→ スマホ版は別頁

## == 部分積分法 ==

### ○　はじめに

　この単元では，積の微分法の逆計算を考えることにより，不定積分の計算を式の形を変えて行うことを学ぶ．

　以下，見やすくするために $f(x)$ ， $g(x)$ を $f$， $g$ で表わすと，積の微分法の公式は，次のとおりであった．

$$(fg)'=f'g+fg'$$

　この式の両辺を $x$ で積分すると，

$$fg=\int f'g\,dx+\int fg'\,dx$$

移項すると，

$$\int fg'\,dx=fg-\int f'g\,dx$$

これを「部分積分法」の公式という．

例1

$$\int x\sin x\,dx$$

------

$x$ を微分すると $1$ になる（次数が下がる）ことに着目する．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 微分する側 | $f(x)=x$ | → | $f'(x)=1$ |
| 積分する側 | $g(x)=-\cos x$ | ← | $g'(x)=\sin x$ |

------

$$\int x\sin x\,dx=-x\cos x+\int\cos x\,dx$$

　　　この右辺の形ならば，積分計算が簡単にできる．

（右辺） $=-x\cos x+\sin x+C$

※　一般に，整式を微分すると次数が下がる（計算しやすくなる）ので，(整式)×(他の関数) の形の積分は，整式の方を微分する側： $f(x)$ に選ぶと，計算が簡単になることが多い．

例2

$$\int e^x\sin x\,dx$$

------

　$e^x$ や $\sin x$ は，何回微分しても消えないが， $I=\dots-I$ のように同じ式が再度登場すれば，方程式と考えて解ける．

　同じ式が登場するまで，２回以上部分積分法を使う．このとき，１つの関数（例えば $\sin x$ ）は，微分する側ばかりに選ぶことが重要．途中で入れ替わると（微分してから積分するなど）何も残らないので注意．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 微分する側 | $f(x)=e^x$ | → | $f'(x)=e^x$ |
| 積分する側 | $g(x)=-\cos x$ | ← | $g'(x)=\sin x$ |

------

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+\int e^x\cos x\,dx$$

　第2項について，もう一度，部分積分法を実行する．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 微分する側 | $p(x)=e^x$ | → | $p'(x)=e^x$ |
| 積分する側 | $q(x)=\sin x$ | ← | $q'(x)=\cos x$ |

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$$

代入すると，

$$\int e^x\sin x\,dx=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx$$

ここで， $I=\int e^x\sin x\,dx$ 　とおくと，

$I=-e^x\cos x+e^x\sin x-I$ 　･･･（※　この式では $I$ は任意定数を含めた式とする．）

$$2I=-e^x\cos x+e^x\sin x$$

$I=\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$ 　･･･（※により $+C$ が付く．）

（別解）

| | | | |
|---|---|---|---|
| 微分する側 | $f(x)=\sin x$ | → | $f'(x)=\cos x$ |
| 積分する側 | $g(x)=e^x$ | ← | $g'(x)=e^x$ |

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

　第2項について，もう一度，部分積分法を実行する．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 微分する側 | $p(x)=\cos x$ | → | $p'(x)=-\sin x$ |
| 積分する側 | $q(x)=e^x$ | ← | $q'(x)=e^x$ |

$$\int e^x\cos x\,dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx$$

代入すると，

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\left(e^x\cos x+\int e^x\sin x\,dx\right)$$

ここで， $I=\int e^x\sin x\,dx$ 　とおくと，

$$I=e^x\sin x-e^x\cos x-I$$

$$2I=e^x\sin x-e^x\cos x$$

$$I=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$$

（ダメな例）

$$\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-\int e^x\cos x\,dx$$

$$=e^x\sin x-\left(e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx\right)=0+\int e^x\sin x\,dx$$

例3

例4

部分積分法で計算するには，$f(x)$，$g(x)$ のうち，不定積分が容易に求まらない方は，微分する側に選ぶほかない．
特に，対数関数 $\log x$ は，（整式との積になっていても），微分する側に選ぶとできることが多い．

$$\int x \log x \, dx$$

------

$\log x$ を微分する側に選ぶ．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 微分する側 | $f(x)=\log x$ | → | $f'(x)=\frac{1}{x}$ |
| 積分する側 | $g(x)=\frac{x^2}{2}$ | ← | $g'(x)=x$ |

------

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x}{2}dx = \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}+C$$

次のように，1 との積に分けるとできるものがある．

$$\int \log x \, dx = \int 1\cdot\log x \, dx$$

------

$\log x$ を微分する側に選ぶ．

| | | | |
|---|---|---|---|
| 微分する側 | $f(x)=\log x$ | → | $f'(x)=\frac{1}{x}$ |
| 積分する側 | $g(x)=x$ | ← | $g'(x)=1$ |

------

$$\int \log x \, dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + C$$

**短答問題**

次の関数の不定積分を求めよ．［半角数字(=1バイト文字)を書き込む］（計算用紙：必要）

(1) $\int x e^{2x}\,dx = \cdots = \dfrac{e^{2x}(\square x - \square)}{\square}+C$

Check Reset Help

(2) $\int e^{x}\cos 2x\,dx = \cdots = \dfrac{e^{x}(\square\sin 2x + \cos 2x)}{\square}+C$

Check Reset Help

(3) $\int x^3 \log x\,dx = \cdots = \dfrac{x^{\square}(\square\log x - 1)}{\square}+C$

Check Reset Help