→ スマホ版は別頁

== 増減表，極値 ==

○　増減表とは

右図1のようなグラフを書くときは，あらかじめ次のような増減表を作り，これに基づいてグラフを描く．

増減表は，グラフの要約となっており，増減表ができればグラフの概形（だいたいの形）は容易に描ける．

表１

x		1		2	
y'	＋	0	−	0	＋
y	↗	5	↘	4	↗

○　増減表の作り方

y' は接線の傾きを表わすので，$y'>0$ ならば y は増加，$y'<0$ ならば y は減少となる．

(1)　微分して y' を求める．
(2)　$y'=0$ となる x の値を求める．
(3)　x の値，y' の符号，y の値と矢印
　からなる３行の表を作る．
　表は左から右，上から下へ見るものとする．
(4)　(2)で求めた x の値を区切り目に入れる．
(5)　y' の符号を書き込み，$y'>0$ ならば y は増加（上向き矢印），$y'<0$ ならば y は減少（下向き矢印）とする．

(1)　y' の符号が増加から減少に「変化する」ところは極大であるといい，そのときの y の値を極大値という．

x		a	
y'	+	0	−
y	↗	極大	↘

(2)　y' 符号が減少から増加に「変化する」ところは極小であるといい，そのときの y の値を極小値という．

x		a	
y'	−	0	+
y	↘	極小	↗

(3)　$y'=0$ であっても，y' の符号が正から0を通って正に戻るような場合（y' 符号が変化していないところは）極値ではない．

x		a	
y'	+	0	+
y	↗		↗

(4)　絶対値付の関数のように「折れ目」「角点」のある関数では，y' が定義されない x の値が存在する場合がある．この場合でも，y' の符号が変化していればその点は極値（極大値と極小値を合わせて極値という）となる．

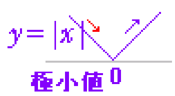
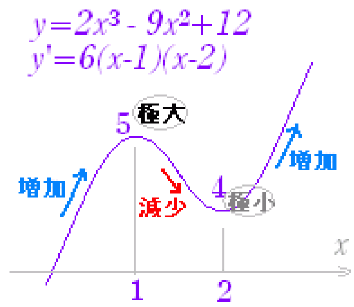
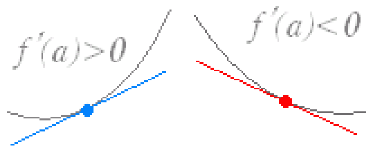


図1



y' は接線の傾きを表わす．



(5)　y' の符号の簡単な求め方

A）　簡単な値を実際に代入する方法

上の表１において，
$x<1$ のときの y' の符号を求めるには，
$y'=6(x-1)(x-2)$ に，例えば $x=0$ を代入するとよい．
$x=0$ のとき，$y'=6\times(-1)\times(-2)=12>0$

$1<x<2$ のときの y' の符号を求めるには，
$y'=6(x-1)(x-2)$ に，例えば $x=1.5$ を代入するとよい．
$x=1.5$ のとき，$y'=6\times0.5\times(-0.5)<0$

B）　最高次の項の係数を見る方法

上の表１において，
$y'=6(x-1)(x-2)$ は2次式で最高次の項の係数は正
y' の符号を右端を+として，順次符号を変えて埋めていく．（右から，+0-0+）

y' が重解を持つときは，その重なりに応じて2重ならば2回変化（=変化なし），3重ならば3回変化（＝１回変化）とする．

例と答

(1) $y=3x^3-9x^2$ の増減を調べて極値を求めよ．

（答案）
$y'=9x^2-18x=9x(x-2)$
$y'=0$ となる x の値は，$x=0\,,\,2$

x		0		2	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	極大値 0	↘	極小値 -12	↗

$x=0$ のとき，極大値 $y=0$ をとる．
$x=2$ のとき，極小値 $y=-12$ をとる．

(2) $y=-x^4+2x^2$ の増減を調べて極値を求めよ．

（答案）
$y'=-4x^3+4x=-4(x+1)x(x-1)$
$y'=0$ となる x の値は，$x=-1\,,\,0\,,\,1$

x		-1		0		1	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↗	極大値 1	↘	極小値 0	↗	極大値 1	↘

$x=-1\,,\,1$ のとき，極大値 $y=1$ をとる．
$x=0$ のとき，極小値 $y=0$ をとる．

(3) $y=x^4-4x^3$ の増減を調べて極値を求めよ．

（答案）
$y'=4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$
$y'=0$ となる x の値は，$x=0$ （重解），3

x		0		3	
y'	$-$	0	$-$	0	$+$
y	↘	0	↘	極小値 -27	↗

極大値 なし．
$x=3$ のとき，極小値 $y=-27$ をとる．

(4) $y=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{5}x^5+\frac{x^4}{4}$ の増減を調べて極値を求めよ．

（答案）
$y'=x^5-2x^4+x^3=x^3(x-1)^2$
$y'=0$ となる x の値は，$x=0$ （三重解），1 （重解）

x		0		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	↘	0	↗	$\frac{1}{60}$	↗

極大値 なし．
$x=0$ のとき，極小値 $y=0$ をとる．

(5) $y=x\,\log x$ 増減を調べて極値を求めよ．

（答案）
$y'=1\cdot\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$
$y'=0$ となる x の値は，$x=\frac{1}{e}$

x	0		$\frac{1}{e}$	
y'	×	$-$	0	$+$
y	×	↘	極小値 $-\frac{1}{e}$	↗

極大値 なし．
$x=\frac{1}{e}$ のとき，極小値 $y=-\frac{1}{e}$ をとる．

(6) $y=xe^x$ の増減を調べて極値を求めよ．

（答案）
$y'=e^x+xe^x=e^x(1+x)$
e^x はつねに正．$y'=0$ となる x の値は $x=-1$

x		-1	
y'	$-$	0	$+$
y	↘	極小値 $-\frac{1}{e}$	↗

極大値 なし．
$x=-1$ のとき，極小値 $y=-\frac{1}{e}$ をとる．

■即答問題■

次の各関数の増減表を作れ．（計算用紙：必要）

（はじめに，解答箇所 ? を選び，次にその箇所に入る数値や記号を右から選べ．合っていれば確定し，間違っていれば元に戻るので，正誤が分かるようになっている．）

-3　-2　-1　1　2　3
$+$　$-$　0　↗　↘

(1) $y=x^3-3x$

x		?		?	
y'	?	?	?	?	?
y	?	?	?	?	?

(2) $y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}$

x		?		?	
y'	?	?	?	?	?
y	?	?	?	?	?

-1 $-\frac{7}{12}$ $-\frac{1}{12}$ $\frac{1}{12}$ $\frac{7}{12}$ 1

$+$ $-$ 0 ↗ ↘

(3) $y=e^{x^2+2x}$

x		?	
y'	?	?	?
y	?	?	?

-2 -1 1 2 e $\frac{1}{e}$

$+$ $-$ 0 ↗ ↘

(4) $y=\log(x^2+1)$

x		?	
y'	?	?	?
y	?	?	?

-2 -1 1 2 e $\frac{1}{e}$

$+$ $-$ 0 ↗ ↘