

■ 順列, 組合せ ■

スマホ画面の横幅が, 教材の横幅と少し合わないときは, リンクの掛かっている文字 [例えばこの文字] をトントンとたたくと合うようです (ダブルクリック, ダブルタップ)

○ 積の法則

Aの起こり方がm通り, その各々についてBの起こり方がn通りあるとき, AもBも起こる場合の数は
 $m \times n$ 通り
ある.

例1 図1のように, 赤青黄の玉が各1個計3個あるとき, これらから2個とって, 前後1列に並べる方法は何通りあるか.

前に置く玉の選び方は, 赤青黄のどれでもよ
いから3通り.

その各々について, (残りの玉は2個となっ
ているから) 後に置く玉の選び方は2通り.

結局, $3 \times 2 = 6$ 通り

例2 図2のように, ある山の登山道が3つあるとき, この山に登って下りる方法は何通りあるか. ただし, 登りと下りで同じ道は通らないものとする.

登り道の選び方は3通り.

その各々について, 下り道の選び方が2通
り.

結局, $3 \times 2 = 6$ 通り

図1

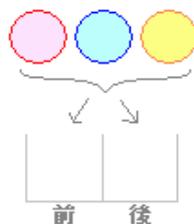


図2



○ 和の法則

2つの事柄A, Bは同時には起こらないとする.
Aの起こり方がm通り, Bの起こり方がn通りあると

き, AまたはBが起こる場合の数は

$m+n$ 通り

ある.

例1 上の図1において, 前に置く玉を赤または青と決めるとき, これら3個の玉から2個とって1列に並べる方法は何通りあるか.

- (ア) 前に赤を置くとき
後に置く方法は, 青黄の2通り
 - (イ) 前に青を置くとき
後に置く方法は, 赤黄の2通り
- (ア)(イ)は同時には起こらないから,
結局, $2+2=4$ 通り

例2 大中小3個のさいころを投げるとき, 出る目の和が15になる場合の数は何通りあるか.

大中の目の和は図3のようになる.

- (ア) 大中の和が12となるのは1通り. このとき, 小の目は3で1通り.
 - (イ) 大中の和が11となるのは2通り. その各々について, 小の目は4で1通り.
 - (ウ) 大中の和が10となるのは3通り. その各々について, 小の目は5で1通り.
 - (エ) 大中の和が9となるのは4通り. その各々について, 小の目は6で1通り.
- (*) 小の目は6以下だから, 大中の和が8以下のとき, 出た目の和が15となることはない.
(ア)~(エ)は同時には起こらないから,
 $1\times 1+2\times 1+3\times 1+4\times 1=10$ 通り

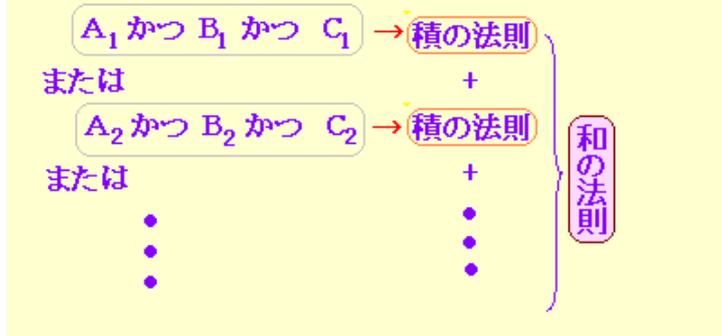
※ 「同時に起こらない」事柄とは, 時間的なことではなく, 論理的に両立し得ない, いわゆる「排反事象」のことをいう.

図3

大\中	1	2	3	4	5	6
和	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

◇要約◇

一般に, 問題を場合分けして考えるとき, 「かつ」で結ばれる個々の場合に積の法則を適用し, 「または」で結ばれる全体のまとめに和の法則を適用するとよい.



即答問題

※入力は半角数字で！

(1) 特大, 大, 中, 小の4個のさいころを投げるとき, 目の和が21となる場合の数は何通りあるか.

(ア) 特大, 大の目の和が12となるのは1通り. このとき, 中, 小の目の和が9となるのは4通り. $1 \times 4 = 4$

(イ) 特大, 大の目の和が11となるのは2通り. このとき, 中, 小の目の和が10となるのは3通り. $2 \times 3 = 6$

(ウ) 特大, 大の目の和が10となるのは 通り. このとき, 中, 小の目の和が11となるのは 通り.

