

=積の微分法, 商の微分法, 合成関数, 逆関数の微分法=

○ **はじめに**

このページでは, 個々の関数の微分が分かるときに, それらの関数の積, 商, 合成関数, 逆関数で表わされる関数の微分を求める方法を学ぶ。

○ **積の微分法**

関数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ の導関数が分かっているとき, これらの関数の積 $y=f(x)g(x)$ の導関数を $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ で表わす公式を求める。

◇積の微分法の公式◇

$$y = f(x)g(x) \rightarrow y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

◇これを用いれば3個の積についても, 公式を作ることができる。

$$y = fgh \rightarrow y' = f'gh + fg'h + fgh'$$

$$\begin{aligned} (\because (fgh)' &= (fg)'h + (fg)h' = (f'g + fg')h + (fg)h' \\ &= f'gh + fg'h + fgh' \end{aligned}$$

例と答

(1) $y=x$ の微分は $y'=1$, $y=x^2$ の微分は $y'=2x$ であるから, $y=x \cdot x^2$ すなわち $y=x^3$ の微分は $y'=1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = x^2 + 2x^2 = 3x^2$

(2) $y=x$ の微分は $y'=1$, $y=x^3$ の微分は $y'=3x^2$ であるから, $y=x \cdot x^3$ すなわち $y=x^4$ の微分は $y'=1 \cdot x^3 + x \cdot 3x^2 = x^3 + 3x^3 = 4x^3$

(*) 一般に, $1 \leq k \leq n$ となる整数 k について, $y=x^k$ について $y'=kx^{k-1}$ が成り立つならば, $y=x^{k+1}$ の微分は $y'=(x \cdot x^k)' = 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1} = x^k + kx^k = (k+1)x^k$ となるから, すべての正の整数 n について, $(x^n)' = nx^{n-1}$ … [重要公式]

の別の証明が得られたことになる。(前のページで示した証明は, 二項展開を用いる証明)

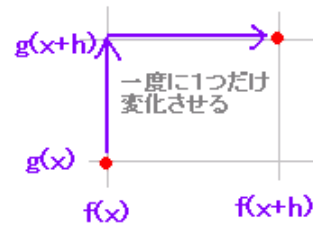
(必要となる場面)

(1) $y=x+1$ の微分は $y'=1$, $y=x^2+1$ の微分は $y'=2x$ … それでは, $y=(x+1)(x^2+1)$ の微分は?

(2) $y=x$ の微分は $y'=1$, $y=x^2+1$ の微分は $y'=2x$ … それでは, $y=\frac{x}{x^2+1}$ の微分は?

(3) $y=x^3$ の微分は $y'=3x^2$, $y=x^2+1$ の微分は $y'=2x$ … それでは, $y=(x^2+1)^3$ の微分は?

(証明)



$p(x) = f(x)g(x)$ とおくと。

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{f(x+h) - f(x)\}g(x+h) + f(x)\{g(x+h) - g(x)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right\} \\ &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \end{aligned}$$

(4) $y=(x^2+1)(x^3+1)$ の微分を求めよ。

$$\begin{aligned} y' &= 2x(x^3+1) + (x^2+1)3x^2 \\ &= 2x^4 + 2x + 3x^4 + 3x^2 \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

y を展開してから行ってもよい。

$$\begin{aligned} y &= x^5 + x^3 + x^2 + 1 \\ y' &= 5x^4 + 3x^2 + 2x \end{aligned}$$

(5) $y=x(x+1)(x+2)$ の微分を求めよ。

$$\begin{aligned} y' &= (x+1)(x+2) + x(x+2) + x(x+1) \\ &= x^2 + 3x + 2 + x^2 + 2x + x^2 + x \\ &= 3x^2 + 6x + 2 \end{aligned}$$

y を展開してから行ってもよい。

$$\begin{aligned} y &= x^3 + 3x^2 + 2x \\ y' &= 3x^2 + 6x + 2 \end{aligned}$$

(2) $y=(x+1)(x+2)(x+3)$

次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = (2x^2 + 3)(3x^2 + 4)$

$= \square x^3 + \square x$

Check Reset

$= \square x^2 + \square x + \square$

Check Reset

○ 商の微分法

関数 $y=f(x)$, $y=g(x)$ の導関数分かっているとき、これらの商

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

の導関数を $f(x)$, $g(x)$, $f'(x)$, $g'(x)$ で表わす公式を求める。

◇商の微分法の公式◇

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow y' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

例と答

次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = \frac{x^2+2}{x+1}$

(答案) $y' = \frac{2x(x+1) - (x^2+2)}{(x+1)^2}$
 $= \frac{2x^2+2x-x^2-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x-2}{(x+1)^2}$

■ 短答問題 ■

次の関数の導関数を求めよ。

(半角数字で記入すること)

