→ スマホ版は別頁

13　固有値

　この章では，行列は断らない限り**正方行列**を扱い，n 次方程式がつねに解をもつように，数値は複素数までの範囲で考える．

（※ 複素数全体の集合は C で表わす．$\lambda\in C$ とは，λが複素数全体の集合の要素であること，すなわち１つの複素数であることを表わす．$\vec{p}\in C^n$ は $\vec{p}$ が n 個の複素数を成分とするベクトルであることを表わす．）

○　固有値の定義

n 次正方行列 A に対して

$$A\vec{p}=\lambda\vec{p}\quad(\vec{p}\in C^n,\ \vec{p}\neq\vec{0},\ \lambda\in C)$$

を満たすスカラー λ を行列 A の**固有値**(Eigenvalue)，といい，$\vec{p}$ を固有値 λ に属する**固有ベクトル**(Eigenvector)という．

例 1

$A=\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}$ $\vec{p_1}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\vec{p_2}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=9\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$$

となり，$\lambda_1=9$ は A の固有値であり，$\vec{p_1}$ は λ_1 に属する固有ベクトルである．

また，$\lambda_2=4$ も A の固有値であり，$\vec{p_2}$ は λ_2 に属する固有ベクトルである．

○　$\vec{p}$ が固有値λに属する固有ベクトルであるならば，その任意の 0 以外の定数倍 $c\vec{p}$ もまた固有値λに属する固有ベクトルである．実際，$A\vec{p}=\lambda\vec{p}\quad(\vec{p}\in C^n,\ \vec{p}\neq\vec{0},\ \lambda\in C)$ ならば $Ac\vec{p}=\lambda c\vec{p}\quad(c\vec{p}\in C^n,\ c\vec{p}\neq\vec{0},\ \lambda\in C)$ となるからである．

○　固有値と固有ベクトルを求めるには，$A\vec{p}=\lambda\vec{p}$ すなわち $(A-\lambda E)\vec{p}=\vec{0}$ が $\vec{p}=\vec{0}$ 以外の解をもつようなλの値を求める必要がある．

n 次正方行列 A に対して，n 次多項式

$$ch_A(\lambda)=|\lambda E-A|$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

（書物によっては，$ch_A(\lambda)$ を $|A-\lambda E|$ で定義することがある．）

を$\mathbf{A}$の**固有多項式**（または特性多項式Characteristic polynomial）という．

また，これを 0 とおいたλの n 次方程式

$$ch_A(\lambda)=|\lambda E-A|=0$$

を$\mathbf{A}$の**固有方程式**（または特性方程式Characteristic equation）という．

例 2

$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ に対して固有多項式 $ch_A(\lambda)$ を求めると，

$$\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)$$

$$=\lambda^2-\mathrm{trace}(A)\lambda+|A|$$

（ただし，trace $(\mathbf{A})$は対角成分の和 $a+d$）

　一般に，n 次正方行列$\mathbf{A}$に対しても次が成り立つ．

$ch_A(\lambda)=|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\lambda^n-\mathrm{trace}(\mathbf{A})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\mathbf{A}|$

（ただし，trace $(\mathbf{A})$ は対角成分の和 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$）

定理８
λ_0 が行列 A の固有値となるための必要十分条件は，$ch_A(\lambda_0)=0$ となることである．

（証明）
(→)
λ_0 が行列 A の固有値，すなわち $A\vec{p}=\lambda_0\vec{p}$ $(\vec{p}\neq\vec{0})$ → $(A-\lambda_0E)\vec{p}=\vec{0}$ $(\vec{p}\neq\vec{0})$ のとき，

$ch_A(\lambda_0)=|\lambda_0E-A|\neq0$ ならば $(A-\lambda_0E)^{-1}$ が存在することとなり，

$(A-\lambda_0E)\vec{p}=\vec{0}$ に左から $(A-\lambda_0E)^{-1}$ を掛けると，$\vec{p}=\vec{0}$ となって矛盾．

