→ スマホ版は別頁

10　行列式 1

決定する *determine* という動詞の派生語 *determinant* は，日本語では**行列式**と訳され，n 次正方行列が正則であるか否かを判定できる式である．行列式の数学的な定義はこみいったものであるが，広く用いられる便利な式である．

以下において解説する**行列式**は，行列 $\mathbf{A}$ の n^2 個の変数 a_{ij} のある n 次式で，その式の値が 0 であるか否かによって行列 $\mathbf{A}$ が正則であるか否かを判定することができる．

○　行列式を用いて正則を判定する例　（解説は後に述べる）

n ＝ 2 のとき，2 次正方行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ の行列式を，$|A|$ あるいは $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ で表わし，

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

と定義する．

実際の数値で行列式の値を求めてみると，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot4-2\cdot3=4-6=-2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot2-2\cdot1=2-2=0$$

となり，

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$は逆行列をもち，正則行列であるが，

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$は逆行列をもたず，正則行列でないといえる．

○　一般の n 次正方行列の行列式を求めるに当たって，まず，これと密接に関連する連立方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ の解の公式を作ることを考える．

行列 A を列ベクトルの束で表わしたもの $A=[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}]$について，次の条件を満たすような A から R への写像 $D{:}A=[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_n}]\rightarrow R$ を考える．

(1)　n **重線形性**　：　各列について線形

ア)　$D[\cdots,\vec{a_i}+\vec{a_i}',\cdots]=D[\cdots,\vec{a_i},\cdots]+D[\cdots,\vec{a_i}',\cdots]$ （i = 1, 2, …, n）

イ)　$D[\cdots,\lambda\vec{a_i},\cdots]=\lambda D[\cdots,\vec{a_i},\cdots]$ （i = 1, 2, …, n）

(2)　**交代性**　：　第 i 列ベクトルと第 j 列ベクトルを入れ替えると符号が変わる

$$D[\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_j},\cdots]=-D[\cdots,\vec{a_j},\cdots,\vec{a_i},\cdots]$$

(3)　**正規性**

$$D[E]=1$$

なお，(2)から次の(2)′が導かれる：

(2)′　第 i 列ベクトルと第 j 列ベクトルが等しいとき，すなわち，$\vec{a_i}=\vec{a_j}$ のとき，

$$D[\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_j},\cdots]=0$$

はじめに，以上の条件(1)(2)を満たす写像 D が存在すれば，連立方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ の解の公式を作ることができることを示し，次にそのような写像の存在を示す．

まず，連立方程式

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

は

$$x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots+x_n\vec{a_n}=\vec{b}$$

と書ける．

いま $D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_n}]$の第 i 列のところに，この $\vec{b}$ を代入すると，

$$D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{b},\cdots,\vec{a_n}]$$

$$D[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, x_1\vec{a_1}+x_2\vec{a_2}+\cdots+x_n\vec{a_n}, \cdots, \vec{a_n}]$$

(1)により

$$=x_1D[\boxed{\vec{a_1}}, \vec{a_2}, \cdots, \boxed{\vec{a_1}}, \cdots, \vec{a_n}]$$
$$+x_2D[\vec{a_1}, \boxed{\vec{a_2}}, \cdots, \boxed{\vec{a_2}}, \cdots, \vec{a_n}]$$
$$+\cdots$$
$$+x_iD[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \boxed{\vec{a_i}}, \cdots, \vec{a_n}]$$
$$+\cdots$$
$$+x_nD[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \boxed{\vec{a_n}}, \cdots, \boxed{\vec{a_n}}]$$

(2)'により

$$=x_iD[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \boxed{\vec{a_i}}, \cdots, \vec{a_n}]$$

だから， $D[A]=D[\vec{a_1}, \vec{a_2}, \cdots, \vec{a_i}, \cdots, \vec{a_n}]\neq 0$ならば

$$x_i=\frac{D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{b},\cdots,\vec{a_n}]}{D[\vec{a_1},\vec{a_2},\cdots,\vec{a_i},\cdots,\vec{a_n}]}\quad \text{(i = 1 ～ n) … (*)}$$

次に，このような条件を満たす D の存在を示す．

n =2 のとき， $\vec{a_1}=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}, \vec{a_2}=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}, \vec{e_1}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \vec{e_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ とおくと，

$$\vec{a_1}=a_{11}\vec{e_1}+a_{21}\vec{e_2}$$
$$\vec{a_2}=a_{12}\vec{e_1}+a_{22}\vec{e_2}$$

(1)(2)を満たす D がどのようなものか検討すると，

$$D[A]=D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]$$
$$=D[a_{11}\vec{e_1}+a_{21}\vec{e_2}, a_{12}\vec{e_1}+a_{22}\vec{e_2}]$$
$$=a_{11}a_{12}D[\vec{e_1}, \vec{e_1}]+a_{11}a_{22}D[\vec{e_1}, \vec{e_2}]$$
$$+a_{21}a_{12}D[\vec{e_2}, \vec{e_1}]+a_{21}a_{22}D[\vec{e_2}, \vec{e_2}]$$