(1) $y = \frac{x+1}{x+2}$

$y' = \frac{\square}{(x+\square)^2}$

Check Reset

(2) $y = \frac{x^2}{x+1}$

$= \frac{\square(x-\square)}{(x+\square)^3}$

Check Reset

(証明)

$p(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ とおくと。

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p(x+h) - p(x)}{h}$$

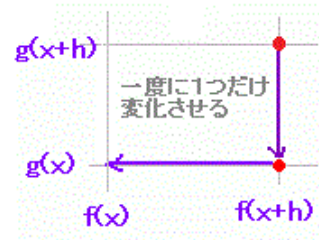
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$

ここで、次のように変形する

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x+h)}{g(x)} + \frac{f(x+h)}{g(x)} - \frac{f(x)}{g(x)} \\ &= f(x+h) \frac{g(x) - g(x+h)}{g(x+h)g(x)} + \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x)} \\ &= -\frac{f(x+h)}{g(x+h)g(x)} \{g(x+h) - g(x)\} + \frac{f(x+h) - f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

これにより

$$\begin{aligned} y' &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)}{g(x+h)g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= -\frac{f(x)}{g(x)^2} \cdot g'(x) + \frac{f'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$



(2) $y = \frac{x-2}{x^2+1}$

(答案) $y' = \frac{(x^2+1) - (x-2)2x}{(x^2+1)^2}$
 $= \frac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}$

(3) $y = \frac{2x}{(x+1)^2}$

$y' =$

$y' =$

$$= \frac{x^2 + \square x + \square}{(x + \square)^2}$$

$(4) \quad y = \frac{1}{x(x+1)}$

$y' =$

$$= \frac{x^2 + \square x + \square}{(x + \square)^2}$$

○ 合成関数の微分法

関数 $y = f(g(x))$ を $y = f(t)$ と $t = g(x)$ の合成関数と考えるとき,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

3個の関数を合成した場合も、同様

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} \frac{ds}{dx}$$

(証明)

$\frac{dy}{dx}$ は $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ を略したものであるが、平均変化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は

有限値÷有限値の、普通の分数であるので、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

のように変形することができる。

次に $\Delta x \rightarrow 0$ の極限を考えると、 $\Delta t \rightarrow 0$ となる(以下、不連続関数を用いた変換は考えない)ことに注意すると、

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

だから

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

例と答

次の関数の導関数を求めよ。

(1) $y = (2x+3)^4$

$$y = t^4$$

$$t = 2x+3 \text{ とおく}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

$$= 4t^3 \cdot 2 = 8(2x+3)^3 \quad \dots \text{ (答)}$$

(2) $y = (x^2+x+1)^3$

$$y = t^3$$

$$t = x^2 + x + 1 \text{ とおく}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dx}$$

$$= 3t^2 \cdot (2x+1) = 3(x^2+x+1)^2(2x+1) \quad \dots \text{ (答)}$$

■ 短答問題 ■

次の関数の導関数を求めよ。

(空欄に半角数字を書き込むこと)

(1) $y = (4x-3)^5$

$$= \square (4x-3) \square$$

... (答)

(2) $y = (x^2-x+2)^4$

$$= \square (x^2-x+2) \square (\square x-1) \quad \dots \text{ (答)}$$

○ 逆関数の微分法

x が y の関数として表わされているとき、 y を x で微分するには、 x を y で微分したものの逆数を取ればよい。(この

(証明)

微分可能な関数では、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき、 $\Delta y \rightarrow 0$ だから、

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

場合、導関数が y の関数で表わされることもある。))

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad (\text{ただし, } \frac{dx}{dy} \neq 0)$$

例と答

(1) $y = \sqrt{x} \quad (0 < x)$

$y^2 = x$ だから
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \dots (\text{答})$$

(2) 対数関数の微分は、次のように指数関数の微分を用いて計算することもできる。

$$y = \log x \Leftrightarrow x = e^y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

○ 陰関数の微分法

$y = 2x + 1$ のように y について解かれた形になっているものを陽関数、 $x^2 + y^2 = 1$ のように x, y の関係式で示され、 y について解かれた形になっていないものを陰関数という。

陰関数で表わされているものを微分するには、右の例のように両辺をそのまま微分すればよい。

y は x の関数と考えて微分する。

例

$$x^2 + y^2 = 1$$

両辺を x で微分すると、

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

(陰関数の微分は、 y も用いて表わせばよい。)

■ 短答問題 ■

次の関係式から $\frac{dy}{dx}$ を求めよ。(結果は y も用いて表わしてもよい。)

(空欄には半角英数字を書き込むこと)

(1) $x^2 + xy + y^2 = 1$

(2) $2x^2 - y^2 = 1$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\square}{y} x$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\square x + y}{x + \square y}$$

Check Reset

Check Reset

○ …メニューに戻る