← PC版は別頁

12　行列式３

○　はじめに

　この節では，**余因子**というスカラーを定義し，行列式を計算するための**余因子展開**について述べる．次に，余因子を要素とする**余因子行列**を定義し，逆行列との関連を述べる．

○　前節5.2で述べた行列式の値を次数を下げて計算する方法は，次のようになっていた．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{または} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

　この $(1,1)$ 成分と残り $n-1$ 次の行列式という組合せで次数を下げる方法は，行の入れ替えを用いると次のように拡張できる．

　$(2,1)$ 成分のみ 0 でなく，他の 1 列目の成分が 0 であるとき，

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{1行と2行を入れ替え}}{=} (-1) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{次数が下がる}}{=} (-1) a_{21} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

　一般に，$(i,1)$ 成分のみ 0 でなく，他の 1 列目の成分が 0 であるとき，直接 i 行と 1 行を入れ替えると，1回で入れ替えできるが，行列成分の並び方が変わって定式化しにくい．これに対して，i 行を順次上の行と入れ替えていくと，$i-1$ 回の入れ替えで，1 行目に来るようにできる．

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \overset{\text{１つ上の行と入れ換える}}{=} (-1) \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ 0 & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{順次上の行と入れ替える［i−1回］}}{=} (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} \color{red}{a_{i1}} & \color{red}{a_{i2}} & \color{red}{\cdots} & \color{red}{a_{in}} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

　列の入れ替えについても１回の入れ替えで符号が１回変わるから，(i,j) 成分のみ 0 でなく，他の j 列目の成分が 0 であるとき，同様にして，まず第 j 列を第 1 列まで順次入れ替え

てから，次に第 i 行を順次第 1 行まで入れ替えればよい

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1 つ左の列と入れ換える

$$=(-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

順次左の列と入れ替える［ j−1 回］

$$=(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{j-1+i-1}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

順次上の行と入れ替える［ i−1 回］

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

次数が下がる

$$=(-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

　行についても同様だから，$n-1$ 次の正方行列で a_{ij} を除く i 行または j 列の他の成分がすべて 0 のとき，i 行と j 列を除いた $n-1$ 次の行列式で表わすことができる．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ a_{ij} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{または} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{ij} & 0 & 0 \\ \vdots & & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

○　**余因子**の定義

　n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次の正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けた（※波線は取り除く部分）

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

を *(i, j)* **余因子**という．

例 1

$(3\ 4\ -1)$

$$A=\begin{pmatrix}3&4&-1\\2&5&-2\\1&6&-4\end{pmatrix}$$ とするとき，

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5&-2\\6&-4\end{vmatrix}=-8$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&4\\1&6\end{vmatrix}=-14$$

（※余因子は行列式なので，スカラー（単なる数）となる．）

余因子$\mathbf{A}_{ij}$を用いると，上に述べた行列式の次数を下げる変形は次の形で表わされる．

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&0&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&0&&\vdots\\ a_{ij}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&0&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix} \text{または} \begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\cdots&&\vdots\\ 0&0&a_{ij}&0&0\\ \vdots&&\cdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{ij}A_{ij}$$

○　**余因子展開**

正方行列$\mathbf{A}$の第j列を

$$\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\ \vdots\\ a_{n-1\,j}\\ a_{nj}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1j}\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\a_{ij}\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\a_{nj}\end{pmatrix}$$

と分けて，行列式の線形性を用いると

$$|A|=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1j}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\cdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&0&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\cdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$+\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&0&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\cdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&a_{ij}&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\cdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&0&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

$$+\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&0&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\cdots&&\vdots\\ a_{i1}&\cdots&0&\cdots&a_{in}\\ \vdots&&\cdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nj}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$$

となる．これを行列式$|\mathbf{A}|$の**第j列に関する余因子展開**という．

　同様にして，行列式$|\mathbf{A}|$の**第i行に関する余因子展開**

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$$

が得られる．

例 2

$$|A|=\begin{vmatrix}3&4&-1\\2&5&-2\\1&6&-4\end{vmatrix}$$

を第2列で展開すると,

$$|A|=4A_{12}+5A_{22}+6A_{32}$$
$$=4\cdot(-1)^3\begin{vmatrix}2&-2\\1&-4\end{vmatrix}+5\cdot(-1)^4\begin{vmatrix}3&-1\\1&-4\end{vmatrix}$$
$$+6\cdot(-1)^5\begin{vmatrix}3&-1\\2&-2\end{vmatrix}$$
$$=-4\cdot(-6)+5\cdot(-11)-6\cdot(-4)=-7$$

例 3

$$|A|=\begin{vmatrix}3&4&-1\\2&5&-2\\1&6&-4\end{vmatrix}$$

を第1行で展開すると,

$$|A|=3A_{11}+4A_{12}+(-1)A_{13}$$
$$=3\cdot(-1)^2\begin{vmatrix}5&-2\\6&-4\end{vmatrix}+4\cdot(-1)^3\begin{vmatrix}2&-2\\1&-4\end{vmatrix}$$
$$+(-1)\cdot(-1)^4\begin{vmatrix}2&5\\1&6\end{vmatrix}$$
$$=3\cdot(-8)+(-4)\cdot(-6)+(-1)\cdot 7=-7$$

○　**余因子行列**

n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ に対し

$$\widetilde{A}={}^t[A_{ij}]$$

を$\mathbf{A}$の**余因子行列**という.