したがって，$ch_A(\lambda_0)=0$

(←)
$ch_A(\lambda_0)=|\lambda_0E-A|=0$ ならば，

λ_0E-A は正則でないから，同次方程式 $(A-\lambda_0E)\vec{p}=\vec{0}$ は，自明でない解をもつ．

このとき $\vec{p}$ は，固有値 λ_0 に属する固有ベクトルとなっている．

○　固有方程式 $ch_A(\lambda)=0$ はλの n 次方程式なので，複素数の範囲で重複を含めてちょうど n 個の解 λ_1，λ_2，$\cdots$，λ_n をもつ．（ガウスの定理，代数学の基本定理）

○　以上から，固有値と固有ベクトルを求めるには，「固有方程式を解いて固有値を求め」「各々の固有値に対する同次方程式の自明でない解を固有ベクトルとすればよい．」

例３
行列 $A=\begin{pmatrix}8&1\\4&5\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

（解答）
$ch_A(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-8&-1\\-4&\lambda-5\end{vmatrix}=\lambda^2-13\lambda+36=0$ を解くと，$\lambda=4,9$

ア）　$\lambda=4$ のとき，

$(\lambda E-A)\vec{p}=\begin{pmatrix}4-8&-1\\-4&4-5\end{pmatrix}\vec{p}$

$(\lambda E-A)\vec{p}=\begin{pmatrix}-4&-1\\-4&-1\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$

(※ $(\lambda E-A)\vec{p}=\vec{0}$ としても $(A-\lambda E)\vec{p}=\vec{0}$ としても同じである．以下同様．)

拡大係数行列において(2)行−(1)行の変形を行うと，

$\begin{pmatrix}-4&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$-4x_1-x_2=0$ となるから $x_1=c$ とおくと

$\vec{p}=c\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ $(c\neq0)$

イ）　$\lambda=9$ のとき，

$(\lambda E-A)\vec{p}=\begin{pmatrix}9-8&-1\\-4&9-5\end{pmatrix}\vec{p}$

$(\lambda E-A)\vec{p}=\begin{pmatrix}1&-1\\-4&4\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$

拡大係数行列において(2)行+(1)行×4の変形を行うと，

$\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$x_1-x_2=0$ となるから $x_2=d$ とおくと

$\vec{p}=d\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(d\neq0)$

固有値 $\lambda=4$，固有ベクトル $\vec{p}=c\begin{pmatrix}1\\-4\end{pmatrix}$ $(c\neq0)\ldots$ (答)

固有値 $\lambda=9$，固有ベクトル $\vec{p}=d\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $(d\neq0)\ldots$ (答)

例４
行列 $B=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ．

（解答）
$ch_B(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2+1=0$ を解くと，$\lambda=\pm i$（i は虚数単位）

ア）　$\lambda=i$ とき，

$(\lambda E-B)\vec{p}=\begin{pmatrix}i&-1\\1&i\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$

拡大係数行列において(1)行÷i の変形を行うと，　(参考 $i^2=-1\rightarrow\frac{-1}{i}=i$)

$\begin{pmatrix}1&i\\1&i\end{pmatrix}\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

拡大係数行列において(2)行−(1)行の変形を行うと

$\begin{pmatrix}1&i\\0&0\end{pmatrix}\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ $x_1+ix_2=0$ となるから

$x_2=c$ とおくと, $\vec{p}=c\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$

イ) $\lambda=-i$のとき,

$(\lambda E-B)\vec{p}=\begin{pmatrix}-i&-1\\1&-i\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$

拡大係数行列において(1)行÷ ($-i$) の変形を行うと, (参考 $i^2=-1\rightarrow\dfrac{-1}{-i}=-i$)

$\begin{pmatrix}1&-i\\1&-i\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$

拡大係数行列において(2)行−(1)行の変形を行うと

$\begin{pmatrix}1&-i\\0&0\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$

$x_1-ix_2=0$ となるから, $x_2=d$ とおくと,

$\vec{p}=d\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ $(d\neq 0)$

固有値 $\lambda=i$, 固有ベクトル $\vec{p}=c\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$… (答)

固有値 $\lambda=-i$, 固有ベクトル $\vec{p}=d\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix}$ $(d\neq 0)$… (答)

(※この例のように, 行列の成分がすべて実数の場合でも, 固有値が虚数となり, 固有ベクトルが複素数を成分とするベクトルとなることがある.)

