

2 ベクトルと基本概念2

- 前節でベクトルの1次結合

$\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n$ を学んだ。ここでは、1次結合に関わる重要な概念を解説する。

- ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ の1次結合が $\vec{0}$ になるのが特別な場合に限られるとき、すなわち、

「 $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$ となるのが、

$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ のときに限られるとき」、ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ は**1次独立**であるという。1次独立でないとき、**1次従属**であるという。

【1次独立の定義】

「 $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$ ならば
 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 」

が成り立つとき、 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ は**1次独立**であるという。

※ 「 $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$

← $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 」が、どんな $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ についても成立することは自明の理であるが、ここでは

「 $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 」すなわち、

「 $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$ 」となるのが、「 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$ 」の場合だけとなる $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ の組に注目している。

※ 「 $p \implies q$ 」は、その対偶「 q でない $\implies p$ でない」と真偽が一致するから、上に述べた1次独立の定義は、次のように言い換えることができる。

「 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ が1つでも0でなければ $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$ にはならない」

例えば、 $\lambda_1 \neq 0$ であるのに

$\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$ となるときは、両辺を λ_1 で割って移項すれば

$$\vec{u}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{u}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \vec{u}_3 - \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{u}_n$$

となり、 \vec{u}_1 が他の $\vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ の1次結合で表せることとなる。

このような $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ は1次独立ではない。すなわち、1次従属である。

λ_2 以下についても同様だから、一般に、いずれか1つのベクトル \vec{u}_k が他のベクトルの1次結合で表わされる組を1次従属、どのベクトルも他のベクトルの1次結合で表現できないときを1次独立と定義していることになる。(*)

例1

(1) $\vec{e}_1=(1, 0)$, $\vec{e}_2=(0, 1)$ は1次独立である。何故なら, $\lambda_1\vec{e}_1+\lambda_2\vec{e}_2=\vec{0}$ のとき, $\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1)=(0,0)$ より, $\lambda_1=\lambda_2=0$ が成り立つからである。

「 \Rightarrow 」や「ならば」という用語をクールに聞き流さないことが大切。変形していくと, $\lambda_1=\lambda_2=0$ になるとは, 「解があれば必ずこれを満たすはずである」ということ, つまり, 「これ以外にはない」という意味に理解することが重要。

(2) $\vec{u}_1=(1, 2)$, $\vec{u}_2=(2, 3)$ は1次独立である。何故なら, $\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2=\vec{0}$ のとき, $\lambda_1(1,2)+\lambda_2(2,2)=(0,0)$ より, λ_1, λ_2 は連立方程式
$$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=0 \\ 2\lambda_1+3\lambda_2=0 \end{cases}$$
 の解となり, $\lambda_1=\lambda_2=0$ が成り立つからである。(解があれば, $\lambda_1=\lambda_2=0$ になるとは, 他にはないということ。)

(3) $\vec{u}_1=(1, 2)$, $\vec{u}_2=(2, 4)$ は1次従属である。何故なら, $\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2=\vec{0}$ のとき, $\lambda_1(1,2)+\lambda_2(2,2)=(0,0)$ より, λ_1, λ_2 は連立方程式
$$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=0 \\ 2\lambda_1+4\lambda_2=0 \end{cases}$$
 の解となり, $\lambda_1=-2\lambda_2$ を満たす λ_1, λ_2 は0でなくともすべて解となる。

※ 「1次独立・1次従属は, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ の連立方程式が自明解 $\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$ 以外の解をもつかどうかで判断できる」が, この問題については, 次のように即答することもできる。

$\vec{u}_2=2\vec{u}_1$ となっている (\vec{u}_2 が \vec{u}_1 で表わされる) から, これら \vec{u}_1, \vec{u}_2 は1次従属である。(*↑)

(4) $\vec{u}=(1, 0)$, $\vec{v}=(0, 1)$, $\vec{w}=(2, 3)$ は1次従属である。何故なら, $\vec{w}=2\vec{u}+3\vec{v}$ となって \vec{w} が \vec{u}, \vec{v} で表せるからである。

連立方程式で調べると次のようになる。

$$\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}+\lambda_3\vec{w}=\vec{0}$$

ならば

$$\lambda_1(1,0)+\lambda_2(0,1)+\lambda_3(1,1)=(0,0)$$

より $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は連立方程式

$$\begin{cases} \lambda_1+\lambda_3=0 \\ \lambda_2+\lambda_3=0 \end{cases}$$

の解となり, $\lambda_1=\lambda_2=-\lambda_3$ を満たす $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は解となる。(自明解 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 以外に解が存在する。)