(※余因子はスカラー（単なる数）であるので，余因子行列は成分を余因子に置き換え，さらに転置した行列であることが重要)

例 4

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$とすると

$A_{11}=d, A_{12}=-c, A_{21}=-b, A_{22}=a$であるから

$$\widetilde{A}={}^t\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$
$$={}^t\begin{pmatrix}d&-c\\-b&a\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

例 5

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}$とすると

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{pmatrix}5&6\\8&9\end{pmatrix}=-3$$
$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{pmatrix}4&6\\7&9\end{pmatrix}=6$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{pmatrix}4&5\\7&8\end{pmatrix}=-3$$

…　…

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{pmatrix}1&2\\4&5\end{pmatrix}=-3$$

であるから

$$\widetilde{A}={}^t\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{33}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}$$
$$={}^t\begin{pmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-3&6&-3\\6&-12&6\\-3&6&-3\end{pmatrix}$$

○　余因子行列 $\widetilde{A}$ と逆行列 A^{-1} は，次の関係を満たす.

$|A| \neq 0$ ならば $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$

証明
$|A| \neq 0$ のとき，**クラメルの公式**を用いて A^{-1} を求めてみる．
$A^{-1} = X = [x_{ij}] = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ とおくと
$$AX = E$$
となればよい．
$$AX = [Ax_{ij}] = [Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n]$$
$$E = [\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}]$$
だから
$$A\vec{x_j} = \vec{e_j} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$
となればよい．
$\vec{x_j}$ の第 i 成分は，
$$x_{ij} = \frac{|\ A \text{ の } i \text{ 列を } \vec{e_j} \text{ で置き替えたもの }|}{|A|}$$
$(j=1, 2, \ldots, n)$
であるが，この式の分子

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccccc} & & \downarrow i\text{列} & & \end{array} & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

は，j 行 i 列成分が 1 となっているので，$(-1)^{j+i}A_{ji}$ に等しい．
すなわち，
$$X = A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$
が成り立つ．

○　また，これより次の定理が得られる．

定理 7
$$A\tilde{A} = \tilde{A}A = |A|E$$

証明
ア)　$|A| \neq 0$ のとき，上に述べたことから，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$
から
$$A\frac{1}{|A|}\tilde{A} = E$$
分母を払えば
$$A\tilde{A} = |A|E$$
$\tilde{A}A = |A|E$ も同様にして示される．

イ)　$|A| = 0$ のとき，
$\tilde{A}$ の (i, j) 成分が A_{ji} であることに注意すると，$A\tilde{A}$ の (i, j) 成分は
$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn}$$
となるが，
(1) $i=j$ のとき，
　この式は，行列式 $|A|$ の**第 i 行に関する余因子展開**と等しく，
$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = |A| = 0$$
(2) $i \neq j$ のとき，
$\mathbf{A}$ の第 j 行を第 i 行で置き換えた行列の行列式

$$\left|\begin{array}{ccccc} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

を第 j 行に関して余因子展開すると，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

ところが，この行列式は第 i 行と第 j 行が等しいから前節で述べた定理 5 により，0 となる．

例 6

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

の余因子行列と逆行列を求めよ．

（解答）

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 2 & -9 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=6$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=-2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=-2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}=-3$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}=-5$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -9 \end{pmatrix}=1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}=0$$

$$\widetilde{A}={}^{t}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{33} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$={}^{t}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A|=3$ だから

$$A^{-1}=\frac{\widetilde{A}}{|A|}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

■確認テスト■

（半角数字で答えよ）

(1)

行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \\ -5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ について余因子 A_{23}, A_{31} を求めよ．

$A_{23}=$ ＿＿

[途中経過：**見る** ｜ **隠す**]

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}=-7$$

$A_{31}=$ ＿＿

[途中経過：**見る** ｜ **隠す**]

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}=-12$$

---

(2)

次の行列式を第 1 行に関して余因子展開せよ．（結果とし

て得られる行列式の値を書け）

$$\begin{vmatrix}1&0&-2\\3&-6&4\\-5&7&8\end{vmatrix}=\square$$

[途中経過：**見る** | **隠す**]

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-6&4\\7&8\end{vmatrix}+0+(-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3&-6\\-5&7\end{vmatrix}$$
$$=-76+18=-58$$

---

(3)

次の行列式を第 2 列に関して余因子展開せよ．（結果として得られる行列式の値を書け）

$$\begin{vmatrix}2&0&3\\4&1&5\\6&0&7\end{vmatrix}=\square$$

[途中経過：**見る** | **隠す**]

$$0+(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&3\\6&7\end{vmatrix}+0=-4$$

---

(4)

次の行列の余因子行列を求めよ．

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-2\\-1&3&2\\2&6&4\end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}0&-12&\square\\\square&8&0\\-12&\square&3\end{pmatrix}$$

[途中経過：**見る** | **隠す**]

$${}^t\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}$$
$$={}^t\begin{pmatrix}0&8&-12\\-12&8&-6\\6&0&3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&-12&6\\8&8&0\\-12&-6&3\end{pmatrix}$$

---

(5)

$$A=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}$$

のとき，$A\widetilde{A}$ を求めよ．

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-1&\square&0\\0&-1&0\\\square&0&\square\end{pmatrix}$$

[途中経過：**見る** | **隠す**]

$$\widetilde{A}={}^t\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}$$
$$={}^t\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&-1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

だから $A\widetilde{A}$ を計算すると

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

となる．

(別解)

定理７により，$A\widetilde{A}=|A|E$

また，$|A|=-1$

したがって，$A\widetilde{A}=-E$

Check Reset