→ スマホ版は別頁

== 近似式 ==

○　接線の方程式

点 $(a,\ b)$ を通り，傾き m の直線の方程式は

$$y-b=m(x-a) \quad \cdots(1)$$

だから，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は，(1)において，$m=f'(a)$，$b=f(a)$ とおいて

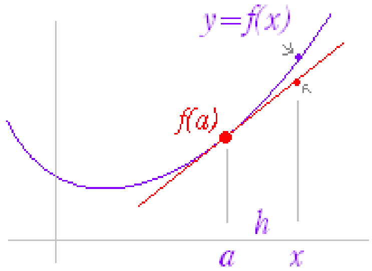
$$y-f(a)=f'(a)(x-a) \quad \cdots(2)$$

もしくは

$$y=f(a)+f'(a)(x-a) \quad \cdots(3)$$

右図1のように，「接線の y 座標」は，$x=a$ のとき「曲線の y 座標」と完全に一致するが，x が a に近い値をとるときは，その近似値となっている．

図1



すなわち，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a) \quad \cdots(4)$$

$x-a=h$ とおくと，(4)は，

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h \quad \cdots(5)$$

と書くこともできる．

○　１次の近似式

x が a に十分近い値をとるとき，

$$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a) \quad \cdots(4)$$

h が 0 に十分近いとき

$$f(a+h) \fallingdotseq f(a)+f'(a)h \quad \cdots(5)$$

特に，$a=0$ のとき

$$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x \quad \cdots(6)$$

これらの式を関数 $f(x)$ の１次の近似式という．

例

$f(x)=(1+x)^2$ のとき

$f'(x)=2(1+x)$ だから，$f'(0)=2$

x が 0 に十分近い値をとるとき

$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x=1+2x$

正確な値，$f(x)=(1+x)^2=1+2x+x^2$ と比較すると，$x=0.1$ ならば $x^2=0.01$ となり，その差はほとんど無視できるほど小さい．

例と答

(1)　$x \fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)=\sin x$ の１次の近似式を求めよ．

（答案）

$f(0)=0$

$f'(x)=\cos x$　，$f'(0)=1$

だから

$f(x) \fallingdotseq 0+1x=x$

(2)　$x \fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)=\sqrt{1+x}$ の１次の近似式を求めよ．

（答案）

$f(0)=1$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$　，$f'(0)=\dfrac{1}{2}$

だから

$f(x) \fallingdotseq 1+\dfrac{1}{2}x$

(3)　１次の近似式を用いて，次の値の近似値を求めよ．

$$1.01^{-5}$$

（答案）

$f(x)=(1+x)^{-5}$ とおく，

$f'(x)=-5(1+x)^{-6}$

$x \fallingdotseq 0$ のとき，

$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x=1-5x$

$f(0.01) \fallingdotseq 1-5\times 0.01=0.95$

短答問題

(1) $x≒0$ のとき，$f(x)=\log(1+x)$ の１次の近似式を求め，これを利用して $\log\ 1.01$ の近似値を求めよ．

$\log\ 1.01≒$

Check Reset help

(2)

$x≒0$ のとき，$f(x)=\tan\ x$ の１次の近似式を求め，これを利用して $\tan\ \dfrac{\pi}{30}$ の近似値を求めよ．

ただし，$\pi=3.1416$ とし，結果は小数第3位まで求めよ．

$\tan\ \dfrac{\pi}{30}≒$

Check Reset help

(3)

$x≒0$ のとき，$f(x)=\sqrt[3]{1000+x}$ の１次の近似式を求め，これを利用して $\sqrt[3]{1001}$ の近似値を求めよ．（小数第3位まで）

$\sqrt[3]{1001}≒$

Check Reset help

○　２次の近似式

(5)式は h が 0 に十分近いとき h の１次式で近似式を表わしたものとなっている

$f(a+h)≒f(a)+f'(a)h$ …(5)

目的に応じてさらに詳しい近似式がほしいときは，h の2次式，3次式，…と次数を高くしていくとより精度の高い近似式が得られる．

x が a に十分近い値をとるとき，

$f(x)≒f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$ …(7)

h が 0 に十分近いとき

$f(a+h)≒f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2!}h^2$ …(8)

$a=0$ のとき

$f(x)≒f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2$ …(9)

これらの式を関数 $f(x)$ の2次の近似式という．

(解説)

h が 0 に十分近いとき

$f(a+h)≒\alpha+\beta h+\gamma h^2=g(a+h)$

とおくと，

$\beta+2\gamma h=g'(a+h)$

$2\gamma=g''(a+h)$

$h=0$ のとき，$f(a)=g(a)$ …(*1)

$h=0$ のとき，$f'(a)=g'(a)$ …(*2)

$h=0$ のとき，$f''(a)=g''(a)$ …(*3)

を条件とすると，

(*1)より，$\alpha=f(a)$

(*2)より，$\beta=f'(a)$

(*3)より，$\gamma=\dfrac{f''(a)}{2!}$

※　一般に，$a_n x^n$ を n 回微分すると $n!\,a_n$ となる．

○　テイラーの定理

x が a に十分近い値をとるとき，

$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n$

（n 次導関数を $f^{(n)}(x)$ で表わす．）

h が 0 に十分近いとき

$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\dfrac{f''(a)}{2!}h^2+\ldots+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+R_n$

これをテイラーの定理という．（R_n は近似式と真の値との誤差）

右辺を無限級数（数列の和の極限）にしたもの(このとき$R_n \to 0$ となる)をテイラー展開という.

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots$$
$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{f''(a)}{2!}h^2\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+\cdots$$

テーラーの定理，テイラー展開において，特に$a=0$ の場合は，マクローリンの定理，マクローリン展開と呼ばれる.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n$$
$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

※　テイラー展開，マクローリン展開ともに，「無限級数が収束するようなx またはh の値の範囲」を吟味する必要があるが，ここではh またはx が十分0 に近く，収束する範囲内にある場合を扱っている.

例と答

(1)　$f(x)=e^x$ のマクローリン展開を求めよ.

$f'(x)=e^x, f''(x)=e^x, \cdots, f^{(n)}(x)=e^x$　（　$y^{(n)}$ はn 次導関数　）
$f(0)=1,\ f'(0)=1, f''(0)=1, \cdots, f^{(n)}(0)=1$ だから

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$　（　$x=1$ を代入すると，$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$　）

(2)　$f(x)=\sin x$ のマクローリン展開を求めよ.

$f'(x)=\cos x, f''(x)=-\sin x, \cdots$
$f(0)=0,\ f'(0)=1, f''(0)=0, -1, 0, \cdots$　（4回微分するごとに巡回する.）

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots$$

(3)　$f(x)=\cos x$ のマクローリン展開を求めよ.

$f'(x)=-\sin x, f''(x)=-\cos x, \cdots$
$f(0)=1, f'(0)=0, f''(0)=-1, 0, \cdots$　（4回微分するごとに巡回する.）

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots$$