← PC版は別頁

1　ベクトルと基本概念１

○　n 個の数$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を順序をつけて横に並べたもの：

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

を**n 次元数ベクトル**という．数を横に並べているので，**横ベクトル**または**行ベクトル**ともいう．
　個々の数$x_1, x_2, \cdots, x_n$ はベクトルの**成分**と呼ばれる．

○　数を縦に並べたもの

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

を**縦ベクトル**または**列ベクトル**という．

例1　ある人の今日の朝食代が200円，昼食代が300円，夕食代が500円のとき，この人の今日の食費は，ベクトル
　(200, 300, 500)
で表わすことができる．このとき，１番目の数字を朝食代，２番目の数字を昼食代，…としているから，
　(300, 200, 500)
とすれば，朝食代と昼食代が入れ替わってしまう．

※　ベクトルのように，数字の並び方を変えれば内容が変わるものを表わすとき，数学では丸い括弧 (,) を使う．
※　高校の数学では，ベクトルは n=2, 3 次元のときだけを扱い，図形と結びつけて理解したが，以下においてベクトルは「成分の順序に重要な意味のある情報」と理解すればよく，４次元以上の図示できない場合も取り扱う．また，以下の内容を理解するには，高校でベクトルを学んでいなくても差し支えない．

○　ベクトルは，$\vec{v}$ や $\boldsymbol{v}$ のように矢印の付いた文字や太文字で表わされる．
○　ベクトルには，２つの演算：**和**と**スカラー倍**が定義され，それらもベクトルになる．
　$\vec{u}, \vec{v}$ が n 次元の実数ベクトルであるとき，$\vec{u}=(u_1, u_2, \cdots, u_n)$，$\vec{v}=(v_1, v_2, \cdots, v_n)$とおくと，
　$\vec{u}+\vec{v}, \lambda\vec{u}$ も n 次元の実数ベクトルになり，
　$\vec{u}+\vec{v}=(u_1, u_2, \cdots, u_n)+(v_1, v_2, \cdots, v_n)=(u_1+v_1, u_2+v_2, \cdots, u_n+v_n)$
　$\lambda\vec{u}=\lambda(u_1, u_2, \cdots, u_n)=(\lambda u_1, \lambda u_2, \cdots, \lambda u_n)$である．

よく使うギリシャ文字の読み方

例2　夫の今日の朝食代が200円，昼食代が 300円，夕食代が 500円，妻の今日の朝食代が250円，昼食代が150円，夕食代が550円のとき，
　夫の今日の食費を表わすベクトルは，
　　$\vec{u}=(200, 300, 500)$
　妻の今日の食費を表わすベクトルは，
　　$\vec{v}=(250, 150, 550)$

この二人の今日の食費を表わすベクトルは，

$\vec{u}+\vec{v}$=(200+250, 300+150, 500+550)=(450, 450, 1050)となる．

また，夫の30日間の食費を表わすベクトルは，

$30\vec{u}$=30(200, 300, 500)=(6000, 9000, 15000)となる．

※　上に述べたことは，**ベクトル空間**という数学用語を用いて，次のように表わすことができる。

「すべてのｎ次元の実数ベクトルがつくる集合を**ベクトル空間**といいR^{n}で表わす．このとき，R^{n}のどんな要素をもってきても，それらの**和**と**スカラー倍**は，R^{n}の要素となる．」

$\vec{u},\ \vec{v}\in R^n$ならば $\vec{u}+\vec{v}\in R^n,\ \lambda\vec{u}\in R^n$

○　ベクトルの和およびスカラー倍については，次の関係が成り立つ．(ベクトル空間の任意の要素 $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\in R^n$ および実数 $\lambda\in R$ について，次の関係が成り立つ．これらはベクトル空間の公理と呼ばれるが，ここでは深入りしない．)

$\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}\in R^n$ および実数 $\lambda,\ \mu\in R$ について

◇文字式の和と類似の性質◇

(1)　任意の $\vec{u},\ \vec{v}$ に対して $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

…足されるベクトル，足すベクトルを入れ替えても結果は変わらない．

(2)　任意の $\vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w}$ に対して

$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

…３つ(以上)のベクトルの和は，どの順に和を求めても結果は変わらない．どちらの意味に解釈されても同じものとなるので， $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}$ と書くことができる．

(3)　任意の $\vec{u}$ に対して次が成り立つようなベクトル $\vec{0}$ が存在する． $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$

…１つのベクトル空間では， $\vec{0}$ はすべてのベクトル $\vec{u}$ に共通なものがただ１つ存在する．

(4)　任意の $\vec{u}$ に対してそれぞれ

$\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$ となるベクトル $-\vec{u}$ が存在する．

