← PC版は別頁

10　行列式 1

　決定する *determine* という動詞の派生語 *determinant* は，日本語では**行列式**と訳され，n次正方行列が正則であるか否かを判定できる式である．行列式の数学的な定義はこみいったものであるが，広く用いられる便利な式である．

　以下において解説する**行列式**は，行列 $\mathbf{A}$ の n^2 個の変数 a_{ij} のある n 次式で，その式の値が 0 であるか否かによって行列 $\mathbf{A}$ が正則であるか否かを判定することができる．

○　行列式を用いて正則を判定する例　（解説は後に述べる）

　n = 2 のとき，2次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式を，$|A|$ あるいは $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ で表わし，

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

と定義する．

　実際の数値で行列式の値を求めてみると，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=4-6=-2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot2-2\cdot1=2-2=0$$

となり，

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$は逆行列をもち，正則行列であるが，

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$は逆行列をもたず，正則行列でないといえる．

○　一般のn次正方行列の行列式を求めるに当たって，まず，これと密接に関連する連立方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ の解の公式を作ることを考える．

行列 A を列ベクトルの束で表わしたもの

$A=[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}]$について，次の条件を満たすような A から R への写像 $D:A=[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}]\to R$ を考える．

(1)　n **重線形性**　：　各列について線形

　ア)　$D[\cdots,\vec{a_i}+\vec{a_i}',\cdots]=D[\cdots,\vec{a_i},\cdots]+D[\cdots,\vec{a_i}',\cdots]$　(i = 1, 2, ⋯, n)

　イ)　$D[\cdots,\lambda\vec{a_i},\cdots]=\lambda D[\cdots,\vec{a_i},\cdots]$　(i = 1, 2, ⋯, n)

(2)　**交代性**　：　第i列ベクトルと第j列ベクトルを入れ替えると符号が変わる

$$D[\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_j},\cdots]=-D[\cdots,\vec{a_j},\cdots,\vec{a_i},\cdots]$$

(3)　**正規性**

$$D[E]=1$$

なお，(2)から次の(2)′が導かれる：

(2)′　第 i 列ベクトルと第 j 列ベクトルが等しいと

き，すなわち，$\vec{a_i}=\vec{a_j}$ のとき，
$$D[\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_j},\cdots]=0$$

はじめに，以上の条件(1)(2)を満たす写像 D が存在すれば，連立方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ の解の公式を作ることができることを示し，次にそのような写像の存在を示す．

まず，連立方程式
$$A\vec{x}=\vec{b}$$
は
$$x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots+x_n\vec{a_n}=\vec{b}$$
と書ける．

いま $D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_n}]$ の第 i 列のところに，この $\vec{b}$ を代入すると，
$$D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{b},\cdots,\vec{a_n}]$$
$$D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots+x_n\vec{a_n},\cdots,\vec{a_n}]$$
(1)により
$$=x_1D[\boxed{\vec{a_1}},\vec{a_2},\cdots,\boxed{\vec{a_1}},\cdots,\vec{a_n}]$$
$$+x_2D[\vec{a_1},\boxed{\vec{a_2}},\cdots,\boxed{\vec{a_2}},\cdots,\vec{a_n}]$$
$$+\cdots$$
$$+x_iD[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\boxed{\vec{a_i}},\cdots,\vec{a_n}]$$
$$+\cdots$$
$$+x_nD[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\boxed{\vec{a_n}},\cdots,\boxed{\vec{a_n}}]$$
(2)'により
$$=x_iD[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\boxed{\vec{a_i}},\cdots,\vec{a_n}]$$
だから，$D[A]=D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_n}]\neq 0$ ならば
$$x_i=\frac{D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{b},\cdots,\vec{a_n}]}{D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_n}]}$$ (i = 1 ～ n) … (*)

次に，このような条件を満たす D の存在を示す．

n =2 のとき，$\vec{a_1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}$, $\vec{a_2}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}$,
$\vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおくと，
$$\vec{a_1}=a_{11}\vec{e_1}+a_{21}\vec{e_2}$$
$$\vec{a_2}=a_{12}\vec{e_1}+a_{22}\vec{e_2}$$
(1)(2)を満たす D がどのようなものか検討すると，
$$D[A]=D[\vec{a_1},\vec{a_2}]$$
$$=D[a_{11}\vec{e_1}+a_{21}\vec{e_2},a_{12}\vec{e_1}+a_{22}\vec{e_2}]$$
$$=a_{11}a_{12}D[\vec{e_1},\vec{e_1}]+a_{11}a_{22}D[\vec{e_1},\vec{e_2}]$$
$$+a_{21}a_{12}D[\vec{e_2},\vec{e_1}]+a_{21}a_{22}D[\vec{e_2},\vec{e_2}]$$
ここで(2)'により
$$D[\vec{e_1},\vec{e_1}]=D[\vec{e_2},\vec{e_2}]=0$$
$$D[\vec{e_2},\vec{e_1}]=-D[\vec{e_1},\vec{e_2}]$$
だから
$$D[A]=D[\vec{a_1},\vec{a_2}]$$
$$=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})D[\vec{e_1},\vec{e_2}]$$
$D[\vec{e_1},\vec{e_2}]=c$ とおくと，これら(1)(2)の条件だけで(*)式の値は定まるが，特に c =1とすれば，(3)の正規性を満たす．

