→ スマホ版は別頁

9　正則行列と逆行列

実数 a については，$a\neq 0$ のとき，その逆数 a^{-1} が存在して，$a\cdot a^{-1}=1$ が成り立つ．この節では，これと同様に，行列 A について，$AA^{-1}=\mathbf{E}$(単位行列) となる逆行列 $\mathbf{A}^{-1}$ が存在するための条件やその求め方を調べる．

○　n 次正方行列 A について

$$AB=BA=E_n$$

を満たす行列 B を A の**逆行列**(inverse matrix) といい $\mathbf{A}^{-1}$ で表わす．すべての行列が逆行列をもつわけではない．逆行列をもつ行列は**正則**(regular)であるという．

※　上の定義により，A の**逆行列** A^{-1} が存在すれば，$AA^{-1}=A^{-1}A=E_n$ が成り立つ．

※　また，$AB=E_n$ が成り立てば，$BA=E_n$ も成り立つことが知られており，$AB=E_n$ ならば，$B=A^{-1}$ としてよい．

正則行列 A の逆行列はただ 1 つである．

（証明）

行列 B，C が A の逆行列であると仮定すると，

$$(AB=)BA=E_n \quad \cdots (*1)$$

$$AC=(CA)=E_n \quad \cdots (*2)$$

(*1) 式の各辺に右から C を掛けると，

$$BAC=C$$

(*2) 式により $AC=E_n$ だから

$$B=C$$

基本行列は正則である．

（証明）

$$P=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$ （$c\neq 0$）については，

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E_n$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=E_n$$

が成り立ち，逆行列

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{c} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

が存在するから，$\mathbf{P}$は正則である．■

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{行} \\ \leftarrow j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

については　**Q**を左から掛けると，相手の行列の第 i 行と第 j 行が入れ替わるので，**QQ**により，**Q**の第 i 行と第 j 行が入れ替わり E_n となる．

つまり，**QQ**= E_n だから，$\mathbf{Q}^{-1}$=**Q**となり，逆行列が存在する（**Q**自身）から，**Q**は正則である．■

$$R=\begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & & 1 & & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & & & \uparrow j\text{列} & & \end{array} & \end{array}$$

については，**R**を左から掛けると，相手の行列の**第 i 行**に**第 j 行**の c 倍を加えるから，たとえば，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_4$$

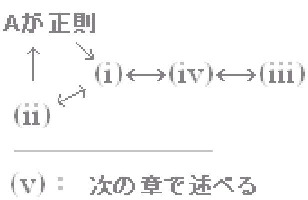
のように第 (i ,j) 成分の符号を逆にすれば逆行列となる．よって，**R**は正則である．■

定理４　次の(i)～(v)は，それぞれ，n 次正方行列 A が正則であるための必要十分条件である．

(i)　同次形連立１次方程式 $A\vec{x}=\vec{0}$ が自明解のみをもつ．
(ii)　任意の列ベクトル $\vec{b}$ に対して，　$A\vec{x}=\vec{b}$ がただ１つの解をもつ．
(iii)　A の基本形は E_n である．
(iv)　rank(A)= n
(v)　| A |≠ 0

(証明)

次の流れに沿って証明する．



(i)⇔(iv)の証明：

3.3節の定理３

「同次方程式が自明解のみをもつ」ための必要十分条件は「rank(A)= n 」

によって示されている．

(iv)⇔(iii)の証明：

rank (A) = n ，すなわち n 次正方行列で異なる基本ベクトルが n 個あること（既約な階段行列で先頭の1が n 個あること）は，　A の基本形が E_n であるということである．

正則→(i)の証明：
A が正則ならば，その逆行列 A^{-1} が存在するから，

$$A\ \vec{x} = \vec{0} \quad \to \quad A^{-1}\ A\ \vec{x} = A^{-1}\ \vec{0} \quad \to \quad \vec{x} = \vec{0}$$

