

== 置換積分法 ==

○ はじめに

変数を置き換えて、積分計算を行う方法を置換積分法という。置換積分法は、合成関数の微分法の逆の計算となっている。

【要点】

右の例のように

(1) 被積分関数

(2) dx

の各々を新しい変数を用いて、元の式と等しい式に置き換える。

(3) 結果は元の変数 x で表わす。

※ 積分記号 $\int f(x) dx$ の中に書かれる $f(x)$ を被積分関数という。

例と答

(1) $\int e^{3x} dx$

 $3x=t$ とおくと、
 被積分関数は、 $e^{3x}=e^t$

$$\frac{dt}{dx}=3 \text{ だから } dx=\frac{dt}{3}$$

 $\int e^{3x} dx = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{e^t}{3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$

(2) $\int \sin 3x dx$

 $3x=t$ とおくと、
 被積分関数は、 $\sin 3x = \sin t$

$$\frac{dt}{dx}=3 \text{ だから } dx=\frac{dt}{3}$$

 $\int \sin 3x dx = \int \sin t \frac{dt}{3} = \frac{-\cos t}{3} + C = \frac{-\cos 3x}{3} + C$

(*) 一般に、 $\int f(x) dx = F(x) + C$ のとき、

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

が成り立つ。(ただし、 $a \neq 0$)

例

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$\int \sin(ax+b) dx = \frac{1}{a} \{-\cos(ax+b)\} + C$$

※ $\cos(ax+b)$, $\tan(ax+b)$ も同様。

例

$$\int (2x+1)^3 dx$$

 $2x+1=t$ とおくと、
 被積分関数は、 $(2x+1)^3 = t^3$

$$\frac{dt}{dx}=2 \text{ だから } dx=\frac{dt}{2}$$

 $\int (2x+1)^3 dx = \int t^3 \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^3 dt = \frac{t^4}{8} + C$
 $= \frac{(2x+1)^4}{8} + C$

(3) $\int \sin^3 x \cos x dx$

 $\sin x=t$ とおくと、
 $\sin^3 x = t^3$

※ $\cos x$ は保留にしておく。

$$\frac{dt}{dx} = \cos x \text{ だから } dx = \frac{dt}{\cos x}$$

 $\int \sin^3 x \cos x dx = \int t^3 \cos x \frac{dt}{\cos x}$

※ $\cos x$ は約分で消える。

$$= \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{\sin^4 x}{4} + C$$

(4) $\int \frac{2x}{x^2+1} dx$

 $x^2+1=t$ とおくと、

※ $2x$ は保留にしておく。

$$\frac{dt}{dx} = 2x \text{ だから } dx = \frac{dt}{2x}$$

 $\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \int \frac{2x}{t} \frac{dt}{2x}$

※ $2x$ は約分で消える。

$$= \int \frac{dt}{t} = \log |t| + C = \log(x^2+1) + C$$

($x^2+1 > 0$ だから、絶対値記号は不要)

(*) 一般に、分子が分母の微分となっているとき、

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$$

が成り立つ.

例

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \log |\sin x| + C$$

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \log (e^x + 1) + C$$

短答問題

次の不定積分を計算して空欄を埋めよ。[半角数字(=1バイト文字)を記入] (別途, 計算用紙が必要)

(1) $\int (4x-5)^6 dx = \dots = \frac{(\square x - \square)^{\square}}{\square} + C$

Check Reset Help

(2) $\int \frac{dx}{(3x+2)^4} = \dots = -\frac{1}{\square (\square x + \square)^{\square}} + C$

Check Reset Help

(3) $\int \cos(2x+3) dx = \dots = \frac{\sin(\square x + \square)}{\square} + C$

Check Reset Help

(4) $\int \tan(2x+\pi) dx = \dots = -\frac{1}{\square} \log |\cos(2x+\pi)| + C$

Check Reset Help

(5) (計算: やや長い) $\int x \sqrt{x+1} dx = \dots = \frac{\square (x+1)^{\square} \sqrt{x+1} (\square x - \square)}{\square} + C$

Check Reset Help

(6) $\int \frac{\log x}{x} dx = \dots = \frac{(\log x)^{\square}}{\square} + C$

Check Reset Help

(7) $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}} dx = \dots = \frac{1}{\square} \log(e^{2x}+e^{-2x})+C$

Check Reset Help

(8) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4} dx = \dots = \log(x^2+\square x+\square)+C$

Check Reset Help