【要点】

- ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ について, $\lambda_1\vec{u}_1+\lambda_2\vec{u}_2+\dots+\lambda_n\vec{u}_n=\vec{0}$ が自明解 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$ 以外の解をもてばこれらの

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ は1次従属である。自明解のみをもつときは1次独立である。

○ ベクトル $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ について、いずれか1つのベクトル \vec{u}_k が他のベクトルの1次結合で表わされるとき、これらの $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n$ は1次従属である。どのベクトルも他のベクトルの1次結合で表現できないときは1次独立である。」

○ 2次元の数ベクトルは、 $\vec{x} = (x_1, x_2) \in R^2$ で表わされる。このとき、 $\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)$ の2つのベクトルを用いれば、どのようなベクトル \vec{x} でも \vec{e}_1, \vec{e}_2 の1次結合で表せる。

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) \\ &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2\end{aligned}$$

\vec{e}_1, \vec{e}_2 を R^2 の標準基底といい、 R^2 は \vec{e}_1, \vec{e}_2 によって

「生成される」「張られる」という。

○ 3次元の数ベクトルは、 $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in R^3$ で表わされる。このとき、 $\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ の3つのベクトルを用いれば、どのようなベクトル \vec{x} でも $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ の1次結合で表せる。

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) \\ &= x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3\end{aligned}$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ を R^3 の標準基底といい、 R^3 は $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ によって「生成される」「張られる」という。

○ ベクトルの組が R^2 や R^3 の部分集合を生成することがある。

例2

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ の1次結合の全体

$$L = \{ \vec{u} \mid \vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \} \quad (x, y \in R)$$

は、 $(x, y, 0)$ の形のベクトルを表わし、 R^3 を生成するわけではない。しかし、 L の任意の要素 \vec{u}, \vec{v} について、 \vec{u}, \vec{v} の1次結合 $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ は L の要素となる。

$$\begin{aligned}\lambda(u_1, u_2, 0) + \mu(v_1, v_2, 0) \\ = (\lambda u_1 + \mu v_1, \lambda u_2 + \mu v_2, 0) \in L\end{aligned}$$

○ 上の例のように、 R^n の部分集合 W の任意の要素 \vec{u}, \vec{v} の1次結合もまた W の要素となるとき、 W は \vec{u}, \vec{v} によって生成される（張られる）部分ベクトル空間であるという。

• W が R^n の部分集合で

$$\vec{u}, \vec{v} \in W, \lambda_1, \lambda_2 \in R \implies \lambda_1\vec{u} + \lambda_2\vec{v} \in W$$

(1次結合について閉じている)

が成り立つとき、 W を R^n の部分ベクトル空間という。

次のように定義してもよい。

•Wが \mathbb{R}^n の部分集合で

$$\vec{u}, \vec{v} \in W, \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in W, \lambda \vec{u} \in W$$

(和とスカラー倍について閉じている)

が成り立つとき, Wを \mathbb{R}^n の**部分ベクトル空間**という.

例3

(1) $\vec{a}_1 = (1, 1, 2), \vec{a}_2 = (-1, 1, 1)$ の1次結合の全体

$$H = \{ \vec{u} \mid \vec{u} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$

は, \mathbb{R}^3 の**部分ベクトル空間**で一つの平面を表わしている.

実際, $\vec{u}, \vec{v} \in H$ ならば $\vec{u} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2$,

$\vec{v} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2$ と表せるから,

$$\begin{aligned} x\vec{u} + y\vec{v} &= x(\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2) + y(\beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2) \\ &= (x\alpha_1 + y\beta_1) \vec{a}_1 + (x\alpha_2 + y\beta_2) \vec{a}_2 \in H \end{aligned}$$

なお, 一般に $\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2 = (\lambda + \mu) \frac{\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2}{\lambda + \mu}$ は,

\vec{a}_1, \vec{a}_2 の内分点(外分点)の定数倍だから, ベクトル

\vec{a}_1, \vec{a}_2 と同一平面上にある。($\lambda + \mu = 0$ のときも結果は正しい。)

上の場合, Hは \vec{a}_1, \vec{a}_2 で張られる**部分ベクトル空間**と呼ばれ, $H = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ と書く.

