→ スマホ版は別頁

== 指数関数(1) ==

○　負の指数，分数指数の定義

$a \neq 0$ とする．（分母が 0 とならないようにするため）

(1)　$a^0=1$

(2)　n を正の整数とするとき，　$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

(3)　m, n を正の整数とするとき，　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(*)　「負の分数」が指数であるときは，上記(2)(3)の組合わせによる．

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

(要約すると)

負の指数　→　分数
分数の指数　→　累乗根

となるが，次のような混乱が多いので注意

分数の指数が，分数になるということではない

$$a^{\frac{1}{n}} \rightarrow \times \leftarrow \frac{1}{a^n}$$

負の指数が，分数の指数に等しいということではない

$$a^{-n} \rightarrow \times \leftarrow a^{\frac{1}{n}}$$

例1

(1)　$2^0=1$　，$3^0=1$

(2)　$2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$　，$3^{-2}=\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{1}{9}$

(3)　$4^{\frac{1}{2}}=\sqrt[2]{4}=2$，$5^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{5^3}$

（なお，通常，２乗根の記号は $\sqrt[2]{a}$ の代わりに $\sqrt{a}$ と書く）

n 乗根の記号 $\sqrt[n]{a}$ は n が省略されたら，0でもなく，1でもなく，2の略（←数学では珍しい）

説明

(1) 指数法則 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ が成り立つように，指数0を定義する：

$m=n=3$ のときを例にとって解説：

［指数法則からは］　$a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

［意味からは］　$\dfrac{a^3}{a^3}=1$

そこで　$a^0=1$ と定義すれば指数法則が常に成り立つようにできる．

(2)　指数法則 $a^m \div a^n = a^{m-n}$ が成り立つように，負の指数を定義する：

$m=2,\ n=5$ のときを例にとって解説：

［指数法則からは］　$a^2 \div a^5 = a^{2-5} = a^{-3}$

［意味からは］　$\dfrac{a^2}{a^5} = \dfrac{1}{a^3}$

そこで　$a^{-3}=\dfrac{1}{a^3}$ と定義すれば指数法則が常に成り立つようにできる．

(3)　指数法則 $(a^m)^n = a^{mn}$ が成り立つように，分数の指数を定義する：

$m=4,\ n=3$ のときを例にとって解説：

［指数法則からは］$(a^x)^3=a^{3x}=a^4$ のとき $x=\dfrac{4}{3}$

［意味からは］　$(\sqrt[3]{a})^3=a^4$

そこで　$a^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{a^4}$ と定義すれば指数法則が常に成り立つようにできる．

■即答問題■

(1)　次の値を求めよ．
（半角数字で答えること）

- $4^{-2}=\dfrac{1}{\square}$
- $10^{-1}=\dfrac{1}{\square}$
- $5^0=\square$

Check　Reset

(2)　次の値を累乗根の形で表せ．
（半角数字を書き込むこと）

- $7^{\frac{2}{3}}=\sqrt[\square]{7^{\square}}$
- $3^{\frac{5}{4}}=\sqrt[\square]{3^{\square}}$
- $10^{\frac{1}{5}}=\sqrt[\square]{10}$

Check　Reset

○　指数法則と指数計算

○　p, q を有理数（正負の整数や分数）とするとき，次の**指数法則**が成り立つ．（証明略）

(1)　$a^p a^q = a^{p+q}$　　(2)　$a^p \div a^q = a^{p-q}$

(3)　$(a^p)^q = a^{pq}$

(4)　$(ab)^p = a^p b^p$　　(5)　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^p = \dfrac{a^p}{b^p}$

指数計算を行うには，右の例のように，途中経過は「負の指数」や「分数の指数」を用いて機械的に行うとよい．

高校では，指数の意味が分かっているかどうかを確かめるために，最終形を「分数」や「累乗根」の形で答えることが多いが，以下の問題では，最終形も「負の指数」や「分数の指数」で答えてよい．

例2

- $a^7 \div a^{-3} \times a^2 = a^{7-3-2} = a^2$
- $(ab^2)^{-1} \div (a^{-2}b)^2 = (a^{-1}b^{-2}) \div (a^{-4}b^2)$
  $= a^{-1+4}b^{-2-2} = a^3 b^{-4}$

数値計算では，素因数分解して表わすとよい．

- $6^8 \times 12^{-2} \div 18^3 = (2\times 3)^8 \div (2^2\times 3)^{-2} \times (2\times 3^2)^3$
  $= 2^{8-4-3} \times 3^{8-2-6} = 2\times 3^0 = 2$

累乗根を分数指数で表わすと，累乗根の掛け算・割り算は，指数の分数の足し算・引き算になる．

- $\sqrt[3]{a^2} \div \sqrt[4]{a^3} \times \sqrt{a}$
  $= a^{\frac{2}{3}} \div a^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{2}}$
  $= a^{\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}}$
  $= a^{\frac{5}{12}}$

■即答問題■

(1)　次の値を求めよ．
（半角数字を書き込むこと）

- $2^{-3} \times 2^4 \div 2^{-2} = 2^{-3+4-(-2)} = 2^{\square} = \square$
- $(4^2)^{-1} \times 4^{-1} \times (4^{-1})^{-3} = 4^{-2-1+3} = 4^{\square} = \square$
- $27^3 \div 81^{-2} \times 9^{-8}$
  $= (3^3)^3 \div (3^4)^{-2} \times (3^2)^{-8} = 3^{9-(-8)+(-16)}$
  $= 3^{\square} = \square$

Check　Reset

(2)　次の計算をせよ．

- $\sqrt[3]{a^4} \times \sqrt[6]{a^5} \div \sqrt{a} = a^{\frac{4}{3}} \times a^{\frac{5}{6}} \div a^{\frac{1}{2}}$
  $= a^{\frac{4}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{\square}{\square}}$
- $\sqrt[4]{3^2} \div \sqrt[4]{3^3} \div \sqrt[8]{3^{-2}}$
  $= 3^{\frac{2}{4}} \div 3^{\frac{3}{4}} \div 3^{-\frac{2}{8}}$
  $= 3^{\frac{2}{4}-\frac{3}{4}-\left(-\frac{2}{8}\right)}$
  $= 3^{\square} = \square$
- $a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{2}} \times \left(a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}$
  $= a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{3}{2}} \times a^{-\frac{1}{6}}b^{\frac{1}{4}}$
  $= a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}b^{-\frac{3}{2}+\frac{1}{4}} = a^{\frac{\square}{\square}}b^{-\frac{\square}{\square}}$

Check　Reset