(エ) 特大, 大の目の和が9となるのは 通り. このとき, 中, 小の目の和が12となるのは 通り.

(*) 中, 小の和は12以下だから, 特大, 大の和が8以下のときは, 4個の目の和が21となることはない.

(ア)~(エ) は同時には起こらないから, 結局 通り

Check Reset

図4

2つの和	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(2) A班は男子3人女子2人の計5人, B班は男子2人女子3人の計5人から成っている. 今, A班から1人選んでB班に入れ, 次にB班から1人選んでA班に戻したとき, A班の男女数が元と変わらないような人の移動方法は何通りあるか. (同じ人が行き来する場合を含む.)

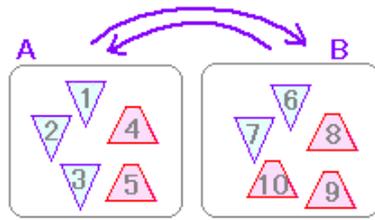
(ア) A班から男子が選ばれるとき
A班の男子の選び方は 通り, その各々についてB班から戻す男子の選び方は 通り.

(イ) A班から女子が選ばれるとき
A班の女子の選び方は 通り, その各々

についてB班から戻す女子の選び方は 通り。

(ア) (イ) より 通り。

Check Reset



○ 階乗記号！

正の整数および0について、階乗記号！を次のように定める。

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

ただし、 $0! = 1$ とする。

例

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

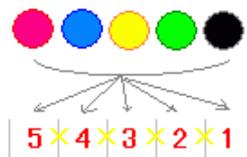
$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$1! = 1$$

$0!$ については、後に登場する順列、組合せの公式に関連して登場するときに、矛盾なく成立するように1と決める。(例外)

例

赤青黄緑黒の5個の玉を1列に並べる方法



1番目の玉の選び方は5通り

その各々について、2番目の玉の選び方は4通り

その各々について、3番目の玉の選び方は3通り

その各々について、4番目の玉の選び方は2通り

その各々について、5番目の玉の選び方は1通り

だから、 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ 通り

この問題のように、並べ方の総数を数える問題では、しばしば正の整数を大きい方から順に1まで掛け合わせたものが登場するので、これを表わす記号を作る。

$$10! = 3628800$$

$$20! = 2432902008176640000$$

となるなど、 n が増えると、「ビックリ」するほど大きくなる。

即答問題

空欄を埋めよ。

6!=
 4!=
 1!=
 0!=

Check Reset

○ 順列の総数

幾つかのものを順序の違いに注意しながら1列に並べたものを順列という。

相異なる n 個のものから、 r 個をとって1列に並べたもの(順列)の総数を

$${}_n P_r$$

で表わす。

このとき、

$${}_n P_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

特に、

$${}_n P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

また、 ${}_n P_r$ は階乗記号を用いて、次のように書ける。

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

例

(1) 相異なる5個のものから3個をとって、1列に並べる順列の総数は、

$${}_5 P_3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$$

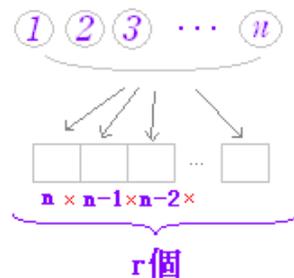
(2) ${}_7 P_4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

(3) ${}_4 P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

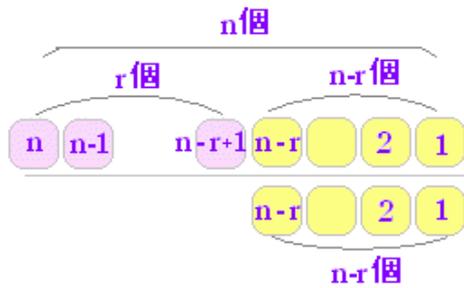
※ 階乗で計算してもよく、順に r 個掛けてもよい。

※ 「 r 個をとる」とは、取ったものを捨てるのではなく、取ったものを使うことをいう。

※ ${}_n P_r$ は、 n から順に r 個の整数を掛けたものとなる。



※ 次の図のように、 $n!$ を $(n-r)!$ で割ると、小さい方から $(n-r)$ 個が約分できて、 r 個が残る。



即答問題

次の値を求めよ。

- (1) ${}^7P_2 =$
- (2) ${}^4P_3 =$
- (3) ${}^6P_4 =$
- (4) ${}^2P_2 =$

(5) 相異なる6個のものをすべて並べた順列の総数

(6) 相異なる5個のものから、相異なる2個をとって、1列に並べた順列の総数

Check Reset

○ **組合せの総数**

順序を問題にせずに、取り出した組だけに着目したものを組合せという。

相異なる n 個のものから、相異なる r 個をとった組合せの総数を

で表わす。 nC_r

このとき、

$${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

が成り立つ。

(解説)