…逆ベクトル $-\vec{u}$ はそれぞれのベクトル $\vec{u}$ に対応して１つずつある．

…ベクトルの和 $\vec{u}+(-\vec{v})$ は $\vec{u}-\vec{v}$ と書いてよい．

◇文字式の定数倍と類似の性質◇

(5)　任意の $\vec{u}$ に対して $1\vec{u}=\vec{u}$

(6)　任意の $\lambda,\ \mu,\ \vec{u}$ に対して $\lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u}$

(7)　任意の $\lambda,\ \mu,\ \vec{u}$ に対して

$(\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u}$

(8)　任意の $\lambda,\ \vec{u},\ \vec{v}$ に対して

$\lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v}$

○　ベクトル $\vec{u_1},\ \vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ のスカラー倍の和

$$\vec{u}=\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}+\cdots+\lambda_n\vec{u_n}$$

をベクトル $\vec{u_1},\ \vec{u_2},\cdots,\vec{u_n}$ の**１次結合**という．

例3

(1) $\vec{u_1}=(1,2)$, $\vec{u_2}=(2,3)$ のとき,

$\vec{u_1}$ と $\vec{u_2}$ が平行でない場合の例を示しています

$\vec{u_3}=(4,7)$ は $\vec{u_3}=2\vec{u_1}+1\vec{u_2}$ のように $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$ の１次結合で表わされる.

(2) $\vec{u_1}=(1,2)$, $\vec{u_2}=(2,4)$ のとき,

$\vec{u_1}$ と $\vec{u_2}$ が平行である場合の例を示しています

なぜならば, $\vec{u_1}$ と $\vec{u_2}$ のある１次結合に対して $\vec{u_3}=\lambda_1\vec{u_1}+\lambda_2\vec{u_2}$ が成り立つとすると,

$$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=4 \\ 2\lambda_1+4\lambda_2=7 \end{cases}$$

となって,

$$\begin{cases} 2\lambda_1+4\lambda_2=8 \\ 2\lambda_1+4\lambda_2=7 \end{cases}$$

を満たす λ_1, λ_2 が存在することになり，矛盾となるからである.

○　ベクトル $\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と $\vec{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ の**内積** $\vec{x}\cdot\vec{y}$ を次の式で定義する.

$$\vec{x}\cdot\vec{y}=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

※　ベクトルの内積はベクトルになるのではなく，単なる数になることに注意.

例4

(1) りんご，かき，みかん１個の価格が各々150円，100円，80円であるとき，これらの果物の価格はベクトル

$\vec{x}$ =(150, 100, 80)

で表わされる．また，りんご，かき，みかんを各々3個，4個，5個セットにした贈り物の果物の個数は，ベクトル

$\vec{y}$ =(3, 4, 5)

で表わされる．このとき，贈り物１セットの合計価格は

$\vec{x}\cdot\vec{y}$ =150・3+100・4+80・5=1250 (円)

で表せる.

(2) ある人の１日当りの朝食代が 300円，昼食代が500円，夕食代が 800円のとき，この人の１日の食費は，ベクトル

$\vec{x}$ =(300, 500, 800)

で表わすことができる．この人が１週間に朝食，昼食，夕食を各々5回，6回，7回食べたとき，この人の１週間の食事回数は，ベクトル

$\vec{y}$ =(5, 6, 7)

で表わされる．このとき，この人の１週間の食事代金は,

$\vec{x}\cdot\vec{y}$ =300・5+500・6+800・7=10100 (円)

で表せる．なお，この人の１日３食の食事代金は

$\vec{z}$ =(1, 1, 1)

とおくと

$\vec{x}\cdot\vec{z}$ =300・1+500・1+800・1=1600 (円)

で計算できる.

■確認テスト■　次の計算をせよ．（入力は半角数字で）

(1) $\vec{u}$ =(2, 3), $\vec{v}$ =(4, 5)のとき, $\vec{u}+\vec{v}$ =(,)

(2) $\vec{u}$ =(2, 3, 4)のとき, $5\vec{u}$ =(, ,)

(3) $\vec{u}$ =(1, 3), $\vec{v}$ =(2, 5)のとき,
$2\vec{u}+3\vec{v}$ =(,)

(4) $\vec{u}$ =(1, −2, 3), $\vec{v}$ =(3, 4, 5)のとき,
$3\vec{u}-5\vec{v}$ =(, ,)

(5) $\vec{x}$ =(−2, 3), $\vec{y}$ =(4, 5)のとき, $\vec{x}\cdot\vec{y}$ =

(6) $\vec{x}$ =(6, −3, 2), $\vec{y}$ =(1, 3, −2)のとき, $\vec{x}\cdot\vec{y}$ =

Check Reset