ここで(2)′により

$$D[\vec{e_1}, \vec{e_1}]=D[\vec{e_2}, \vec{e_2}]=0$$
$$D[\vec{e_2}, \vec{e_1}]=-D[\vec{e_1}, \vec{e_2}]$$

だから

$$D[A]=D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]$$
$$=(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})D[\vec{e_1}, \vec{e_2}]$$

$D[\vec{e_1}, \vec{e_2}]=c$ とおくと，これら(1)(2)の条件だけで(*)式の値は定まるが，特にc =1とすれば，(3)の正規性を満たす．

$D[E]=(1\cdot1-0\cdot0)c=c=1$よりc=1

$$D[A]=D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

となる．

このとき，連立方程式の解(*)は，

$$x_1=\frac{D[\vec{b}, \vec{a_2}]}{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]}=\frac{\begin{vmatrix}b_1 & a_{12}\\b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$$
$$=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$
$$x_2=\frac{D[\vec{a_1}, \vec{b}]}{D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]}=\frac{\begin{vmatrix}a_{11} & b_1\\a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}$$
$$=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

となる．

n ≧3のときも同様に定まることが知られている．

◇ここまでの要約◇

(1)　行列式

n =2のとき，

$$|A|=D[A]=D[\vec{a_1}, \vec{a_2}]$$

$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

n =3のとき，「サリュの方法」と呼ばれる覚え方がある（sarrus［フランス人，人名］のカタカナ表記をサラスとすることもある）：

$$|A|=D[A]=D[\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}]$$

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}$$
$$-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}$$

n ≧ 4 のとき，上のような簡単な覚え方はない．

(2)　連立方程式 $A\vec{x}=\vec{b}$ の解：「クラメルの公式」という．

n =2 のとき，

$$x_1=\frac{D[\vec{b},\vec{a_2}]}{D[\vec{a_1},\vec{a_2}]}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$
$$=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

$$x_2=\frac{D[\vec{a_1},\vec{b}]}{D[\vec{a_1},\vec{a_2}]}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$
$$=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$$

n =3のとき，

$$x_1=\frac{D[\vec{b},\vec{a_2},\vec{a_3}]}{D[\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}]}$$
$$=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}a_{32}b_2-b_3a_{22}a_{13}-b_1a_{23}a_{32}-b_2a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}}$$

$$x_2=\frac{D[\vec{a_1},\vec{b},\vec{a_3}]}{D[\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}]}$$
$$=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

以下同様に計算できる

$$x_3=\frac{D[\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{b}]}{D[\vec{a_1},\vec{a_2},\vec{a_3}]}$$
$$=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{}$$

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

以下同様に計算できる

例 1

(1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 2 - 3\cdot 1 = 7$

(2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix} = (x^2-1)-x^2 = -1$

(3) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

$= (3\cdot 2\cdot 2 + 0\cdot(-1)\cdot 5 + 1\cdot 0\cdot 4)$
$-(5\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot 0\cdot 2 + 3\cdot 0\cdot(-1))$
$= (12+0+0)-(10+0+0) = 2$

(4) $\begin{vmatrix} a-4 & a-3 & a-2 \\ a-1 & a & a+1 \\ a+2 & a+3 & a+4 \end{vmatrix}$

$= \{(a-4)a(a-4)+(a-3)(a+1)(a+2)$
$\quad +(a-2)(a+3)(a-1)\}$
$-\{(a+2)a(a-2)+(a-1)(a-3)(a+4)$
$\quad +(a-4)(a+3)(a+1)\}$
$= 0$

例 2

(1) 連立方程式 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ をクラメルの公式で解くと,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{-1} = 3$$

(2) 連立方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 14 \end{pmatrix}$ をクラメルの公式で解くと,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 9 & 2 & 2 \\ 14 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3}{1} = 3$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2}{1} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 3 & 1 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

■確認テスト■

（それぞれ，半角数字=1バイト文字で答えよ）

1.　次の行列式の値を求めよ.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ =

採点する　やり直す

(2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$ =

採点する　やり直す

$|1 \quad 0 \quad 1|$

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \square$

採点する　やり直す

(4) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \square$

採点する　やり直す

2．　次の空欄を埋めよ．

(1)　連立方程式 $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ をクラメルの公式で解くと，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \square & 4 \\ \square & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \square$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & \square \\ 2 & \square \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \square$$

採点する　やり直す

(2)　連立方程式 $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ をクラメルの公式で解くと，

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} \square & 4 \\ \square & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \square$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & \square \\ 3 & \square \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \square$$

採点する　やり直す

3．　次の連立方程式をクラメルの公式を用いて解け．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$　$x_1 = \square$，$x_2 = \square$

採点する　やり直す

(2) $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$x_1 = \square$，$x_2 = \square$

採点する　やり直す

(3) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$　$x_1 = \square$，$x_2 = \square$，$x_3 = \square$

採点する　やり直す

(4) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$　$x_1 = \square$，$x_2 = \square$，$x_3 = \square$

採点する　やり直す