右図5のように、相異なる n 個のものから、相異なる r 個をとって並べる順列を2つの方法で作る。

(ア) 1つは、相異なる n 個のものから、相異なる r 個をとって直接並べるもので、順列の総数の公式から

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

となる。

(イ) もう1つは、相異なる n 個のものから、相異なる r 個をとって組だけを作り、次にこれを並べるという2段階の操作で行う。このとき、順序を考えずに組だけを作る方法の総数が求める組合せの数でこれを

$$x = {}_n C_r$$

とおく.

各々 r 個からなる組の並べ方は $r!$ 通りあるから

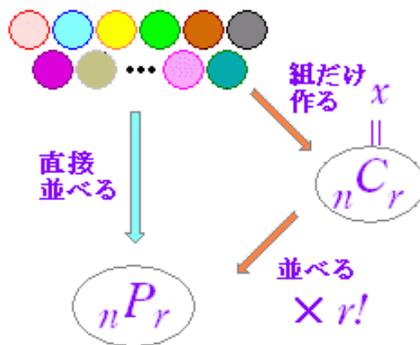
$$x \times r! = {}_n P_r$$

よって,

$$x = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(右の例のように, 各々の組合せを並べ替えると順列となる.)

図5



例

相異なる3個の文字 a, b, c から2つ取るときの, 組合せと順列の関係

組合せ	順列
$\{a, b\}$	(a, b)
	(b, a)
$\{a, c\}$	(a, c)
	(c, a)
$\{b, c\}$	(b, c)
	(c, b)

○ よく使われる公式

$${}_n C_{n-r} = {}_n C_r \quad \cdots(1)$$

$${}_n C_n = {}_n C_0 = 1 \quad \cdots(2)$$

$${}_n C_1 = n$$

(解説)

(1) 公式に当てはめて計算すれば分かる:

$${}_n C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)! \{n-(n-r)\}!} = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

意味から考えれば:

上の例で考えると, 3個のものから2つ選ぶとき, 1つは選ばれない. これらは同数の対になっているので, 1つを選んで2つが選ばれない場合の数と同じとなる. (表組の数だけ裏組がある, 当りを作れば外れができる...世の常)

選ばれた組	選ばれない組
$\{a, b\}$	$\{c\}$
$\{a, c\}$	$\{b\}$
$\{b, c\}$	$\{a\}$

(2) ${}_n C_n$ は全部選ぶ場合で 1 通りある。これに対して、 ${}_n C_0$ は空集合となり 1 通りになる。上の例では、次のように対応する。

選ばれた組	選ばれない組
$\{a, b, c\}$	$\{\}$
$\{\}$	$\{a, b, c\}$

例と答

次の値を求めよ。

$$(1) {}_6 C_4 = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

$$(2) {}_7 C_2 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21$$

(参考：組み合わせは整数なので、分数が残ることはない。)

$$(3) {}_3 C_0 = \frac{3!}{0!3!} = 1 \quad (0! = 1 \text{ を使う})$$

$$(4) {}_4 C_1 = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

即答問題

次の値を求めよ。(半角数字 [1 バイト文字] で)

$$(1) {}_5 C_2 = \square$$

$$(2) {}_6 C_3 = \square$$

$$(3) {}_7 C_6 = \square$$

$$(4) {}_8 C_0 = \square$$

(5) 男子 5 人女子 3 人の班から男子 2 人女子 1 人の委員 (役職の区別なし) を選ぶ方法は何通りあるか 通り

(6) A, B 2 人の力士が 5 回勝負を行うとき、力士 A が 3 勝 2 敗となる場合の数 (試合結果の星取り表) は何通りあるか。ただし、引き分けはないとする。 通り

(※力士 A が、5 回分の番号札のうち、勝ちとなる 3 回分の番号札を取る方法の数を考えるとよい。 [負けとなる 2 回の札を取っても同じ])

Check Reset

○ 二項定理

$(a + b)^n$ を展開したとき、 $a^{n-k}b^k$ の係数は、 ${}_n C_k$ となる。

すなわち,

$$(a+b)^n = {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n$$

特に,

$$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \dots + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + {}_n C_n x^n$$

(解説)

$(a+b)^3$ を展開したときの a^2b の係数を例にとって示す.

