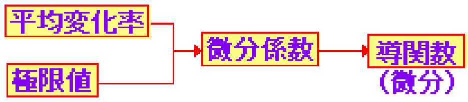
→ スマホ版は別頁

■微分係数と導関数

○　はじめに



平均変化率の極限値が微分係数 $f'(a)$ で，微分係数の定義における定数 a を変数 x に変えたものが導関数（微分）$f'(x)$ なので，右の流れ図に沿って解説する．

○　平均変化率

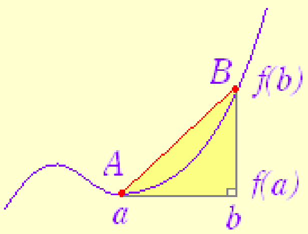
中学校で「変化の割合」と呼ばれるものは，高校では「平均変化率」と呼ばれる．

$$(\text{平均変化率}) = \frac{(\text{y の増分})}{(\text{x の増分})}$$

一般に，関数 $y = f(x)$ の区間 $a \leqq x \leqq b$ における平均変化率は

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

で定義される．



例

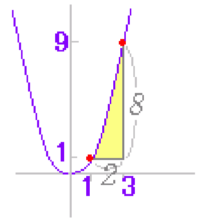
(1)　$y = x^2$ の区間 $1 \leqq x \leqq 3$ における平均変化率

(x の増分) $=3-1 = 2$

(y の増分) $=3^2 - 1^2 = 8$

だから

(平均変化率)$=\frac{8}{2}=4$



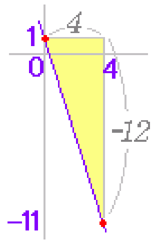
(2)　$y = -3x + 1$ の区間 $0 \leqq x \leqq 4$ における平均変化率

(x の増分)$=4-0=4$

(y の増分)$=-11-1=-12$

だから

(平均変化率)$=\frac{-12}{4}=-3$



■即答問題■

次の各関数の与えられた区間における平均変化率を求めよ．（正しい選択肢をクリック）

(1)　$y = 2x - 1$　　$(0 \leqq x \leqq 3)$

[選択肢]　**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**

(2)　$y = x^2$　　$(0 \leqq x \leqq 4)$

[選択肢]　**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**

(3)　$y = x^3$　　$(-1 \leqq x \leqq 2)$

[選択肢]　**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**

(4)　$y = 2x^2 + x$　　$(-1 \leqq x \leqq 1)$

[選択肢]　**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**

○　極限値

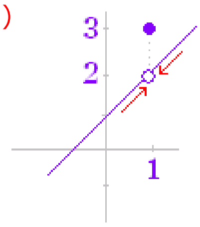
（はじめに）　関数値 $f(1)$ と極限値 $\lim_{x \to 1} f(x)$ の違い

右図 1) は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & (x \neq 1\text{のとき}) \\ 3 & (x = 1\text{のとき}) \end{cases}$$

で定義される関数で，関数値 $f(1)=3$ であるが，x が限りなく 1 に近づいたとき $f(x)$ は 2 に近づく．

1)



右図 2) は

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1\text{のとき})\\ 2 & (x=1\text{のとき})\end{cases}$$

で定義される関数で，関数値 $g(1)=2$ であるが，x が限りなく 1 に近づいたとき $g(x)$ は 2 に近づく．

右図 3) は

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & (x\neq 1\text{のとき})\\ 1 & (x=1\text{のとき})\end{cases}$$

で定義される関数で，関数値 $h(1)=1$ であるが，x が限りなく 1 に近づいたとき $h(x)$ は 2 に近づく．

以上の1)2)3)の違いから分かるように，x が限りなく 1 に近づくときの $f(x)$ の値（これを極限値という）は，関数値 $f(1)$ とは無関係で，x が 1 でないときの 1 付近の値で決まる．

（極限値の定義）

関数 $f(x)$ において，x が a と異なる値をとりながら a に限りなく近づくとき，$f(x)$ が一定の値 b に限りなく近づくとき，$x\rightarrow a$ のときの $f(x)$ の極限値は b であるといい

$$f(x)\rightarrow b\ (x\rightarrow a)$$

または

$$\lim_{x\rightarrow a} f(x)=b$$

と書く．

※ 「x が a と異なる値をとりながら」という条件は次のようにはたらく．

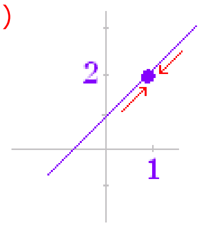
x≠1のとき

$\dfrac{x^2-1^2}{x-1}$ は約分できて $x+1$ となるので

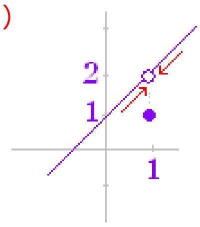
$$\lim_{x\rightarrow a}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\rightarrow a}(x+1)=2$$

