← PC版は別頁

7　連立１次方程式２

○　以下においては，拡大係数行列の基本変形を用いて，具体的に連立１次方程式を解く方法をまとめてみる．

例１

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ 2x_1+3x_2+4x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+8x_3=2 \end{cases}$　の拡大係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix}$

を基本変形すると，$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix}$ となるが，

これは，

$\begin{cases} x_1=8 \\ x_2=11 \\ x_3=-11 \end{cases}$

を表わしている．

この例においては，未知数（x_1，x_2，x_3）の個数は **n=3**，係数行列，拡大係数行列の階数（先頭の 1 の個数）はrank($\mathbf{A}$)=rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$])=**3**となっている．

○　この例のように，rank($\mathbf{A}$)=**n**となるときは，連立１次方程式はただ1つの解が存在する．

例２

(A)　基本変形の結果，拡大係数行列が $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるようなときは，

$\begin{cases} x_1+2x_2 = 4 \\ \qquad x_3=3 \\ \qquad 0=0 \ \cdots注 \end{cases}$

を表わしており，x_1，x_2 のうちいずれか１つは任意定数とすることができる．

以下においては，先頭の 1 に対応しない未知数 （この例では x_2）を任意定数 c とおくことにすれば，先頭の 1 に対応する未知数 （この例では x_1，x_3）について解けることとなる．

$\begin{cases} x_1=4-2c \\ x_2=c \\ x_3=3 \\ (0=0 \text{ は成立する}) \end{cases}$

(B)　これに対して，基本変形の結果，拡大係数行列が

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$となるようなときは，

$\begin{cases} x_1+2x_2 = 0 \\ \qquad x_3=0 \\ \qquad 0=1 \ \cdots注 \end{cases}$

を表わしており，

第3式 $0x_1+0x_2+0x_3=1$ はどんなx_1，x_2，x_3を持ってきても成立しない．

上記 **(A)(B)**は，係数行列のうち，すべての成分が0となる行（3行目）について右辺が0であるか否か（注の部分）の相違であるが，これは**係数行列の階数**（先頭の 1 の個数）rank($\mathbf{A}$) と**拡大係数行列の階数**（先頭の1の個数）rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$])が等しいか否かで区別することができる．

すなわち，上記 **(A)**においては rank($\mathbf{A}$)=rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$])=2 であるが，上記 **(B)** においては，rank($\mathbf{A}$)=2であるのに対して，**3行目の右辺が1であるから**rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$])=3となる．

rank($\mathbf{A}$)=rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$]) <nのときは上記**(A)** の形となり，n−rank($\mathbf{A}$)個の任意定数をもつ解が存在する．

これに対して，rank ($\mathbf{A}$) ≠ rank ([$\mathbf{A}\ \vec{b}$]) のときは，上記 **(B)** の形になるから，連立方程式の解は存在しない．

定理２

(1)　方程式の個数がm個，未知数の個数がn個の連立１次方程式

$$\mathbf{A}\,\vec{x}=\vec{b}$$

が解をもつための必要十分条件は

rank($\mathbf{A}$)=rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$])

このとき，**n−rank($\mathbf{A}$)個の任意定数**を含む解が存在する．

(2)　方程式の個数がm個，未知数の個数がn個の連立１次方程式

$$\mathbf{A}\,\vec{x}=\vec{b}$$

が**ただ1つの解**をもつための必要十分条件は

rank($\mathbf{A}$)=rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$])=n

○　例３

未知数x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 の連立１次方程式において，拡大係数行列の基本形が

[$\mathbf{A}\ \vec{b}$]=$\begin{pmatrix}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&3&4\\0&0&1&-1&0&5\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$ となったとき，

rank($\mathbf{A}$)=rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$])=3だから，解が存在し，5−3=2個の任意定数を含んでいる．

先頭の1に対応しない未知数を$x_4=c_4$，$x_5=c_5$とおくと，$x_1=-c_4$，$x_2=4-3c_5$，$x_3=5+c_4$，$x_4=c_4$，$x_5=c_5$となり，

ベクトルを用いて，

$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\4\\5\\0\\0\end{bmatrix}+c_4\begin{bmatrix}-1\\0\\1\\1\\0\end{bmatrix}+c_5\begin{bmatrix}0\\-3\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ と書くことができる．

○　例４

未知数x_1，x_2の連立１次方程式において，拡大係数行列の基本形が [$\mathbf{A}\ \vec{b}$]=$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ となるときは，

rank($\mathbf{A}$)=2，rank([$\mathbf{A}\ \vec{b}$])=3だから，解は存在しない．

○　例５

未知数x_1，x_2の連立１次方程式において，拡大係数行列の基本形が $[\mathbf{A}\ \vec{b}\,]=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$ となるときは，

rank($\mathbf{A}$)=rank($[\mathbf{A}\ \vec{b}\,]$)=2だから，ただ１つの解が存在し，$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ と表わすことができる．

○　連立１次方程式$\mathbf{A}\,\vec{x}=\vec{b}$ の定数項（右辺）が零ベクトル$\vec{0}$であるとき，すなわち，

$$\mathbf{A}\,\vec{x}=\vec{0}$$

のとき，この方程式を**同次形**の連立１次方程式という．

同次形の連立１次方程式は，つねに $\vec{x}=\vec{0}$ を解にもつ．この解を**自明な解**という．（ $0a_{i1}+0a_{i2}+\cdots+0a_{in}$ が 0 に等しいのは自明の真理である．）

同次形の連立１次方程式では，行基本変形によって右辺に1が登場する余地はなく，明らかにrank($\mathbf{A}$)=rank ($[\mathbf{A}\ \vec{b}\,]$)が成り立つ．また前節に示したように，rank($\mathbf{A}$)≦mかつrank($\mathbf{A}$)≦nであるから，m＜nならばrank($\mathbf{A}$)≦m＜n となって，任意定数が現われる．よって，次の定理が成り立つ．

