→ スマホ版は別頁

== 逆三角関数 ==

○　$\sin x$ の逆関数

三角関数のグラフ，例えば $y=\sin x$ のグラフは，右図1のように $y=-1$ から $y=1$ までの値を何度もとる．

x の値を定めれば y の値は定まるが，ある y の値をとる元の x はただ一つではない．（x :多 対 y : 1 の対応）

そこで，三角関数の逆の対応，すなわち

$$y=\sin x \quad \Leftrightarrow \quad x=?(y)$$

という関数を考えるときは，右図１の赤で示したように，

$$y=\sin x \ (-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq \frac{\pi}{2})\ (-1\leqq y\leqq 1)$$

を考え，$y=\sin x$ の逆関数を

$$y=\arcsin x \text{ または } y=\sin^{-1}x$$

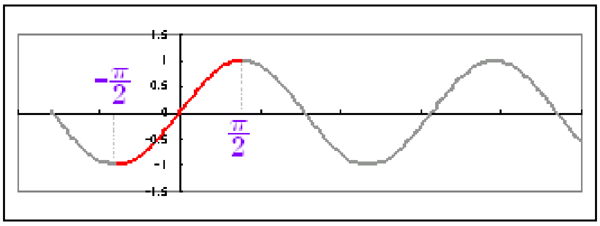
で表わす．

逆三角関数 $y=\arcsin x$ の値は，$-\frac{\pi}{2}$ ～ $\frac{\pi}{2}$ の値を考え，この値を「主値」と呼ぶ．

このとき，$y=\arcsin x \quad (-1\leqq x\leqq 1)\ (-\frac{\pi}{2}\leqq y\leqq \frac{\pi}{2})$ となる．

図１

$y=\sin x$



例1

$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$

$\sin\frac{\pi}{2}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \arcsin 1=\frac{\pi}{2}$

○　$\cos x$ の逆関数

$y=\cos x$ の逆関数は

$$y=\arccos x \text{ または } y=\cos^{-1}x$$

で表わす．主値は，0 ～π とする．

すなわち，

$$y=\cos x \quad (0\leqq x\leqq \pi)(-1\leqq y\leqq 1)$$

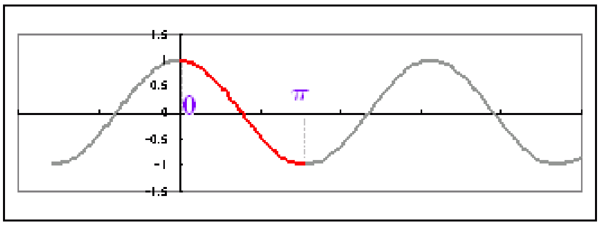
の定義域と値域を入れ替えて，

$$y=\arccos x \quad (-1\leqq x\leqq 1)\ (0\leqq y\leqq \pi)$$

とする．

図2

$y=\cos x$



例2

$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$

$\cos\frac{\pi}{2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \arccos 0=\frac{\pi}{2}$

○　$\tan x$ の逆関数

$y=\tan x$ の逆関数は

$$y=\arctan x \text{ または } y=\tan^{-1}x$$

で表わす．主値は$-\frac{\pi}{2}$ ～ $\frac{\pi}{2}$ とする．

すなわち，

$$y=\tan x \quad (-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})(-\infty<y<\infty)$$

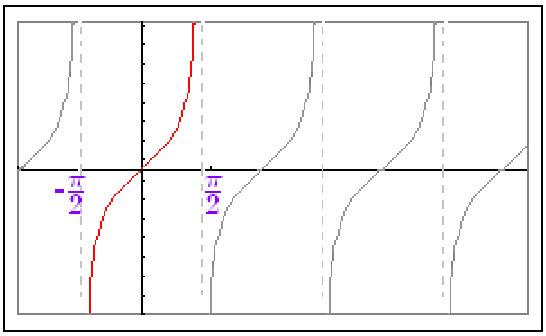
の定義域と値域を入れ替えて，

$$y=\arctan x \quad (-\infty<x<\infty)\ (-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2})$$

とする．

図3

$y=\tan x$



例3

$\tan\frac{\pi}{4}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan 1=\frac{\pi}{4}$

