→ スマホ版は別頁

12　行列式３

○　はじめに

　この節では，**余因子**というスカラーを定義し，行列式を計算するための**余因子展開**について述べる．次に，余因子を要素とする**余因子行列**を定義し，逆行列との関連を述べる．

○　前節5.2で述べた行列式の値を次数を下げて計算する方法は，次のようになっていた．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ または } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

　この $(1,1)$ 成分と残り $n-1$ 次の行列式という組合せで次数を下げる方法は，行の入れ替えを用いると次のように拡張できる．

　$(2,1)$ 成分のみ 0 でなく，他の 1 列目の成分が 0 であるとき，

1行と2行を入れ替え

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

次数が下がる

$$= (-1)a_{21}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

　一般に，$(i,1)$ 成分のみ 0 でなく，他の 1 列目の成分が 0 であるとき，直接 i 行と 1 行を入れ替えると，1回で入れ替えできるが，行列成分の並び方が変わって定式化しにくい．これに対して，i 行を順次上の行と入れ替えていくと，$i-1$ 回の入れ替えで，1 行目に来るようにできる．

１つ上の行と入れ換える

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

順次上の行と入れ替える［i−1回］

$$= (-1)^{i-1}\begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{i-1\,2} & \cdots & a_{i-1\,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

　列の入れ替えについても１回の入れ替えで符号が１回変わるから，(i,j) 成分のみ 0 でなく，他の j 列目の成分が 0 であるとき，同様にして，まず第 j 列を第 1 列まで順次入れ替えてから，次に第 i 行を順次第 1 行まで入れ替えればよい

１つ左の列と入れ換える

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & 0 & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

順次左の列と入れ替える［ j−1 回］

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}$$

$$
=(-1)^{j-1}\begin{vmatrix} 0 & \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ {\color{red}a_{ij}} & a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

順次上の行と入れ替える［ i−1 回］

$$
=(-1)^{j-1+i-1}\begin{vmatrix} {\color{red}a_{ij}} & a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} {\color{red}a_{ij}} & a_{i1} & \cdots & a_{i\,j-1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

次数が下がる

$$
=(-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,j-1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,j-1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

行についても同様だから，$n-1$ 次の正方行列で a_{ij} を除く i 行または j 列の他の成分がすべて 0 のとき，i 行と j 列を除いた $n-1$ 次の行列式で表わすことができる．

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & {\color{red}0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & {\color{red}0} & & \vdots \\ a_{ij} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & {\color{red}0} & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & {\color{red}0} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{または} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & a_{ij} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ \vdots & & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=(-1)^{i+j}a_{ij}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

○ **余因子**の定義

n 次正方行列 $A=[a_{ij}]$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $n-1$ 次の正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けた（※波線は取り除く部分）

$$
A_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

を ***(i, j)* 余因子**という．

例 1

$$
A=\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \end{pmatrix} \text{とするとき，}
$$

$$
A_{11}=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=-8
$$

$$
A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}=-14
$$

（※余因子は行列式なので，スカラー（単なる数）となる．）

余因子 $\mathbf{A}_{ij}$ を用いると，上に述べた行列式の次数を下げる変形は次の形で表わされる．

$$
\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & {\color{red}0} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & {\color{red}0} & & \vdots \\ a_{ij} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & {\color{red}0} & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & {\color{red}0} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{または} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ {\color{red}0} & {\color{red}0} & a_{ij} & {\color{red}0} & {\color{red}0} \\ \vdots & & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

$$
=a_{ij}A_{ij}
$$

○ **余因子展開**

正方行列$\mathbf{A}$の第j列を

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{n-1\,j} \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{ij} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

と分けて，行列式の線形性を用いると

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

となる．これを行列式$|\mathbf{A}|$の**第j列に関する余因子展開**という．

同様にして，行列式$|\mathbf{A}|$の**第i行に関する余因子展開**

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

が得られる．

例 2

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

を第2列で展開すると，

$$|A| = 4A_{12} + 5A_{22} + 6A_{32}$$

$$= 4\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 6\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -4\cdot(-6) + 5\cdot(-11) - 6\cdot(-4) = -7$$

例 3

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

を第1行で展開すると，

$$|A| = 3A_{11} + 4A_{12} + (-1)A_{13}$$

$$= 3\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot(-8) + (-4)\cdot(-6) + (-1)\cdot 7 = -7$$

○　**余因子行列**

n次正方行列 $A = [a_{ij}]$に対し

$$\widetilde{A} = {}^t[A_{ij}]$$

を$\mathbf{A}$の**余因子行列**という．

(※余因子はスカラー（単なる数）であるので，余因子行列は成分を余因子に置き換え，さらに転置した行列で

あることが重要)

例 4

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると

$A_{11}=d, A_{12}=-c, A_{21}=-b, A_{22}=a$ であるから

$$\begin{aligned}\widetilde{A}&={}^t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\\ &={}^t\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 5

$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ とすると

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}=-3$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}=6$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}=-3$

… …

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}=-3$

であるから

$$\begin{aligned}\widetilde{A}&={}^t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{33} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}\\ &={}^t\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} -3 & 6 & -3 \\ 6 & -12 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

○ 余因子行列 $\widetilde{A}$ と逆行列 A^{-1} は，次の関係を満たす．

> $|A|\neq 0$ ならば $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\widetilde{A}$

