→ スマホ版は別頁

== 三角関数(2) ==

○　はじめに

多項式の展開とは異なり，三角関数において（　）をはずす変形は簡単ではない．例えば，次のような変形はできない．

$\sin(\alpha+\beta)\rightarrow\times\times\rightarrow\sin\alpha+\sin\beta$
$\cos(2\alpha)\rightarrow\times\times\rightarrow 2\cos\alpha$

このページでは，はじめに，$\sin(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$ などの　（　　）をはずす公式「三角関数の加法定理」を解説し，その応用として「２倍角公式」「３倍角公式」「積和の公式」「和積の公式」を解説する．

○　三角関数の加法定理

［要点］

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots(1)$
$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots(2)$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cdots(3)$
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots(4)$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdots(5)$$
$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\cdots(6)$$

(1)(2)の証明･･･（以下の証明は第1象限の場合についてのものであるが，この公式は，α，β が任意の角の場合でも成立する．）

右図において，$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，$AO=1$ とするとき，点 A の x 座標が $\cos(\alpha+\beta)$，y 座標が $\sin(\alpha+\beta)$ となる．

$x=OE=OC-BD=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ →(1)
$y=AE=AD+DE=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ →(2)

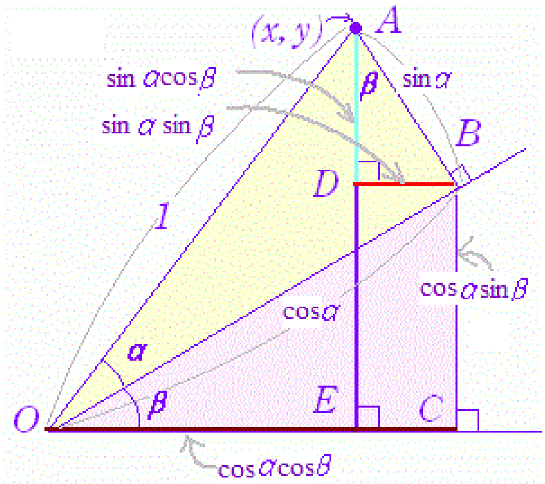
(3)(4)の証明
(3)←
$\sin(\alpha-\beta)$
$=\sin\{\alpha+(-\beta)\}$　引き算は符号が逆の数の足し算と同じ
$=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$
　$\cos\theta$ は偶関数：$\cos(-\theta)=\cos\theta$
　$\sin\theta$ は奇関数：$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$　…(3)証明終わり■

(4)←
$\cos(\alpha-\beta)$
$=\cos\{\alpha+(-\beta)\}$　引き算は符号が逆の数の足し算と同じ
$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$
　$\cos\theta$ は偶関数：$\cos(-\theta)=\cos\theta$
　$\sin\theta$ は奇関数：$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$　…(4)証明終わり■

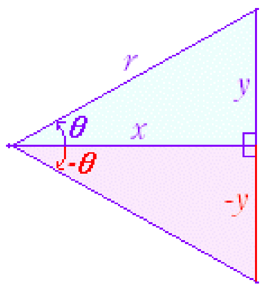
(5)(6)の証明
(5)←
$\tan(\alpha+\beta)$

※　はじめて学ぶとき

公式(1)(2)は必ず言えるようにし，残りは短時間に導けるようにする．（何度も使ううちに(3)以下を覚えてしまっても構わない．）



次の図において，下半分の桃色の三角形の辺の長さの比を，上半分の水色の三角形の比で表すと，偶関数・奇関数の性質が分かる．



$$\sin(-\theta)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r}=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\frac{x}{r}=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x}=-\tan\theta$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$
三角関数の相互関係： $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$
(1)(2)の結果を使う

$$=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}$$
分母分子を $\cos\alpha\cos\beta$ で割る

$$=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
…(5)証明終わり■

(6)←

$$\tan(\alpha-\beta)$$
$$=\tan\{\alpha+(-\beta)\}$$
引き算は符号が逆の数の足し算と同じ

$$=\frac{\tan\alpha+\tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$
(5)の結果を使う

$$=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$\tan\theta$ は奇関数： $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

…(6)証明終わり■

問題をする　解説を読む

○ 倍角公式

[要点]

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cdots(7)$

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\cdots(8)$

$=2\cos^2\alpha-1\cdots(9)$

$=1-2\sin^2\alpha\cdots(10)$

$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\cdots(11)$

(証明)

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots(1)$

において， $\alpha=\beta$ とおくと，

$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ →(7)

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\cdots(2)$

において， $\alpha=\beta$ とおくと，

$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ →(8)

(8)において $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ を代入すると，

$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ →(9)

(8)において $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ を代入すると，

$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ →(10)

$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\cdots(5)$

において， $\alpha=\beta$ とおくと，

$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ →(11)

○ 半角公式

[要点]

$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{2}\cdots(12)$

$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos2\alpha}{2}\cdots(13)$

$\tan^2\alpha=\frac{1-\cos2\alpha}{1+\cos2\alpha}\cdots(14)$

半角公式は，次の形で示されることもある．±は，象限に応じて一方の符号を選ぶことを表わす． α を 2α で表すのと， $\frac{\alpha}{2}$ を α で表わすのとでは，対応関係は同じだから，好きな方を使えばよい．

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}\cdots(12')$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\cdots(13')$$
$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdots(14')$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\cdots(12'')$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\cdots(13'')$$
$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\cdots(14'')$$

(9)(10)を変形すれば→(12)(13)
(12)÷(13)により→(14)

○　３倍角公式

２倍角公式と加法定理を組み合わせると，次の公式ができる．

［要点］

$$\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\cdots(15)$$
$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdots(16)$$
$$\tan3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}\cdots(17)$$

(15)←

$\sin(2\alpha+\alpha)=\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha\sin\alpha$

$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$

$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$　…(15)証明終わり■

(16)←

$\cos(2\alpha+\alpha)=\cos2\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha\sin\alpha$

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$

$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$

$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$　…(16)証明終わり■

(17)←

$$\tan(2\alpha+\alpha)=\frac{\tan2\alpha+\tan\alpha}{1-\tan2\alpha\tan\alpha}$$
$$=\frac{\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}+\tan\alpha}{1-\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}\tan\alpha}$$
$$=\frac{2\tan\alpha+\tan\alpha(1-\tan^2\alpha)}{(1-\tan^2\alpha)-2\tan\alpha\cdot\tan\alpha}$$
$$=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$ …(17)証明終わり■

問題をする　解説を読む

○　積和の公式（積を和に直す公式）

［要点］

$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$ …(18)

$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$ …(19)

$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$ …(20)

$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$ …(21)

○　和積の公式（和を積に直す公式）

［要点］

$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ …(22)

$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ …(23)

$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$ …(24)

$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$ …(25)

（証明）

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ …(1)

+) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ …(3)

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=\underline{2\sin\alpha\cos\beta}$ →(18)

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ …(1)

−) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ …(3)

$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=\underline{2\cos\alpha\sin\beta}$ →(19)

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …(2)

+) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ …(4)

$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=\underline{2\cos\alpha\cos\beta}$ →(20)

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …(2)

−) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ …(4)

$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=\underline{-2\sin\alpha\sin\beta}$ →(21)

(18)〜(21)において，　$\alpha+\beta=A$，　$\alpha-\beta=B$ とおくと，

$\alpha=\frac{A+B}{2}$，　$\beta=\frac{A-B}{2}$ →(22)〜(25)

問題をする　解説を読む