例 5

行列 $C=\begin{pmatrix}-3&-2&-1\\0&1&2\\3&4&5\end{pmatrix}$の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(解答)

$ch_C(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda+3&2&1\\0&\lambda-1&-2\\-3&-4&\lambda\end{vmatrix}$ を解くと,

$(\lambda+3)\begin{vmatrix}\lambda-1&-2\\-4&\lambda-5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}2&1\\\lambda-1&-2\end{vmatrix}=0$

$(\lambda+3)\{(\lambda-1)(\lambda-5)-8\}-\{-4-(\lambda-1)\}=0$

$(\lambda+3)(\lambda^2-6\lambda-3)+3(\lambda+3)=0$

$(\lambda+3)(\lambda^2-6\lambda)=0$

$(\lambda+3)\lambda(\lambda-6)=0$

を解くと, $\lambda=-3,0,6$

ア) $\lambda=-3$のとき

$(\lambda E-C)\vec{p}=\begin{pmatrix}-3+3&2&1\\0&-3-1&-2\\-3&-4&-3-5\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$

$\begin{pmatrix}0&2&1\\0&-4&-2\\-3&-4&-8\end{pmatrix}\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

拡大係数行列において(2)行+(1)行×2, (3)行+(1)行×2の変形を行うと

$\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\-3&0&-6\end{pmatrix}\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

(3)行÷(−3)の変形を行うと

$\begin{pmatrix}0&2&1\\0&0&0\\1&0&2\end{pmatrix}\vec{p}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$2x_2+x_3=0$

$x_1+2x_3=0$

となるから

$x_3=c_3$ とおくと

$\vec{p}=c_3\begin{pmatrix}-2\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

さらに $c_3=2c$ とおくと

$\vec{p}=c\begin{pmatrix}-4\\-1\\2\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$

イ)　$\lambda=0$ のとき

$$(\lambda E-C)\vec{p}=\begin{pmatrix}3&2&1\\0&-1&-2\\-3&-4&-5\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

拡大係数行列において行の変形を行うと･･･（途中経過略）･･･

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$x_1-x_3=0$

$x_2+2x_3=0$

となるから，$x_3=d$ とおくと

$$\vec{p}=d\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\ (d\neq 0)$$

ウ)　$\lambda=6$ のとき

$$(\lambda E-C)\vec{p}=\begin{pmatrix}6+3&2&1\\0&6-1&-2\\-3&-4&6-5\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}9&2&1\\0&5&-2\\-3&-4&1\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

拡大係数行列において行の変形を行うと･･･（途中経過略）･･･

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&5&-2\\2&1&0\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$5x_2-2x_3=0$

$2x_1+x_2=0$

となるから，$x_2=c_2$ とおくと

$$\vec{p}=c_2\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}\ (c_2\neq 0)$$

さらに $c_2=2e$ とおくと

$$\vec{p}=e\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}\ (e\neq 0)$$

固有値 $\lambda=-3$，固有ベクトル $\vec{p}=c\begin{pmatrix}-4\\-12\end{pmatrix}\ (c\neq 0)\dots$ (答)

固有値 $\lambda=0$，固有ベクトル $\vec{p}=d\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\ (d\neq 0)\cdots$ (答)

固有値 $\lambda=6$，固有ベクトル $\vec{p}=e\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}\ (e\neq 0)\cdots$ (答)

■確認テスト■

(1)

行列 $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

[途中経過：**見る**　|　**隠す**]