$D[E]=(1\cdot1-0\cdot0)c=c=1$ よりc=1
$$D[A]=D[\vec{a_1},\vec{a_2}]$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$
となる．

このとき，連立方程式の解(*)は，
$$x_1=\frac{D[\vec{b},\vec{a_2}]}{D[\vec{a_1},\vec{a_2}]}=\frac{\begin{vmatrix}b_1&a_{12}\\b_2&a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}}$$

$$= \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{D[\vec{a_1}, \vec{b}]}{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

となる．

n ≧3のときも同様に定まることが知られている．

◇ここまでの要約◇

(1)　行列式

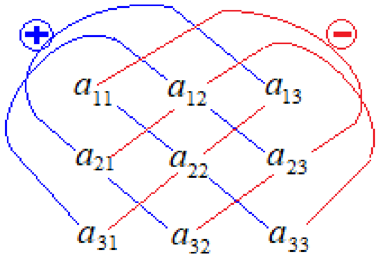
n =2のとき，

$$|A| = D[A] = D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

n =3のとき，「サリュの方法」と呼ばれる覚え方がある（sarrus［フランス人，人名］のカタカナ表記をサラスとすることもある）：

$$|A| = D[A] = D[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}]$$



$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{32} a_{21}$
$- a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33}$

n ≧ 4 のとき，上のような簡単な覚え方はない．

(2)　連立方程式 $A\vec{x} = \vec{b}$ の解：「クラメルの公式」という．

n =2 のとき，

$$x_1 = \frac{D[\vec{b}, \vec{a_2}]}{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

$$x_2 = \frac{D[\vec{a_1}, \vec{b}]}{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}$$

n =3のとき，

$$x_1 = \frac{D[\vec{b}, \vec{a_2}, \vec{a_3}]}{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}]}$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$\frac{b_1 a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} b_3 + a_{13} a_{32} b_2 - b_3 a_{22} a_{13} - b_1 a_{23} a_{32} - b_2 a_{12} a_{33}}{= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{32} a_{21} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{12} a_{33}}$$

$$x_2 = \frac{D[\vec{a_1}, \vec{b}, \vec{a_3}]}{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

以下同様に計算できる

$$x_3 = \frac{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{b}]}{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}]} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

以下同様に計算できる

例 1

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 7$

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix} = (x^2 - 1) - x^2 = -1$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$$= (3 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 0 \cdot 4) - (5 \cdot 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \cdot (-1)) = (12 + 0 + 0) - (10 + 0 + 0) = 2$$

(4) $\begin{vmatrix} a-4 & a-3 & a-2 \\ a-1 & a & a+1 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{vmatrix}$

$$= \{(a-4)a(a-4) + (a-3)(a+1)(a+2) + (a-2)(a+3)(a-1)\} - \{(a+2)a(a-2) + (a-1)(a-3)(a+4) + (a-4)(a+3)(a+1)\} = 0$$

例 2

(1) 連立方程式 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ をクラメルの公式で解くと,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3$$

(2) 連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ をクラメルの公式で解くと,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & 2 \\ 14 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&9&2\\3&14&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&2&2\\3&1&3\end{vmatrix}}=\frac{2}{1}=2$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&2&9\\3&1&14\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&-1&0\\1&2&2\\3&1&3\end{vmatrix}}=\frac{1}{1}=1$$

■確認テスト■

（それぞれ，半角数字=1バイト文字で答えよ）

1.　次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix}1&-2\\2&4\end{vmatrix}=\square$

採点する　やり直す

(2) $\begin{vmatrix}2&4\\3&6\end{vmatrix}=\square$

採点する　やり直す

(3) $\begin{vmatrix}1&0&1\\3&2&1\\5&-2&0\end{vmatrix}=\square$

採点する　やり直す

(4) $\begin{vmatrix}0&1&-1\\3&2&1\\5&-2&0\end{vmatrix}=\square$

採点する　やり直す

2.　次の空欄を埋めよ.

(1)　連立方程式 $\begin{pmatrix}3&4\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ をクラメルの公式で解くと,

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}\square&4\\\square&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}}=\square$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}3&\square\\2&\square\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&4\\2&3\end{vmatrix}}=\square$$

採点する　やり直す

(2)　連立方程式 $\begin{pmatrix}7&4\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix}$ をクラメルの公式で解くと,

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}\square&4\\\square&2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}7&4\\3&2\end{vmatrix}}=\square$$

$$\begin{vmatrix}7&\square\end{vmatrix}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & \square \\ 3 & \square \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \square$$

採点する　やり直す

3．　次の連立方程式をクラメルの公式を用いて解け．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$　$x_1 = \square$，$x_2 = \square$

採点する　やり直す

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$x_1 = \square$，$x_2 = \square$

採点する　やり直す

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

$x_1 = \square$，$x_2 = \square$，$x_3 = \square$

採点する　やり直す

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

$x_1 = \square$，$x_2 = \square$，$x_3 = \square$

採点する　やり直す