定理３

(1)　方程式の個数が m 個，未知数の個数が n 個の同次形連立１次方程式

$$\mathbf{A}\,\vec{x}=\vec{0}$$

が**自明な解のみ**をもつための必要十分条件は

rank ($\mathbf{A}$)=n

(2)　方程式の個数が m 個，未知数の個数が n 個の同次形連立１次方程式

$$\mathbf{A}\,\vec{x}=\vec{0}$$

は m ＜ n のとき**自明でない解**をもつ．

※　参考

○　上の定理２(1)は，行列$\mathbf{A}$の列ベクトル

$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$ が１次独立な場合に対応する．すなわち，

$$\vec{a_1}=\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\vdots\\a_{i1}\\\vdots\\a_{m1}\end{bmatrix}\quad\vec{a_2}=\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\vdots\\a_{i2}\\\vdots\\a_{m2}\end{bmatrix}\quad\cdots\cdots\quad\vec{a_n}=\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\vdots\\a_{in}\\\vdots\\a_{mn}\end{bmatrix}$$

とおくと，

「$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$ が１次独立」⇔「

$x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots+x_n\vec{a_n}=\vec{0}$ ならば

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$」

「$\mathbf{A}\,\vec{x}=\vec{0}$ が自明な解のみをもつ」⇔「$\mathbf{A}\,\vec{x}=\vec{0}$ ならば

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$」

○　上の定理２(2)は，行列 $\mathbf{A}$の列ベクトル

$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$ が１次従属な場合に対応する．

すなわち，

「$\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}$ が１次従属」⇔「

$x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots+x_n\vec{a_n}=\vec{0}$ が

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 以外の解をもつ」

「$\mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}$ が自明でない解をもつ」⇔「$\mathbf{A}\vec{x}=\vec{0}$ が $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 以外の解をもつ」

○　例 6

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=0 \\ x_1+2x_2-3x_3=0 \\ \quad 3x_2-4x_3=0 \end{cases}$$

の係数行列の基本変形は，次のようになる．

1行と2行の入れ替え

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2行+1行×(−2)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2行÷(−3)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1行+2行×(−2), 3行+2行×(−3)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3行÷5

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1行+3行×(−3), 2行+3行×3

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって，rank($\mathbf{A}$)=3

方程式は自明な解 $x_1=x_2=x_3=0$ をもつ．

○　例 7

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=0 \\ 2x_1+4x_2-6x_3=0 \\ 4x_1+11x_2-9x_3=0 \end{cases}$$

の係数行列の基本変形は，次のようになる．

2行+1行×(−2)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 11 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$

3行+１行×(−4)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2行と3行の入れ替え

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2行÷3

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1行+2行×(−2)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって，rank($\mathbf{A}$)=2となり，方程式は自明でない解をもつ．

$x_3=c_3$ とおくと $x_1=5c_3$，$x_2=-c_3$，$x_3=c_3$ だから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=c_3\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

■確認テスト■

次の空欄を埋めよ．（半角数字=1バイト文字を記入）

(1)　連立方程式

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=1 \\ x_1+3x_2=5 \end{cases}$$

の拡大係数行列の基本形を求める

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1\\1&3&5\end{pmatrix} \overset{\text{1行と2行の入れ替え}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&3&5\\3&2&1\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{2行+1行×(−3)}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&3&5\\ \square&-7&-14\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{2行÷(−7)}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&3&5\\0&\square&2\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{1行+2行×(−3)}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&\square&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

したがって，未知数の個数=$\square$，係数行列の階数=拡大係数行列の階数=$\square$ となり，方程式はただ1つの解をもつ．

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square\\ \square\end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

(2)　連立方程式

$$\begin{cases} x_1+3x_2-2x_3=2 \\ 2x_1+5x_2+x_3=4 \end{cases}$$

の拡大係数行列の基本形を求める

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-2&2\\2&5&1&4\end{pmatrix} \overset{\text{2行+1行×(−2)}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&3&-2&2\\0&-1&5&0\end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{2行×(−1)}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix}1&0&13&2\\0&1&-5&0\end{pmatrix}$$

したがって，未知数の個数=$\square$，係数行列の階数=拡大係数行列の階数=$\square$ となり，方程式は任意定数1つを含む解をもつ．

$x_3=c_3$ とおくと，$x_1=2-13c_3$，$x_2=5c_3$，$x_3=c_3$ となるから

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square\\0\\0\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}\square\\ \square\\ \square\end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

(3)　連立方程式

$$\begin{cases} x_1+3x_2=-1 \\ 2x_1-x_2=5 \\ x_1+x_2=0 \end{cases}$$

の拡大係数行列を基本形に直すと，$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ となる．

このとき，係数行列の階数は$\square$，拡大係数行列の階数は$\square$ となるから，この方程式の解は存在しない．

採点する　やり直す

(4)　次の同次形連立１次方程式が自明でない解をもつよう

に定数 a の値を定めるには，

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ ax_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$ の係数行列 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 6 \end{pmatrix}$ の基本形が

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6-2a \end{pmatrix}$ となることから，

未知数の個数= $\square$ に対して，係数行列の階数= $\square$ となればよいから， $6-2a=\square$ ， $a=\square$

採点する　やり直す

(5)　同次形連立１次方程式

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ \quad + 2x_3 = 0 \end{cases}$ の係数行列を基本形に直すと，

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ となる．

この同次形連立１次方程式の自明でない解は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$ と書ける．

採点する　やり直す

(6)　連立１次方程式

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix}$$ の解

は，

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$ と書ける．

採点する　やり直す