→ スマホ版は別頁

== 対数関数(2) ==

○逆関数のグラフ

例1

$y=2x+1$ ･･･(1)を x について解くと，

$x=\dfrac{y-1}{2}$ ･･･(2)

x，y を入れ替えると

$y=\dfrac{x-1}{2}$ ･･･(3)

このとき，(3)を(1)の逆関数という．

例2

$y=e^x$ ･･･(1)を x について解くと，

$x=\log_e y$ ･･･(2)

x，y を入れ替えると

$y=\log_e x$ ･･･(3)

このとき，(3)を(1)の逆関数という．

一般に，

$y=f(x)$ ･･･(1)を x について解いたものを

$x=f^{-1}(y)$ ･･･(2)と書く．

x，y を入れ替えると

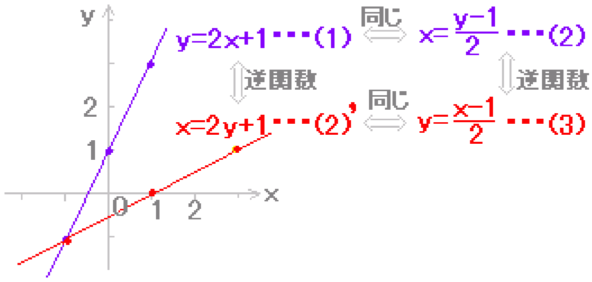
$y=f^{-1}(x)$ ･･･(3)

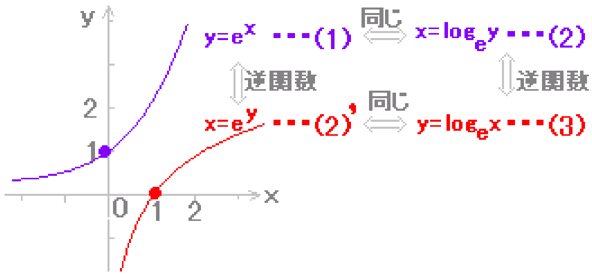
このとき，(3)を(1)の逆関数という．

(1)と(2)は同じものであるが(2)と(3)は逆関数

(1)と(2)'は逆関数であるが(2)'と(3)は同じもの

（どちらが先でもよい）





※$y=f(x)$ を変形して $x=f^{-1}(y)$ にしたら逆関数になるわけではない．上の(1)(2)は同じもの（いつでも元に戻せる．）

x，y を入れ替えたときに対応関係が逆になる．（当然のこと）

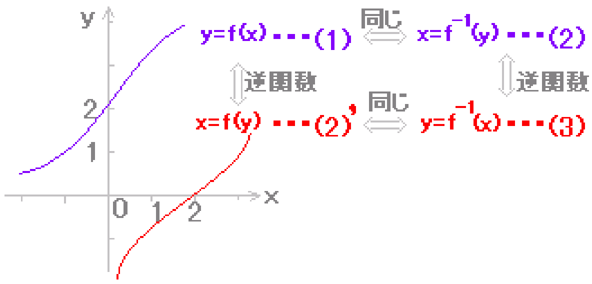
※x，y を入れ替えると縦と横が入れ替わるので，$y=x$ の直線に関して対称移動したものになる．

○逆関数の性質

ある関数 $y=f(x)$ と，その逆関数 $y=f^{-1}(x)$ とでは

(1)グラフは$y=x$ の直線に関して対称になる．

(2)定義域と値域が入れ替わる．



(1)(2)は同じものなので

$y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ $(\alpha\leqq y\leqq\beta)$･･･(1)のとき

$x=f^{-1}(y)$ $(a\leqq x\leqq b)$ $(\alpha\leqq y\leqq\beta)$･･･(2)

x，y を入れ替えると

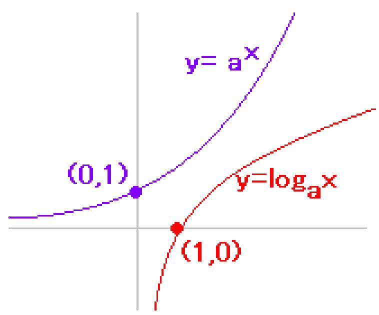
$y=f^{-1}(x)$ $(a\leqq y\leqq b)$ $(\alpha\leqq x\leqq\beta)$･･･(3)