となる．
（正則→(ii)も同様にして示される。すなわち，$A\ \vec{x} = \vec{b}$ かつ A^{-1} の存在 → $A^{-1}\ A\ \vec{x} = A^{-1}\ \vec{b} \to \vec{x} = A^{-1}\ \vec{b}$）

(i)→(ii)の証明：
$A\ \vec{x}_1 = \vec{b}$，$A\ \vec{x}_2 = \vec{b}$ が成り立つとすれば，辺々引いて $A(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0}$
ここで (i) が成り立てば，$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}$ となるから，$\vec{x}_1 = \vec{x}_2$ が言える．すなわち (ii) が成立する．

(ii)→(i)の証明：
自明解 $\vec{x} = \vec{0}$ は $A\ \vec{x} = \vec{0}$ の解だから，$A\ \vec{x} = \vec{0}$ がただ１つの解をもつならば，自明解のみが解となるのは明らかである．

(ii)→正則の証明：
基本ベクトル $\vec{e}_i$ (i = 1, 2, …, n) に対して，$A\ \vec{x} = \vec{e}_i$ の解を $\vec{c}_i$ とすると，

$$A\ \vec{c}_1 = \vec{e}_i$$
$$A\ \vec{c}_2 = \vec{e}_2$$
$$\cdots$$
$$A\ \vec{c}_n = \vec{e}_n$$

列ベクトルを束ねて書くと，$A[\vec{c}_1\ \vec{c}_2 \cdots \vec{c}_n] = [\vec{e}_1\ \vec{e}_2 \cdots \vec{e}_n] = E_n$
ここで，$C = [\vec{c}_1\ \vec{c}_2 \cdots \vec{c}_n]$ とおくと，

$$A\ C = E_n \quad \cdots (1)$$

さらに，(ii)→(iii)だから A の行基本変形により E_n が得られる．
様々な種類の基本行列 P，Q，R を変形の順に H_1，H_2，…，H_k で表わすと，

$$H_k \cdots H_2\ H_1\ A = E_n$$

が成り立つから，$D = H_k \cdots H_2\ H_1$ とおくと

$$D\ A = E_n \quad \cdots (2)$$

(1)(2) より，$D = D\ E_n = D(A\ C) = (D\ A)C = E_n\ C = C$
よって，$A\ C = C\ A = E_n$ となるから，A は正則で，$C = D = A^{-1}$ となる．

---

n 次正則行列 A，B について，次が成り立つ．

(1)　A の逆行列はただ１つである．
(2)　逆行列 A^{-1} も正則であり，$(A^{-1})^{-1} = A$
(3)　転置行列 ${}^tA$ も正則であり，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
(4)　$(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

証明
(1)　２つ存在すると仮定して等しいことを示す．
(2)　逆行列の定義に当てはめる ：「 $A\ B = B\ A = E_n$ を満たす行列 B を A の逆行列といい A^{-1} で表わす．」から，
$A^{-1}\ A = A\ A^{-1} = E_n$ により A^{-1} の逆行列 $(A^{-1})^{-1}$ が存在し，$(A^{-1})^{-1} = A$
(3)　2.2節において，転置行列について次の性質を示した：${}^t({}^tA) = A$，${}^t(A\ B) = {}^tB\ {}^tA$

$${}^tA\ {}^t(A^{-1}) = {}^t(A^{-1}\ A) = {}^tE_n = E_n$$
$${}^t(A^{-1})\ {}^tA = {}^t(A\ A^{-1}) = {}^tE_n = E_n$$

となるから，$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$
(4)

$$(AB)(B^{-1}\ A^{-1}) = A(B\ B^{-1})A^{-1} = A(E_n)A^{-1} = A\ A^{-1} = E_n$$
$$(B^{-1}\ A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}\ A)B = B^{-1}(E_n)B = B^{-1}\ B = E_n$$