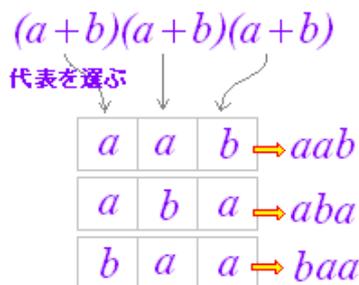
右図6のように, 展開という事柄を, 各々の () から1項ずつ代表を選んで組み合わせることと考える.

b に着目すると, これは3つの () から b をとるべき1つの () を選ぶ方法の数となるから, ${}_3 C_1 = 3$ 通りとなっている.

よって, a^2b が ${}_3 C_1$ 回登場するから, その係数は ${}_3 C_1$

一般に $a^{n-k}b^k$ の係数は, ${}_n C_k$ となる.

図6



例と答

(1) $(2x-3y)^5$ を展開したとき, x^3y^2 の係数を求めよ.

一般項は, ${}_5 C_k (2x)^{5-k} (-3y)^k$

$k=2$ のとき係数は, ${}_5 C_2 (2)^3 (-3y)^2 = 10 \times 8 \times 9 = 720$

(2) $(2x^2+1)^6$ を展開したとき, x^8 の係数を求めよ.

一般項は, ${}_6 C_k (2x^2)^{6-k} = {}_6 C_k 2^{6-k} x^{12-2k}$

x^8 となるのは, $12-2k=8$ より, $k=2$ のとき.

このとき係数は, ${}_6 C_2 2^4 = 240$

(3) $\sum_{k=0}^n {}_n C_k = 2^n$ となることを示せ.

$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \dots + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + {}_n C_n x^n$

に $x=1$ を代入すると,

$$2^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 + {}_n C_2 + \dots + {}_n C_{n-1} + {}_n C_n$$

となる.

(4) $\sum_{k=0}^n k {}_n C_k = n 2^{n-1}$ となることを示せ.

$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \dots + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + {}_n C_n x^n$
の両辺を x で微分すると,

$$n(1+x)^{n-1} = {}_n C_1 + 2 {}_n C_2 x + \dots + k {}_n C_k x^{k-1} + \dots + n {}_n C_n x^{n-1}$$

$x=1$ を代入すると,

$$n 2^{n-1} = {}_n C_1 + 2 {}_n C_2 + \dots + k {}_n C_k + \dots + n {}_n C_n$$

短答問題

(1) $(2x - y)^7$ を展開したとき, x^4y^3 の係数を求めよ.

Check Reset

(2) $(x^2 - 3)^6$ を展開したとき, x^6 の係数を求めよ.

Check Reset

(3)

$$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \dots + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + {}_n C_n x^n$$

の両辺を x で 2 回微分して, $x=1$ を代入することにより, 次の式を簡単にせよ. (右の選択肢の番号 [半角数字] で答えよ.)

$$2 \cdot 1 \cdot {}_n C_1 + 3 \cdot 2 \cdot {}_n C_2 + \dots + k(k-1) {}_n C_{n-k} + \dots + n(n-1) {}_n C_n$$

Check Reset

1 2^{n-1}

2 2^n

3 2^{n+1}

4 $n2^{n-1}$

5 $(n-1)2^{n-2}$

6 $(n+1)2^n$

7 $(n+1)n2^{n-2}$

8 $n(n-1)2^{n-2}$

9 $n^2 2^{n-1}$

10 $\frac{2^n - 1}{n}$

11 $\frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$

12 $\frac{2^{n+1}}{n+1}$

(4)

$$(1+x)^n = {}_n C_0 + {}_n C_1 x + {}_n C_2 x^2 + \dots + {}_n C_{n-1} x^{n-1} + {}_n C_n x^n$$

の両辺を x について 0 から 1 まで積分することにより, 次の式を簡単にせよ. (右の選択肢の番号 [半角数字] で答えよ.)

$$\frac{{}_n C_0}{1} + \frac{{}_n C_1}{2} + \frac{{}_n C_2}{3} + \dots + \frac{{}_n C_n}{n+1}$$

Check Reset