○対数関数のグラフ

対数関数 $y=\log_a x$ は，指数関数 $y=a^x$ の逆関数となっているので，各々のグラフは$y=x$ の直線に関して対称となっている．

また，$y=a^x(-\infty<x<\infty)(0<y<\infty)$の定義域と値域を入れ替えると，$y=\log_a x(0<x<\infty)(-\infty<y<\infty)$

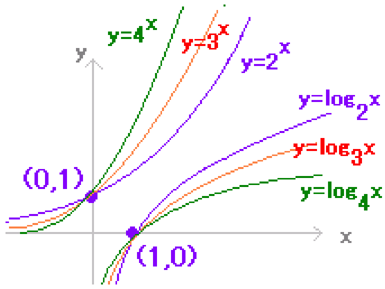
特に，$y=a^x$ がつねに$(0,\ 1)$ を通るのに対応して，$y=\log_a x$ はつねに$(1,\ 0)$ を通る．



［重要］

$y=a^x$ の値域は$y>0$ → $y=\log_a x$の定義域は$x>0$

指数関数とその逆関数となっている対数関数のグラフを２，３示すと右図のとおり．



○対数関数の微分

底が e（自然対数の底 $2.71828\cdots$）の対数は，自然対数と呼ばれ，底を省略してよい． $\log x$ は $\log_e x$ を表わす．

[要点]
$y=\log x$（底は e）$\rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$

（証明）
$y=\log x$ のとき，

$$y'=\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log\frac{x+h}{x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\frac{1}{x}\overset{(2)}{=}\frac{1}{x}$$

（$y=\log_a x$ の微分は，底の変換をすれば上の公式でできる．）

［指数関数，対数関数の微分に使う重要な極限値］
次の3つの極限は，互いに同値であることが知られている．（証明略）

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$

例と答
次の関数を微分せよ．（各々の定義域は真数が正の数となる区間とする．）

(1) $y=\log 3x\rightarrow y=\log 3+\log x\rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$

（別解）
$t=3x$ とおくと
$y=\log t$
$t=3x$

合成関数微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times 3=\frac{1}{3x}\times 3=\frac{1}{x}$$

(2) $y=\log_{10}x\rightarrow y=\dfrac{\log x}{\log 10}\rightarrow y'=\dfrac{1}{x\log 10}$

(3) $y=\log(x^2+x+1)$
$y=\log t$
$t=x^2+x+1$

合成関数微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times(2x+1)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

(4) $y=\log|x|$
ア) $x>0$ のとき，$y'=\dfrac{1}{x}$

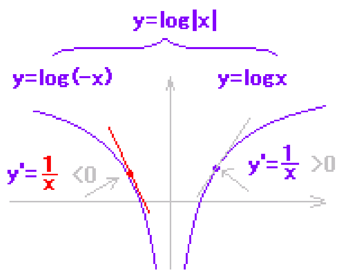
イ) $x<0$ のとき，$y=\log(-x)$
$y=\log t$
$t=-x$

合成関数微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{t}\times(-1)=\frac{1}{-x}\times(-1)=\frac{1}{x}$$

以上から，$y=\log|x|\rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$

ただし，グラフは次のようになっている．



■短答問題■
次の関数を微分せよ．（各々の定義域は真数が正の数となる区間とする．）

(4) $y=(\log x)^2$

(1) $y = \log(2x+3)$

$\dfrac{\square}{\square x + \square}$

(2) $y = \log_2 x$ $\quad y' = \dfrac{\square}{x \log \square}$

(3) $y = x \log x$

$\log x + \square$

Check Reset

$\dfrac{\square \log x}{x}$

(5) $y = \log \dfrac{x}{1-x}$ $(0 < x < 1)$

$\dfrac{\square}{x(\square - x)}$

Check Reset