→ スマホ版は別頁

== 三角関数(1) ==

○　弧度法

小学校以来，角度の単位には円の一周を *360°* とする *60* 分法に慣れているが，微分積分では，次に述べる弧度法の単位（ラジアン）を用いる．

右の図 1 のように，２つの相似図形では対応する辺の長さの比が等しいので「弧の長さ／半径」の比は，図形の大きさによらず扇形の角度だけで決まる．

そこで，弧度法では

$$\theta=\frac{\text{弧の長さ}}{\text{半径}}=\frac{l}{r}$$

を角度の定義とする．（単位はラジアン．ただし，ラジアンは省略してよい．）

右の図2のように，角度を２倍，３倍，... とすると弧の長さも２倍，３倍，... となり，弧の長さと角度は比例するので，*60* 分法の角度を弧度法の角度に直すには，円周の長さから比例計算で求めるとよい．　図3のように，$360°=2\pi$（ラジアン），$180°=\pi$（ラジアン）を基本とする．

$$180^\circ : \alpha^\circ = \pi : \theta$$

により，*60* 分法の角度 α を弧度法の角度 θ に直す．

（幾つかの例）

60分法	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$

図 1

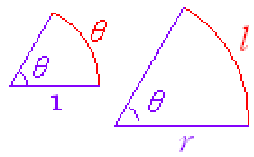


図2

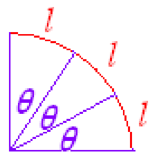
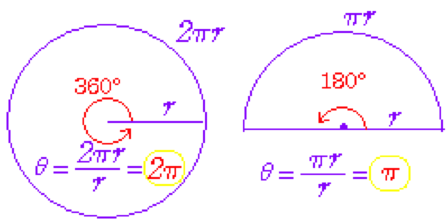


図3



■即答問題■

次の角度を弧度法に直せ．（[Start]を押して，選択肢から選べ）

[Start]

$\frac{\pi}{6}$　$\frac{\pi}{4}$　$\frac{\pi}{3}$　$\frac{\pi}{2}$　$\frac{2\pi}{3}$　$\frac{3\pi}{4}$　$\frac{5\pi}{6}$　π

$\frac{7\pi}{6}$　$\frac{5\pi}{4}$　$\frac{4\pi}{3}$　$\frac{3\pi}{2}$　$\frac{5\pi}{3}$　$\frac{7\pi}{4}$　$\frac{11\pi}{6}$　2π

○　一般角

角度は，小学校以来，図4のように２直線の間の角を分度器で測り，向きは考えなかったが，これを負の角や *360°*（2π ラジアン）以上の角度に拡張する．

図5のように，x 軸の正の向きを始線とし，左回り（反時計回り）を正の向き，右回り（時計回り）を負の向きとする．このように，正の角・負の角，*360°*（2π ラジアン）以上に拡張した角度を一般角という．一般角を考えるときは，動径（実際の計算に当たっては円周上の点）が角度を表現する．

図4

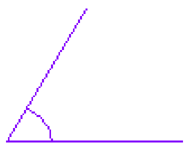
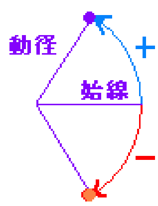


図5

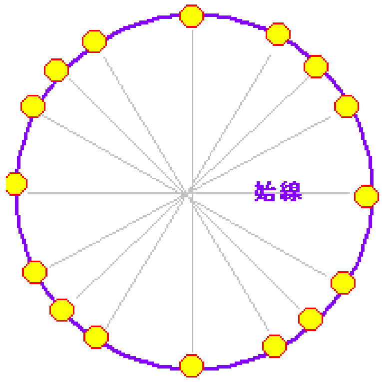


角度を定めれば動径は定まるが，図6のように動径を定めても角度はただ１つには定まらず，１周の整数倍の差がある角度は，すべて同じ動径に対応する．

■即答問題■

次の角度を表わす動径を，右図の円周上の点で示せ．

[Start]



○　動径が表わす一般角

角度を定めれば動径は定まるが，動径を定めても角度ははだた一通りには定まらず，数回転した角度はすべて同じ動径に一致する．そこで，ある動径が表わす１つの角度をα とするとき，動径が表わす一般角θ は

$$\theta=\alpha+2n\pi \quad (\text{n は整数})$$

と書くことができる．

例　右の図6の動径 OP の表わす一般角は

$$\frac{\pi}{6}+2n\pi \quad (\text{n は整数})$$

となる．

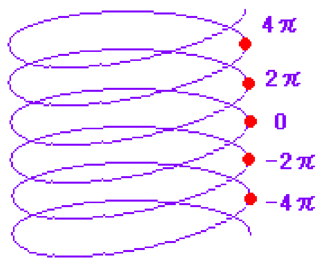
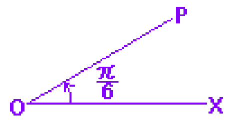


図6



○　三角関数の定義

$90°$ までの三角比は，「直角三角形」の辺の長さの比で定義される（図7）が，$90°$ 以上の角度や負の角に対しては「直角三角形」が描けない．

そこで，一般角の三角関数を定義するときに，動径を代表する円周上の点に対して，r ：半径，x ：x 座標（符号付きの正負の数），y ：y 座標（符号付きの正負の数）として，右の図8のように定義する．