(2) 上の例(1)において, $\vec{b}_1 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (0, 2, 3)$,

$\vec{b}_2 = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = (2, 0, 1)$ とおくと,

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{b}_1 + \vec{b}_2}{2}, \quad \vec{a}_2 = \frac{\vec{b}_1 - \vec{b}_2}{2}$$

となるから, \vec{a}_1, \vec{a}_2 で表わされるベクトルは \vec{b}_1, \vec{b}_2 でも表わされ, Hは \vec{b}_1, \vec{b}_2 で張られる.

(1)(2)の例で, \vec{a}_1, \vec{a}_2 の組や \vec{b}_1, \vec{b}_2 の組はHの**基底**とい
い, その個数(=2)をHの**次元**という.

■確認テスト■

白枠には半角数字で答え, 緑枠には漢字で答えよ

(1) $\vec{u} = (1, 1), \vec{v} = (2, 3)$ のとき, \vec{u}, \vec{v} が1次独立かどうかを調べたい. 次の空欄を埋めよ.

$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = (2, 3) = \vec{0}$ のとき, $\lambda_1(1, 1) + \lambda_2(2, 3) = (0, 0)$ より, λ_1, λ_2 は次の連立方程式の解となる.

$$\lambda_1 + \square \lambda_2 = 0$$

$$\lambda_1 + \square \lambda_2 = 0$$

これを解くと, $\lambda_1 = \lambda_2 = \square$ となるから,

\vec{u}, \vec{v} は1次 である.

(2) $\vec{u} = (1, 1, -1), \vec{v} = (1, 2, 1), \vec{w} = (2, 3, 0)$ のとき, $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$ が成り立つ. このとき, $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ は1次 である.

(3) 次の空欄を埋めて、 R^2 の任意のベクトル $\vec{x} = (x, y)$ が、ベクトル $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1)$ の1次結合で表わされることを示せ.

「 $\vec{x} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$ となる λ_1, λ_2 が求められ
ばよい. x, y を与えられた数, λ_1, λ_2 を未知数
として, 次の連立方程式を解く.

$$\lambda_1 + \lambda_2 = x \quad \cdots (A)$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = y \quad \cdots (B)$$

$$\{(A)+(B)\} \div 2 \text{より } \lambda_1 = \frac{x+y}{\square},$$

$$\{(A)-(B)\} \div 2 \text{より } \lambda_2 = \frac{x-y}{\square} \text{ となるから,}$$

任意のベクトル $\vec{x} = (x, y)$ は、ベクトル
 $\vec{u} = (1, 1)$, $\vec{v} = (1, -1)$ の1次結合で表わされ
る. 」

(4) $\vec{a}_1 = (0, 1, -1)$, $\vec{a}_2 = (1, -1, 1)$ とするとき, $\vec{u} =$
(1, 0, k) が \vec{a}_1, \vec{a}_2 で張られる部分ベクトル空間
 $H = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]$ のベクトルとなるように定数 k の値を定め
よ. (空欄を埋めよ.)

$\vec{u} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ が成立するように k の値を
定める.

$$(1, 0, k) = \lambda_1 (0, 1, -2) + \lambda_2 (1, -1, 1) \text{ より}$$

$$1 = \lambda_2$$

$$0 = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$k = -2\lambda_1 + \lambda_2 \text{ を解くと}$$

$$\lambda_1 = \square, \lambda_2 = \square \text{ だから } k = \square$$

(5) \vec{u}, \vec{v} を基底とする部分ベクトル空間において, ベクトル
 \vec{x} が \vec{u}, \vec{v} を用いて, $\vec{x} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$ と表わされると
き, λ_1, λ_2 を基底 \vec{u}, \vec{v} に関する \vec{x} の"成分"と呼ぶことにす
る. 例えば, $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$ を基底とする部
分ベクトル空間において, ベクトル $\vec{x} = (x, y, 0)$ は,
 $\vec{x} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ と表わされるから, \vec{e}_1, \vec{e}_2 に関する \vec{x}
の"成分"は x, y となる.

ベクトル $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (1, -1, 0)$ を基
底とする部分ベクトル空間において, 基底
 \vec{u}, \vec{v} に関するベクトル $\vec{x} = (5, 3, 0)$ の"成
分"を求めよ. (空欄を埋めよ.)

「 $\vec{x} = \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v}$ となる λ_1, λ_2 を求める.

$$5 = \lambda_1 + \lambda_2$$

$$3 = \lambda_1 - \lambda_2 \text{ を解いて}$$

$$\lambda_1 = \square, \lambda_2 = \square \text{ が求める"成分"となる. 」}$$

Check Reset