固有方程式 $\begin{vmatrix}\lambda-1&2\\3&\lambda-2\end{vmatrix}=0$

$\lambda^2-3\lambda-4=0$

の解は $\lambda=4,\ -1$

ア）固有値λ= *4* のとき,

$$\begin{pmatrix}3&-2\\-3&2\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}3&-2\\0&0\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$3x_1-2x_2=0$ を満たすから

固有ベクトルは $\vec{p}=c\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\ (c\neq 0)$

イ）固有値λ= *−1* のとき,

$$\begin{pmatrix}-2&-2\\-3&-3\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$x_1+x_2=0$ を満たすから

固有ベクトルは $\vec{p}=d\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\ (d\neq 0)$

(2)
行列 $A=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

[途中経過：**見る**　|　**隠す**]
固有方程式 $\begin{vmatrix}\lambda+1 & 2\\ 2 & \lambda-2\end{vmatrix}=0$
$\lambda^2-\lambda-6=0$
の解は $\lambda=3,\ -2$
ア）固有値λ= 3 のとき,
$\begin{pmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$
$2x_1+x_2=0$ を満たすから
固有ベクトルは $\vec{p}=c\begin{pmatrix}1\\ -2\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$
イ）固有値λ= -2 のとき,
$\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$
$x_1-2x_2=0$ を満たすから
固有ベクトルは $\vec{p}=d\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ $(d\neq 0)$

---

(3)
行列 $A=\begin{pmatrix}-7 & 6 & 4\\ -7 & 6 & 4\\ -2 & 2 & 1\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

[途中経過：**見る**　|　**隠す**]
固有方程式 $\begin{vmatrix}\lambda+7 & -6 & -4\\ 7 & \lambda-6 & -4\\ 2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=0$
$\lambda^3-\lambda=0$
$(\lambda-1)\lambda(\lambda+1)=0$
の解はλ= $-1,\ 0,\ 1$
ア）固有値λ= -1 のとき,
$\begin{pmatrix}6 & -6 & -4\\ 7 & -7 & -4\\ 2 & -2 & -2\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$
$x_1-x_2=0$
$x_3=0$
を満たすから
固有ベクトルは $\vec{p}=c\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$
イ）固有値λ= 0 のとき,
$\begin{pmatrix}7 & -6 & -4\\ 7 & -6 & -4\\ 2 & -2 & -1\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$
$x_1-2x_2=0$
$x_1-x_3=0$
を満たすから
固有ベクトルは $\vec{p}=d\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}$ $(d\neq 0)$
[※零ベクトル $\vec{0}$ の固有ベクトルはないが，零という固有値はあることに注意]
ウ）固有値λ= 1 のとき,
$\begin{pmatrix}8 & -6 & -4\\ 7 & -5 & -4\\ 2 & -2 & 0\end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$
$x_1-2x_2=0$
$x_1-2x_3=0$
を満たすから
固有ベクトルは $\vec{p}=e\begin{pmatrix}2\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$ $(e\neq 0)$

---

(4)
行列 $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 6\\ 0 & 2 & 5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

[途中経過：**見る**　|　**隠す**]
固有方程式 $\begin{vmatrix}\lambda-1 & -4 & -6\\ 0 & \lambda-2 & -5\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=0$
$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)=0$

の解はλ= *1, 2, 3*

ア）固有値λ= *1* のとき,

$$\begin{pmatrix} 0 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$$x_2=0$$

$$x_3=0$$

を満たすから

固有ベクトルは $\vec{p}=c\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(c\neq 0)$

イ）固有値λ= *2* のとき,

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$$x_1-4x_2=0$$

$$x_3=0$$

を満たすから

固有ベクトルは $\vec{p}=d\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $(d\neq 0)$

ウ）固有値λ= *3* のとき,

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\vec{p}=\vec{0}$$

$$x_1-13x_3=0$$

$$x_2-5x_3=0$$

を満たすから

固有ベクトルは $\vec{p}=e\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(d\neq 0)$