証明

$|A|\neq 0$ のとき，**クラメルの公式**を用いて A^{-1} を求めてみる．

$A^{-1}=X=[x_{ij}]=[x_1, x_2, \cdots, x_n]$ とおくと

$$AX=E$$

となればよい．

$$AX=[Ax_{ij}]=[Ax_1, Ax_2, \cdots, Ax_n]$$
$$E=[\vec{e_1}, \vec{e_2}, \cdots, \vec{e_n}]$$

だから

$$A\vec{x_j}=\vec{e_j} \quad (j=1, 2, \cdots, n)$$

となればよい．

$\vec{x_j}$ の第 i 成分は，

$$x_{ij}=\frac{|\ A \text{ の } i \text{ 列を } \vec{e_j} \text{ で置き替えたもの }|}{|A|}$$

$(j=1, 2, \ldots, n)$

であるが，この式の分子

$$\begin{array}{cl} \begin{array}{ccccc} & & \downarrow i\text{列} & & \end{array} & \\ \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

は，j 行 i 列成分が 1 となっているので，$(-1)^{j+i}A_{ji}$ に等しい．
すなわち，

$$X=A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}$$

が成り立つ．

○　また，これより次の定理が得られる．

定理７

$$A\widetilde{A}=\widetilde{A}A=|A|E$$

証明
ア)　$|A|\neq 0$ のとき，上に述べたことから，$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\widetilde{A}$ から

$$A\frac{1}{|A|}\widetilde{A}=E$$

分母を払えば

$$A\widetilde{A}=|A|E$$

$\widetilde{A}A=|A|E$ も同様にして示される．

イ)　$|A|=0$ のとき，
$\widetilde{A}$ の (i, j) 成分が A_{ji} であることに注意すると，$A\widetilde{A}$ の (i, j) 成分は

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

となるが，
(1) $i=j$ のとき，
　この式は，行列式 $|A|$ の**第 i 行に関する余因子展開**と等しく，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=|A|=0$$

(2) $i\neq j$ のとき，
$\mathbf{A}$ の第 j 行を第 i 行で置き換えた行列の行列式

$$\begin{array}{cl}\begin{vmatrix}\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

を第 j 行に関して余因子展開すると，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

ところが，この行列式は第 i 行と第 j 行が等しいから前節で述べた定理５により，0 となる．

例６

$$A=\begin{pmatrix}1 & 5 & -4 \\ 2 & 10 & -9 \\ -1 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

の余因子行列と逆行列を求めよ．
（解答）

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{pmatrix}10 & -9 \\ -2 & 2\end{pmatrix}=2$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{pmatrix}2 & -9 \\ -1 & 2\end{pmatrix}=5$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{pmatrix}2 & 10 \\ -1 & -2\end{pmatrix}=6$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{pmatrix}5 & -4 \\ -2 & 2\end{pmatrix}=-2$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{pmatrix}1 & -4 \\ -1 & 2\end{pmatrix}=-2$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{pmatrix}1 & 5 \\ -1 & -2\end{pmatrix}=-3$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{pmatrix}5 & -4 \\ 10 & -9\end{pmatrix}=-5$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{pmatrix}1 & -4 \\ 2 & -9\end{pmatrix}=1$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{pmatrix}1 & 5 \\ 2 & 10\end{pmatrix}=0$$

$$\widetilde{A} = {}^t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{33} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$
$$= {}^t\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & -3 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$|A| = 3$ だから

$$A^{-1} = \frac{\widetilde{A}}{|A|} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ 5 & -2 & 1 \\ 6 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

■確認テスト■

（半角数字で答えよ）

(1)

行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \\ -5 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ について余因子 A_{23}, A_{31} を求めよ．

$A_{23} =$ $\square$

[途中経過：**見る** ｜ **隠す**]

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} = -7$$

$A_{31} =$ $\square$

[途中経過：**見る** ｜ **隠す**]

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = -12$$

---

(2)

次の行列式を第 *1* 行に関して余因子展開せよ．（結果として得られる行列式の値を書け）

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -6 & 4 \\ -5 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \square$$

[途中経過：**見る** ｜ **隠す**]

$$(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} + 0 + (-2)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= -76 + 18 = -58$$

---

(3)

次の行列式を第 *2* 列に関して余因子展開せよ．（結果として得られる行列式の値を書け）

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 7 \end{vmatrix} = \square$$

[途中経過：**見る** ｜ **隠す**]

$$0 + (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} + 0 = -4$$

---

(4)

次の行列の余因子行列を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -12 & \square \\ \square & 8 & 0 \\ -12 & \square & 3 \end{pmatrix}$$

[途中経過：**見る** ｜ **隠す**]

$${}^t\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$
$$= {}^t\begin{pmatrix} 0 & 8 & -12 \\ -12 & 8 & -6 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -12 & 6 \\ 8 & 8 & 0 \\ -12 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

---

(5)

$$A=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}$$

のとき，$A\widetilde{A}$ を求めよ．

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}-1&\square&0\\0&-1&0\\\square&0&\square\end{pmatrix}$$

[途中経過：**見る** | **隠す**]

$$\widetilde{A}={}^t\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{pmatrix}$$

$$={}^t\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&-1&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&-1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

だから $A\widetilde{A}$ を計算すると

$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

となる．

(別解)

定理７により，$A\widetilde{A}=|A|E$

また，$|A|=-1$

したがって，$A\widetilde{A}=-E$

Check Reset