→ スマホ版は別頁

■ 2次関数

○　軸，頂点，凹凸

(1)　2次関数 $y = ax^2$　(ただし，$a \neq 0$)　のグラフは，
　i)　$a > 0$　のとき，右図1のように下に凸（谷形）のグラフになる．
　ii)　$a < 0$　のとき，右図2のように上に凸（山形）のグラフになる．

図1

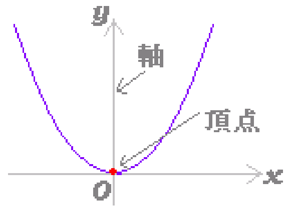
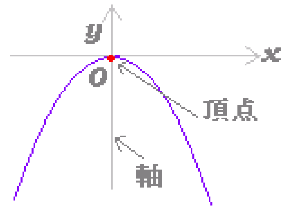


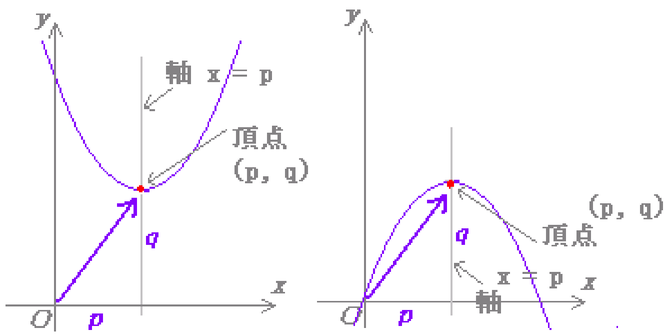
図2



(2)　2次関数 $y = a(x-p)^2 + q$　(ただし，$a \neq 0$)　のグラフは，右図3のように，$y = ax^2$ のグラフをx 軸の正の向きにp，y 軸の正の向きにq だけ平行移動したものになる．

　このとき，頂点の座標は　$(p,\ q)$
　軸の方程式は　$x = p$　となる．

図3

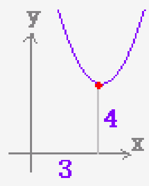


※　（補足説明）
・$y = a(x-p)^2 + q$　のグラフの形（上に凸か，下に凸かなど）は aの値だけで決まる．
・p，q　の値は平行移動だけに関係する．

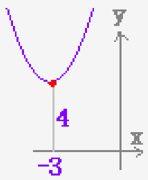
・p，q　の符号に注意すること．右の例をみよ．

・　$a > 0$　のとき，下に凸（谷型）
・　$a < 0$　のとき，上に凸（山型）

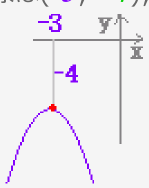
例　$y = 2(x-3)^2 + 4$　のグラフは　$y = 2x^2$のグラフをx 軸の正の向きに3，yの正の向きに4だけ平行移動したもの．頂点の座標は$(3,\ 4)$，軸の方程式は$x = 3$



例　$y = 2(x + 3)^2 + 4$　のグラフは　$y = 2x^2$のグラフを　x 軸の正の向きに-3，y 軸の正の向きに4だけ平行移動したもの．頂点の座標は$(-3,\ 4)$，軸の方程式は$x = -3$



例　$y = -2(x + 3)^2 - 4$　のグラフは　$y = -2x^2$のグラフを　x 軸の正の向きに-3，y 軸の正の向きに-4だけ平行移動したもの．頂点の座標は$(-3,\ -4)$，軸の方程式は$x = -3$



・２次関数のグラフの頂点は，関数の形を

$$y = a(x-p)^2 + q$$

の形にしたときに分かる．この形を標準形 (平方完成形) という．

$$y = ax^2 + bx + c$$

の形（展開形，一般形）のままでは，頂点の座標は分からない．

■即答問題■

◇空欄を埋めよ◇　（※以下空欄書き込み問題では，必ず

◇正しい方を選べ◇

(1)　$y = 2x^2$のグラフは　･･･→[　上に凸，下に凸　]

(2)　$y =-2x^2$のグラフは　･･･→[　上に凸，下に凸　]

「半角数字」「1バイト文字の数字」を書き込むこと)

(3)　$y = 5(x-2)^2 +6$　のグラフは　$y =$ [　] x^2のグラフを　x 軸の正の向きに[　]，y 軸の正の向きに[　]だけ平行移動したもので，頂点の座標は([　]，[　])，軸の方程式は$x =$ [　]

Check　Reset

○　平方完成

2次式 $ax^2 + bx + c$　を平方完成するには，

i) まずx^2 の係数でくくる　･･･　定数項は後回しにして（あとで定数が出てくるので，最後に調整する方が有利）

ii) 次にxの係数の半分を持ってくる

例

$3x^2 + 6x + 5 = 3(x^2 + 2x) + 5$　　･･･i)

$=3(x^2 + 2x + 1-1) + 5$　　･･･ii)

$= 3\{(x+ 1)^2-1\} + 5$

$=3(x + 1)^2-3 + 5 = 3(x + 1)^2 + 2$

※　一般に，次のように変形することができるが，この「結果」を覚える必要はなく，右図に示した「**変形方法**」を身につけるとよい．

$$ax^2+bx+c= \cdots =a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4bc}{4a}$$

[要点]

$$x^2+\square x=\left(x+\frac{\square}{2}\right)^2-\left(\frac{\square}{2}\right)^2$$