$\tan 0=0 \quad \Leftrightarrow \quad \arctan 0=0$

■即答問題■

次の値を求めよ．

はじめに，左から問題を選び，続いて右から解答を選べ．

ただし，主値は次の範囲にある値とする．

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arcsin y \leqq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leqq \arccos y \leqq \pi$$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan y < \frac{\pi}{2}$$

合っていれば消える．

解説が必要な時は，問題を選んでから

このボタンを押す→HELP

$\arcsin\frac{1}{2}$　　$\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$　　$\arctan(-\sqrt{3})$

$\arctan(-1)$　　$\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$　　$\arcsin(-\frac{1}{2})$

$\arcsin 0$　　$\arcsin 1$

0　　$\frac{\pi}{6}$　　$\frac{\pi}{4}$　　$\frac{\pi}{3}$　　$\frac{\pi}{2}$

$\frac{5\pi}{6}$　　$\frac{2\pi}{3}$　　$\frac{3\pi}{4}$　　$-\frac{\pi}{6}$　　$-\frac{\pi}{4}$

$-\frac{\pi}{3}$　　$-\frac{\pi}{2}$　　$-\frac{5\pi}{6}$　　$-\frac{2\pi}{3}$　　$-\frac{3\pi}{4}$

○ 逆三角関数の導関数

［要点］

$y=\arcsin x \quad \rightarrow \quad y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ···(1)

$y=\arccos x \quad \rightarrow \quad y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ···(2)

$y=\arctan x \quad \rightarrow \quad y'=\dfrac{1}{1+x^2}$ ···(3)

図4

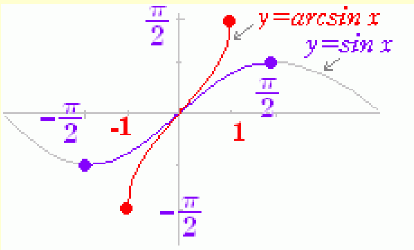


図5

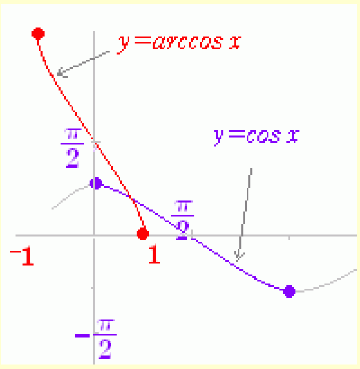
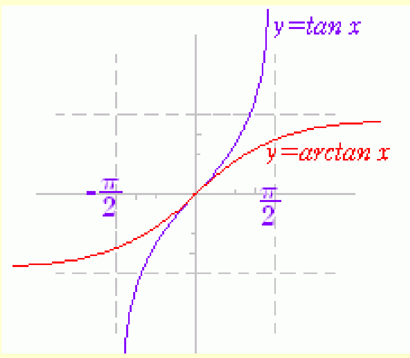


図6



(証明)

逆関数の微分法を用いる．

(1)←：

$y=\arcsin x \quad \Leftrightarrow \quad x=\sin y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ここで，$\dfrac{dx}{dy}=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$ だから

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(図4のように，主値については，$y'\geqq 0$ となる．)

(2)←：

$y=\arccos x \quad \Leftrightarrow \quad x=\cos y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ここで，$\dfrac{dx}{dy}=-\sin y=-\sqrt{1-\cos^2 y}=-\sqrt{1-x^2}$ だから

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(図5のように，主値 については，$y'\leqq 0$ となる．

(3)←：

$y=\arctan x \quad \Leftrightarrow \quad x=\tan y$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

ここで，$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\cos^2 y}=1+\tan^2 y$ だから

$$\frac{dy}{dx}=\cos^2 y=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}$$

(図6のように，主値 については，$y'\geqq 0$ となる．

■短答問題■

1 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　2 $-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　　3 $\dfrac{1}{1+x^2}$

次の関数の導関数を求めよ．（右の選択肢の番号で答えよ．半角数字に限る）
解説が必要な時は，このボタンを押す→HELP

$y=\arcsin\frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad y'=$ ☐

$y=\arccos\frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad y'=$ ☐

$y=\frac{1}{3}\arctan\frac{x}{3} \quad \rightarrow \quad y'=$ ☐

Check Reset

4	$\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}$	5	$-\frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}$	6	$\frac{3}{1+x^2}$
7	$\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$	8	$-\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$	9	$\frac{1}{9+x^2}$