だから，$(AB)^{-1} = B^{-1}\ A^{-1}$

○　逆行列の求め方

定理４の (ii)→正則 の証明において， A に行う行基本変形を順に H_1， H_2， …， H_k とするとき，

$$H_k \cdots H_2 H_1 A = E_n$$

だから，

$$H_k \cdots H_2 H_1 = A^{-1}$$

ここで， A と並べて E_n にも**行**基本変形を行うことにすると

$$\begin{array}{rcc} H_k \cdots H_2 H_1 [& A & E_n] \\ & \downarrow & \downarrow \\ {[} & E_n & H_k \cdots H_2 H_1] \end{array}$$

となって， A を E_n まで変形したとき， E_n は $H_k \cdots H_2 H_1$ すなわち A^{-1} に変形されている．

例 1

$A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$ の逆行列を求める．

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\2&5&0&1\end{array}\right) \xRightarrow{2行+1行\times(-2)} \left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&-1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{2行\times(-1)} \left(\begin{array}{cc|cc}1&3&1&0\\0&1&2&-1\end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{1行+2行\times(-3)} \left(\begin{array}{cc|cc}1&0&-5&3\\0&1&2&-1\end{array}\right)$$

ゆえに， $A^{-1}=\begin{pmatrix}-5&3\\2&-1\end{pmatrix}$

例 2

$A=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&1&1\\2&1&1\end{pmatrix}$ の逆行列を求める．

$$A=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&2&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right) \xRightarrow{1行と2行の入れ替え} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&1&1&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{3行+1行\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-1&-1&0&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{1行+2行\times(-1),\ 3行+2行} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&-1&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)$$

$$\xRightarrow{1行+3行,\ 2行+3行\times(-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&-1&4&-2\\0&0&1&1&-2&1\end{array}\right)$$

ゆえに $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&4&-2\\1&-2&1\end{pmatrix}$

■確認テスト■　　　次の空欄を埋めよ．

(1)　次の行列が正則行列かどうか判定せよ．

$\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&1\\2&1&0\end{pmatrix}$ …　[計算:**見る**|**隠す**]

原式→1行と２行の入れ替え

$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&1&0\end{pmatrix}$

→3行+1行×(−2)

→3行÷(−4)

$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$

→1行+3行×(−1)

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

→3行+2行×(−1)

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

→2行+3行×(−2)

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

… 行列が□次正方行列で，その階数が□だから，　（ ○正則である　○正則でない ）

採点する　やり直す

---

(2) 次の行列が正則行列かどうか判定せよ．

$$\begin{pmatrix}3&1&2\\1&1&0\\2&1&1\end{pmatrix}$$ … [計算:**見る**|**隠す**]

原式→1行と２行の入れ替え

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\3&1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$$

→2行+1行×(−3)

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-2&2\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

→2行÷(−2)

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

→1行+2行×(−1)

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

… 行列が□次正方行列で，その階数が□だから，　（ ○正則である　○正則でない ）

採点する　やり直す

---

(3) 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\-2&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}$$ … [計算:**見る**|**隠す**]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\-2&1&2&0&1&0\\2&3&1&0&0&1\end{array}\right)$$

→2行+1行×2,
3行+1行×(−2)

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&3&2&2&1&0\\0&1&1&-2&0&1\end{array}\right)$$

→2行と3行の入れ替え

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&1&1&-2&0&1\\0&3&2&2&1&0\end{array}\right)$$

→1行+2行×(−1),
3行+2行×(−3)

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&3&0&-1\\0&1&1&-2&0&1\\0&0&-1&8&1&-3\end{array}\right)$$

→3行×(−1)

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&3&0&-1\\0&1&1&-2&0&1\\0&0&1&-8&-1&3\end{array}\right)$$

→1行+3行, 2行+3行×(−1)

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-5&-1&2\\0&1&0&6&1&-2\\0&0&1&-8&-1&3\end{array}\right)$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

---

(4) 次の行列の逆行列を求めよ．

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$$ … [計算:**見る**|**隠す**]

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\2&1&0&0&1&0\\3&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

→2行+1行×(−2), 3行+1行×(−3)

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-2&1&0\\0&0&1&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

採点する　やり直す