

== 近似式 ==

○ 接線の方程式

点 (a, b) を通り, 傾き m の直線の方程式は

$$y-b=m(x-a) \cdots(1)$$

だから, 曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は, (1)において, $m=f'(a)$, $b=f(a)$ において

$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \cdots(2)$$

もしくは

$$y=f(a)+f'(a)(x-a) \cdots(3)$$

右図1のように, 「接線のy座標」は, $x=a$ のとき「曲線のy座標」と完全に一致するが, x が a に近い値をとるときは, その近似値となっている.

すなわち,

$$f(x) \cong f(a)+f'(a)(x-a) \cdots(4)$$

$x-a=h$ とおくと, (4)は,

$$f(a+h) \cong f(a)+f'(a)h \cdots(5)$$

と書くこともできる.

図1



○ 1次の近似式

x が a に十分近い値をとるとき,

$$f(x) \cong f(a)+f'(a)(x-a) \cdots(4)$$

h が 0 に十分近いとき

$$f(a+h) \cong f(a)+f'(a)h \cdots(5)$$

特に, $a=0$ のとき

$$f(x) \cong f(0)+f'(0)x \cdots(6)$$

これらの式を関数 $f(x)$ の1次の近似式という.

例

$f(x)=(1+x)^2$ のとき

$f'(x)=2(1+x)$ だから, $f'(0)=2$

x が 0 に十分近い値をとるとき

$$f(x) \cong f(0)+f'(0)x=1+2x$$

正確な値, $f(x)=(1+x)^2=1+2x+x^2$ と比較すると, $x=0.1$ ならば $x^2=0.01$ となり, その差はほとんど無視できるほど小さい.

例と答

(1) $x \doteq 0$ のとき, $f(x) = \sin x$ の1次の近似式を求めよ.

(答案)

$$f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x, \quad f'(0) = 1$$

だから

$$f(x) \doteq 0 + 1x = x$$

(2) $x \doteq 0$ のとき, $f(x) = \sqrt{1+x}$ の1次の近似式を求めよ.

(答案)

$$f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(0) = \frac{1}{2}$$

だから

$$f(x) \doteq 1 + \frac{1}{2}x$$

(3) 1次の近似式を用いて, 次の値の近似値を求めよ.

$$1.01^{-5}$$

(答案)

$$f(x) = (1+x)^{-5} \text{ とおく,}$$

$$f'(x) = -5(1+x)^{-6}$$

$x \doteq 0$ のとき,

$$f(x) \doteq f(0) + f'(0)x = 1 - 5x$$

$$f(0.01) \doteq 1 - 5 \times 0.01 = 0.95$$

短答問題

(1) $x \doteq 0$ のとき, $f(x) = \log(1+x)$ の1次の近似式を求め, これを利用して $\log 1.01$ の近似値を求めよ.

$$\log 1.01 \doteq \text{ }$$

(2)

$x \doteq 0$ のとき, $f(x) = \tan x$ の1次の近似式を求め, これを利用して $\tan \frac{\pi}{30}$ の近似値を求めよ.

ただし, $\pi = 3.1416$ とし, 結果は小数第3位まで求めよ.

$$\tan \frac{\pi}{30} \doteq \text{ }$$

(3)

$x \doteq 0$ のとき, $f(x) = \sqrt[3]{1000+x}$ の1次の近似式を求め, これを利用して $\sqrt[3]{1001}$ の近似値を求めよ. (小数第3位まで)

$$\sqrt[3]{1001} \doteq \text{[]}$$

Check Reset help

○ 2次の近似式

(5)式は h が0に十分近いとき h の1次式で近似式を表わしたものとなっている

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h \quad \cdots(5)$$

目的に応じてさらに詳しい近似式がほしいときは, h の2次式, 3次式, \cdots と次数を高くしていくとより精度の高い近似式が得られる.

x が a に十分近い値をとるとき,

$$f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \quad \cdots(7)$$

h が0に十分近いとき

$$f(a+h) \doteq f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 \quad \cdots(8)$$

$a=0$ のとき

$$f(x) \doteq f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 \quad \cdots(9)$$

これらの式を関数 $f(x)$ の2次の近似式という.

(解説)

h が0に十分近いとき

$$f(a+h) \doteq \alpha + \beta h + \gamma h^2 = g(a+h)$$

とおくと,

$$\beta + 2\gamma h = g'(a+h)$$

$$2\gamma = g''(a+h)$$

$$h=0 \text{ のとき, } f(a) = g(a) \quad \cdots(*1)$$

$$h=0 \text{ のとき, } f'(a) = g'(a) \quad \cdots(*2)$$

$$h=0 \text{ のとき, } f''(a) = g''(a) \quad \cdots(*3)$$

を条件とすると,

$$(*1) \text{ より, } \alpha = f(a)$$

$$(*2) \text{ より, } \beta = f'(a)$$

$$(*3) \text{より, } \gamma = \frac{f''(a)}{2!}$$

※ 一般に, $a_n x^n$ を n 回微分すると $n! a_n$ となる.

○ テイラーの定理

x が a に十分近い値をとるとき,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

(n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表わす.)

$$h \text{ が } 0 \text{ に十分近いとき } f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + R_n$$

これをテイラーの定理という. (R_n は近似式と真の値との誤差)

右辺を無限級数 (数列の和の極限) にしたもの (このとき $R_n \rightarrow 0$ となる) をテイラー展開という.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \dots$$

テイラーの定理, テイラー展開において, 特に $a=0$ の場合は, マクローリンの定理, マクローリン展開と呼ばれる.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

※ テイラー展開, マクローリン展開ともに, 「無限級数が収束するような x または h の値の範囲」を吟味する必要があるが, ここでは h または x が十分 0 に近く, 収束する範囲内にある場合を扱っている.

例と答

(1) $f(x) = e^x$ のマクローリン展開を求めよ.

$$f'(x) = e^x, f''(x) = e^x, \dots, f^{(n)}(x) = e^x \quad (y^{(n)} \text{ は } n \text{ 次導関数})$$

$$f(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 1, \dots, f^{(n)}(0) = 1 \text{ だから}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

$x=1$ を代入すると,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

(2) $f(x) = \sin x$ のマクローリン展開を求めよ.

$$f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, \dots$$
$$f(0) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = 0, -1, 0, \dots$$

(4回微分することにより巡回する。)

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

(3) $f(x) = \cos x$ のマクローリン展開を求めよ。

$$f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, \dots$$
$$f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, 0, \dots$$

(4回微分することにより巡回する。)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$