半分　　２乗

※　初歩的な注意：次のようにx の係数が負のときも，「2乗の部分は常に引き算」となる．

x^2-6x = $x^2-6x + 9 - 9$ = $(x-3)^2 - 9$

例題１　次の式を平方完成せよ．

(1)　$3x^2-12x + 13$

(与式)$=3(x^2-4x) + 13 =3\{ (x-2)^2 - 4 \} + 13$

$= 3(x-2)^2-12 + 13 = 3(x-2)^2 + 1$　･･･(答)

(2)　$2x^2 + 6x-5$

(与式) $= 2(x^2 + 3x)-5 =2\{ (x + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} \}-5$

$= 2(x + \frac{3}{2})^2- \frac{9}{2}-5 = 2(x + \frac{3}{2})^2- \frac{19}{2}$･･･(答)

例題２　次の２次関数の頂点の座標を求めよ．

(1)　$y = x^2-6x + 10$

$y = (x-3)^2-9 + 10 =$　$(x-3)^2 + 1$

頂点の座標は $(3,\ 1)$ ･･･(答)

(2)　$y = -2x^2 + 8x + 3$

$y =-2(x^2-4x) + 3 =-2\{ (x-2)^2-4 \} + 3$

$=-2 (x-2)^2 + 8 + 3 =-2 (x-2)^2 + 11$･･･(答)

○　最大値・最小値

(1)　x の値の範囲が全実数（$-\infty < x < \infty$）のとき

i)　**a＞0のとき**，２次関数 $y = a(x-p)^2 + q$　のグラフは，右図4のように下に凸（谷形）のグラフで，頂点の座標は$(p,\ q)$　だから，

$x=p$ のとき最小値 q をとり，最大値はない．

ii)　**a＜0のとき**，２次関数 $y = a(x-p)^2 + q$　のグラフは，右図5のように上に凸（山形）のグラフで，頂点の座標は$(p,\ q)$　だから，

$x=p$ のとき最大値 q をとり，最小値はない．

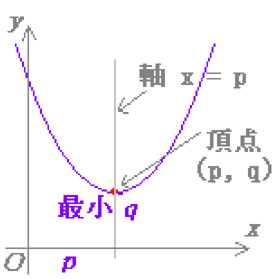
図4


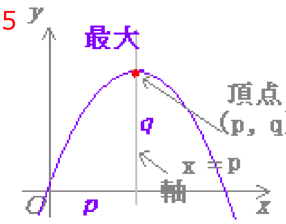
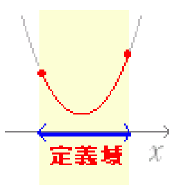
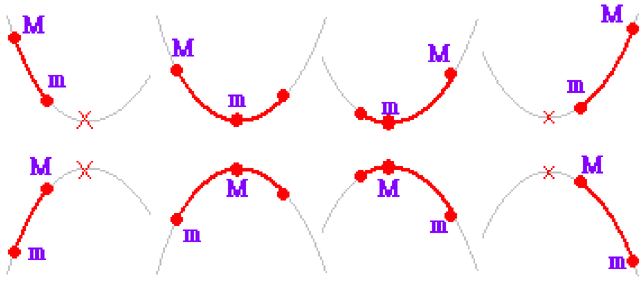
図5


図6


(2) xの定義域（値の範囲）に制限があるとき

右図6のように，２次関数 $y = a(x-p)^2 + q$ のグラフを描き，「左端」「右端」「頂点」のｙ座標を比較して，最大値・最小値を判断する．（定義域が閉区間（両端の値が含まれる）のとき，２次関数の最大値，最小値は，いずれも存在する．）

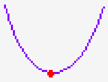
※ 初歩的な注意として，頂点が定義域の外にあるとき，頂点の値を含めないように気をつけること．



例題3 次の２次関数の最大値，最小値を求めよ．

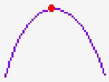
(1) $y = 3(x-1)^2 + 5$

グラフは下に凸で，頂点の座標は$(1,\ 5)$ だから
最大値なし
最小値5（$x=1$のとき）



(2) $y = -4(x-2)^2-6$

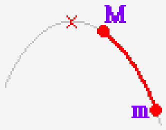
グラフは上に凸で，頂点の座標は$(2,\ -6)$ だから
最大値-6（$x=2$のとき）
最小値なし



(3) $y = -x^2 + 2x + 3\ (2 \leqq x \leqq 3)$

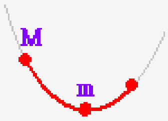
$y = -(x^2-2x) + 3 = -\{ (x-1)^2-1 \} + 3$
$= -(x-1)^2 + 4$

最大値3 ($x=2$ のとき)
最小値0 （$x=3$ のとき）



(4) $y = x^2-5x + 4\ (0 \leqq x \leqq 3)$

$y = (x^2-5x) + 4 = (x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}$
最大値4 ($x=0$ のとき)
最小値$-\frac{9}{4}$ （$x=\frac{5}{2}$ のとき）



■即答問題■

次の２次関数の最大値，最小値を求めよ．

(1) $y = 2(x + 1)^2 + 4$

最大値 なし
最小値 ($x=$ のとき)
Check Reset

(2) $y = -(x-3)^2 + 4$

最大値 ($x=$ のとき)
最大値 なし
Check Reset

(3) $y = 2x^2-4x + 1\ (-3 \leqq x \leqq 0)$

最大値 ($x=$ のとき)
最小値 ($x=$ のとき)
Check Reset

(4) $y = -3x^2 + 12x-12\ (1 \leqq x \leqq 4)$

最大値 ($x=$ のとき)
最小値 ($x=$ のとき)
Check Reset