)^2}$$

$$y' = \frac{1}{x \log x} \quad y' = \frac{-\sin(\log x)}{x}$$

$$y' = \frac{\log x}{\cos^2 x} + \frac{\tan x}{x} \quad y' = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$$