→ スマホ版は別頁

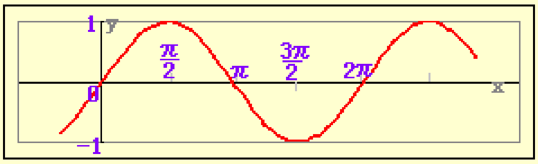
== 三角関数(3) ==

○　三角関数のグラフと最大，最小

(1)　$y=\sin x$ のグラフは，表1により，点をなめらかに結べば得られる．

表1

x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$
$\sin x$	$\cdots$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$

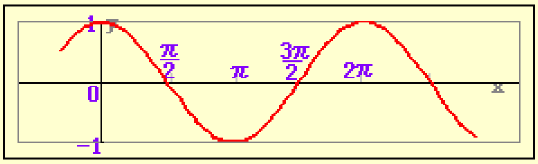


特に，「原点を通ること」「$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ となること」が重要である．

(2)　$y=\cos x$ のグラフも同様にして，表2により，点をなめらかに結べば得られる．

表2

x	$\cdots$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\cdots$
$\cos x$	$\cdots$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$



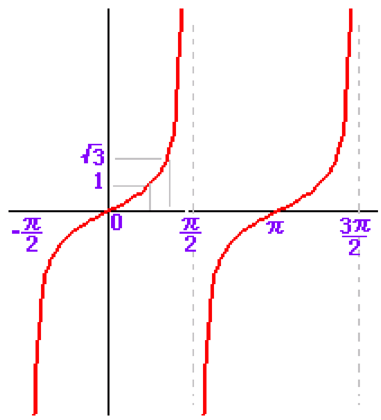
特に，「$x=0$ のとき $y=1$ になること」「 $-1 \leqq \cos x \leqq 1$ となること」が重要である．

(3)　$y=\tan x$ のグラフも同様であるが，このグラフは他の２つと全く異なり，取り得る値の範囲が

$$-\infty < \tan x < \infty$$

となるところが特徴．

特に，$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ の区間だけで，y は全実数値を取る．



例と答

(1)　$y=2\sin x+3$　$(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$ の最大値，最小値を求めよ．

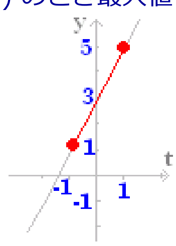
（答案）

$t=\sin x$ とおくと，

$y=2t+3$　$(-1 \leqq t \leqq 1)$

$t=-1$ $(x=-\frac{\pi}{2})$ のとき最小値 1 をとる．

$t=1$ $(x=\frac{\pi}{2})$ のとき最大値 5 をとる．



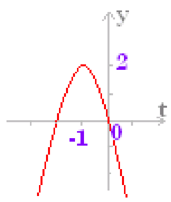
(3)　$y=-2\tan^2 x-4\tan x$　$(-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2})$ の最大値，最小値を求めよ．

（答案）

$t=\tan x$ とおくと，

$y=-2t^2-4t$　$(-\infty<t<\infty)$

$y=-2(t+1)^2+2$　だから



最小値　なし

$t=-1$ $(x=-\frac{\pi}{4})$ のとき最大値 2 をとる．

(2)　$y=\cos^2 x-2\cos x$　($0\leqq x\leqq\pi$) の最大値，最小値を求めよ．

（答案）

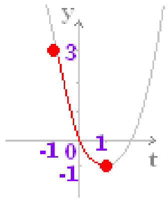
$t=\cos x$ とおくと，

$y=t^2-2t$　($-1\leqq t\leqq 1$)

$y=(t-1)^2-1$　だから

$t=-1$ ($x=\pi$) のとき最大値 3 をとる．

$t=1$ ($x=0$) のとき最小値 -1 をとる．



■即答問題■

次の関数の最大値，最小値を求めよ．ないときは，「 * 」と書け．（最大値，最小値を与える x の値は省略してよい．）

(1)　$y=-3\sin x+5$　($-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$)

最大値

最小値

Check Reset

(2)　$y=\cos^2 x+4\cos x+3$　($0\leqq x\leqq\pi$)

最大値

最小値

Check Reset

(3)　$y=4\tan^2 x-4\tan x$　($-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$)

最大値

最小値

Check Reset

○　三角関数の微分

［　要点　］

$y=\sin x$　→　$y'=\cos x$　…(1)

$y=\cos x$　→　$y'=-\sin x$　…(2)

$y=\tan x$　→　$y'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$　…(3)

なお，上の結果に合成関数の微分法を組み合わせた，次の公式はよく登場する．

$y=\sin kx$　→　$y'=k\cos kx$

$y=\cos kx$　→　$y'=-k\sin kx$　など

(証明)

三角関数の微分（導関数）を求めるとき，右の極限値を利用する．

(1)←：

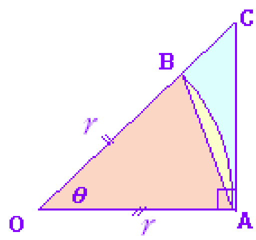
$$y=\sin x \rightarrow y'=\lim_{h\to0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{2\cos(x+\frac{h}{2})\sin\frac{h}{2}}{h}=\lim_{h\to0}\cos(x+\frac{h}{2})\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

（重要な極限値）

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

この式は，通常，次のような図を用いて示される．



△OAB＜扇形OAB＜△OACだから

ア)　$\theta>0$ のとき

$$\frac{1}{2}r^2\sin\theta<\frac{1}{2}r^2\theta<\frac{1}{2}r^2\tan\theta$$

$$0<\sin\theta<\theta<\tan\theta$$

$0<1<\dfrac{\theta}{\sin\theta}<\cos\theta\rightarrow1$ ($\theta\rightarrow0$ のとき)　だから

$\dfrac{\sin\theta}{\theta}\rightarrow1$ ($\theta\rightarrow0$ のとき)

ここで，$\cos\left(x+\frac{h}{2}\right) \to \cos x$，$\dfrac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1$
だから，$y' = \cos x$

(2)←：も同様にして示される．
(3)←：$y=\tan x$ のとき
商の微分法により

$$y' = \frac{\cos x \ \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

例と答

次の関数を微分せよ．

(1)　$y=\sin\ 2x$

（答案）　$y=\sin\ t$

$t=2x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \sin\ t \times 2 = 2\ \sin\ 2x$$ ···(答)

(2)　$y=\cos^2 x$

（答案）　$y=t^2$

$t=\cos x$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2t(-\sin x) = -\ 2\cos x\ \sin x$$ ···(答)

■即答問題■

次の関数を微分せよ．

(1)　$y=\sin(-\ 3x+2)$

$y' = \square \cos(-3x+2)$

Check Reset

(2)　$y=\tan(2x\text{-}3)$

$$y' = \frac{\square}{\cos^2(-3x+2)}$$

Check Reset

イ）θ＜0のとき，$\theta=-t$ とおくと

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{\sin(-t)}{(-t)} = \frac{\sin t}{t} \to 1$$ （$\theta\to 0$ のとき）

ア）イ）より，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$

(3)　$y=\tan(3x+2)$

（答案）　$y=\tan\ t$

$t=3x+2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 t} \times 3 = \frac{3}{\cos^2(3x+2)}$$ ···(答)

(3)　$y=\cos^3 4x$

$y' = \square\ \sin 4x \cos^2 4x$

Check Reset Help