（ただし，$\tan\frac{\pi}{2}$，$\tan\frac{3\pi}{2}$ などは分母の x が 0 となるため定義されない．）

筆算で解く問題のほとんどは，右図9の２つの直角三角形において，斜辺ｒの長さは正とし，他の２辺 x , y に符号を考えればできる．

図7

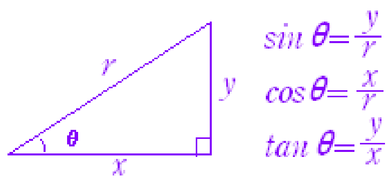


図8

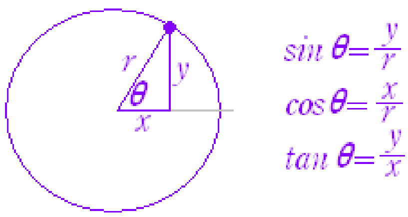
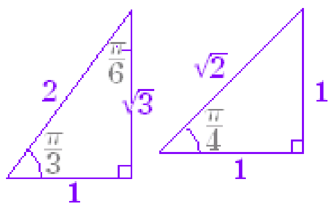


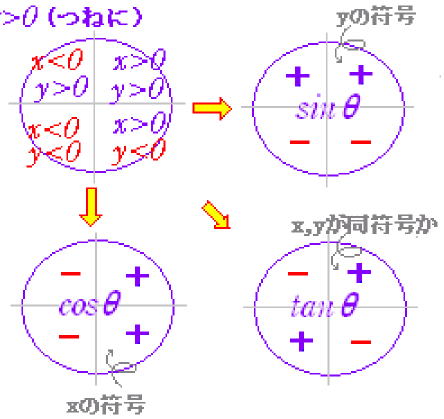
図9



○　三角関数の符号

半径 r はつねに正なので，三角関数の符号は，x ， y の符

号で決まる．そこで，動径のある象限が決まれば三角関数の符号は決まる．（右図参照）



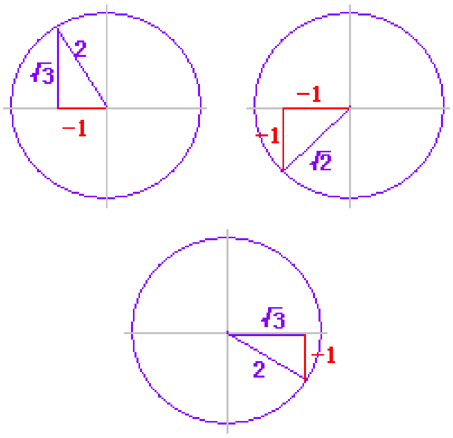
例

右図から，次の三角関数の値が分かる．

$$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \sin\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\qquad \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad \cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}\qquad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=1\qquad \tan\frac{11\pi}{6}=-\frac{1}{\sqrt{3}}$$



■即答問題■

[Next]

次の三角関数の値を右の選択肢から選べ．

$\sin\frac{\pi}{6}$

[1問 / 全20問]

0 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 1 $\sqrt{3}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

なし $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ -1 $-\sqrt{3}$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

○ 三角関数の相互関係

右の図10のような直角三角形においては，ピタゴラスの定理（三平方の定理）により，$x^2+y^2=r^2$ が成り立つ．

x，y が負の場合にも，点（x，y）と原点との距離の公式から，$x^2+y^2=r^2$ がいえる．

この式の両辺を r^2 で割ると $\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1$

したがって，

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1 \cdots(1)$$

が成り立つ．

また，

$$\tan\theta=\frac{y}{x},\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}$$

だから

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdots(2)$$

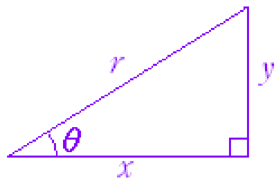
が成り立つ．

(1)の両辺を $\cos^2\theta$, $\sin^2\theta$ で割ると，

$$\tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}\cdots(3)$$

$$1+\frac{1}{\tan^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}\cdots(4)$$

図10



※ $(\sin\theta)^2$ を $\sin^2\theta$ と書く．$\sin\theta^2$ とは書かない．（$\sin\theta^2$ は $\sin(\theta^2)$ を表す．）$\cos^2\theta$, $\tan^2\theta$ についても同様．この他，$\sin^3\theta$, $\cos^4\theta\cdots$ の記号も用いられる．

例

(1)　θ が第2象限の角で，$\sin\theta=\frac{1}{3}$ のとき，$\cos\theta$ の値を求めよ．

(答案)　$\left(\frac{1}{3}\right)^2+\cos^2\theta=1$ より $\cos^2\theta=\frac{8}{9}$

第2象限の角だから $\cos\theta<0$

よって

$$\cos\theta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(2) $\sin\theta=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\cos\theta=\frac{2}{3}$ のとき $\tan\theta$ の値を求めよ．

これらの公式により, $\sin\theta,\ \cos\theta,\ \tan\theta$ のうち幾つかが与えられたときに他の値を求めることができる.

(答案)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$