約分する前は代入できないが，約分後は単なる代入と同じ．

2)



3)



例 1)

関数値 $f(1)=3$ と極限値 $\lim_{x\rightarrow 1} f(x)=2$

例 2)

関数値 $g(1)=2$ と極限値 $\lim_{x\rightarrow 1} g(x)=2$

例 3)

関数値 $h(1)=1$ と極限値 $\lim_{x\rightarrow 1} h(x)=2$

※ 繰り返しになるが，

例 1)において，$\lim_{x\rightarrow 1} f(x)=2$ ということは，$f(x)=2$ や $f(1)=2$ ということではないことに注意

例 3)も同様

例 2)は，定義によって「たまたま」 $g(1)=2$ となっている．

※ 数学専攻の人が精密な証明をするときを除けば，「限りなく近づく」とは何かということに深入りせずに，直感的に理解するとよい．

関数の極限については，次の公式の組合わせてできるものが求められればよい．

$\lim_{x\rightarrow a} f(x)=\alpha,\ \lim_{x\rightarrow a} g(x)=\beta\ (\neq 0)$のとき

（Ⅰ） $\lim_{x\rightarrow a}\{f(x)+g(x)\}=\alpha+\beta$

（Ⅱ） $\lim_{x\rightarrow a}\{kf(x)\}=k\alpha$

（Ⅲ） $\lim_{x\rightarrow a}\{f(x)g(x)\}=\alpha\beta$

$\lim_{x\rightarrow a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$

例と答

(1) $\lim_{x\rightarrow 1}(x+2)=3$

(2) $\lim_{x\rightarrow 2}(x^2+1)=4+1=5$

(3) $\lim_{x\rightarrow 3}(3x^2-2x+1)=27-6+1=22$

■即答問題■

次の極限値を求めよ．（正しい選択肢をクリック）

(1) $\lim_{x\rightarrow 2}(x+3)$

［ 選択肢 ］**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**

(3) $\lim_{x\rightarrow 1} x(x+3)$

［ 選択肢 ］**0 1 2 3 4 5 6 7 8 9**

(4) $\lim_{x\rightarrow 2}\dfrac{x^3+10}{x+1}$

(2) $\lim_{x\to 3}(x^2-2)$

[選択肢] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

[選択肢] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

○　不定形の極限

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ は，元の式のそのままの形で $x=1$ を代入すると，
分母が0，分子も0の「0÷0の形」となる．
　このように，元の式に直接値を代入すると「0÷0形」になるものを不定形の極限という．

　不定形の極限は，見かけは不定の形をしているが，不定である原因を取り除けば，極限値は求まり，結果は不定ではない．
　ここで重要となるのが，「x が a と異なる値をとりながら」という条件で，

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}$$

は，$x\neq 1$ のとき，$x-1\neq 0$ だから，分母，分子を $x-1$ で割ることができて，$x+1$ となる．

※　0÷0の形の式を不定形という．
(i)　数学で次の方程式は「解なし」「不能」となる．
$0x=3$　(正しくない変形だが)　$x=\frac{3}{0}$
　この形の式を「不能形」という．

(ii)　次の方程式は「任意の数」「不定」となる．
$0x=0$　(正しくない変形だが)　$x=\frac{0}{0}$
　この形の式を「不定形」という．

※　いわゆる「不定形の極限」には，0÷0形以外に，∞-∞形，0×∞形などがあるが，ここでは微分係数・導関数を理解する上で必要な0÷0形のみを取り上げる．

例と答･･･約分により分母，分子が0になる原因（因数）を取り除くところがポイント

(1)
$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$
(2)
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

(3)
$$\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2h+1)}{h}=\lim_{h\to 0}(2h+1)=1$$
(4)
$$\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

■即答問題■

　次の極限値を求めよ．（正しい選択肢をクリック）

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1}$

[選択肢] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

(2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$

[選択肢] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

(3) $\lim_{h\to 0}\frac{h^2+4h}{h}$

[選択肢] 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

(4) $\lim_{h\to 0}\frac{(-1+h)^2-1}{h}$

[選択肢] -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

○　微分係数の定義

関数 $y=f(x)$ の区間 $a \leqq x \leqq b$ における平均変化率は，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

であるが，この区間の幅を限りなく0に近づけた極限

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

を関数 $y=f(x)$ の $x=a$ における微分係数といい，$f'(a)$ で表わす．

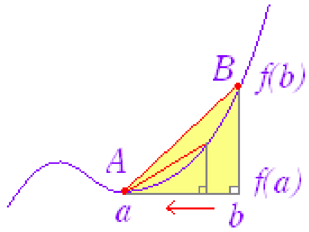
すなわち，

$$f'(a)=\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$f'(a)$ は，次の形で定義することもできる．（約分などの計算は，こちらの方が簡単になる．）

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

※　区間 $a \leqq x \leqq b$ の幅を限りなく0に近づけると



平均変化率　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$　の式において，

分母，分子とも限りなく0に近づくが，平均変化率の極限値は0になるのでなく，上に述べたようにいわゆる不定形の極限となり，有限確定値となる．

また，この極限値 $f'(a)$ は点A($x=a$) における接線の傾きとなる．

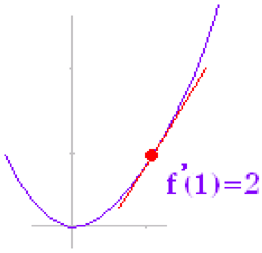
例1

$f(x)=x^2$ のとき $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1^2}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

または

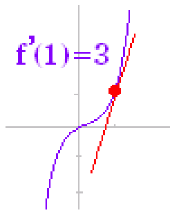
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2+h)}{\cancel{h}}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$



例2

$f(x)=x^3$ のとき $x=1$ における微分係数 $f'(1)$ は

$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^3-1^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{1+3h+3h^2+h^3-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h+3h^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(3+3h+h^2)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(3+3h+h^2)=3$$



例3　［重要例題］

$f(x)=x^2$ のとき $x=a$ における微分係数 $f'(a)$ は

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^2-a^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2ah+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2a+h)}{\cancel{h}}=\lim_{h\to 0}(2a+h)=2a$$

■短答問題■

（半角英数字で答えること）

次の微分係数を定義に従って計算せよ．

(1)　$f(x)=2x+3$ のとき $f'(1)$

Check　Reset

(2)　$f(x)=3x^2+4$ のとき $f'(0)$

(3)　$f(x)=x^2+x+2$ のとき $f'(2)$

Check　Reset

Check Reset

○　導関数（微分）の定義

　各々の定数 a に対して定義される微分係数

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

を，a に対して微分係数 $f'(a)$ を対応させる関数と考えたものを導関数という．

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

　導関数 $f'(x)$ は，元の関数の微分とも呼ばれる．また，導関数を求めることを微分するという．

○　導関数（微分）と微分係数の関係

　導関数が求まると，導関数に x の値を導入するだけで微分係数が求まるので，個々の定数 a に対して $f'(a)$ を求める煩雑な手続きは不要となる．

○　導関数（微分）を表わす記号

　微分法は，ニュートンとライプニッツが別々に考え出したと言われており，微分を表わす記号もニュートンの記号とライプニッツの記号がある．各々長所があり，両方とも使われる．

ニュートンの記号：y'，$f'(x)$

ライプニッツの記号：$\frac{dy}{dx}$，$\frac{d}{dx}f(x)$

　ライプニッツの記号は，$\Delta y=f(x+h)-f(x)$，$\Delta x=h$ として，
平均変化率を $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ で表わすとき，導関数の定義を

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ の代わりに } \frac{dy}{dx}$$

と書くものとなっている．(単なる分数ではなく，極限を表わす記号なので，d で約分することはできない．)

例と答

　次の関数の導関数を求めよ．（次の関数を微分せよ．）また，与えられた x の値に対する微分係数を求めよ．

(1)　$f(x)=x^2$，$f'(1)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x\cdots\text{（答）}$$

$x=1$ を代入すると $f'(1)=2$

(2)　$f(x)=x^3$，$f'(2)$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}(3x^2+3xh+h^2)=3x^2\cdots\text{（答）}$$

$x=2$ を代入すると $f'(2)=12$

■短答問題■
（半角英数字で答えること）
　次の関数の導関数を定義に従って計算せよ．

(1)　$f(x)=2x^2$

=

(2)　$y=-3x+4$

=

Check Reset

Check Reset