→ スマホ版は別頁

8　基本変形とランク２

ここでは，行列に掛けることによって，６で述べた行列の基本変形を実行できる**基本行列** $\mathbf{P}$， $\mathbf{Q}$， $\mathbf{R}$ を定義する．

○　次の３つの行列 $\mathbf{P}$， $\mathbf{Q}$， $\mathbf{R}$ は単位行列 $\mathbf{E}$ を少しだけ変形したものとなっている．

(1)　l 次単位行列の第（ i， i ）成分1を $c\neq 0$ で置き換えて得られる l 次正方行列

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & & c & & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を， l 行からなる行列に左から掛けると，**第 i 行**は c 倍になる．

例１

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \boxed{ca_{31}} & \boxed{ca_{32}} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

※参考： l 列からなる行列に右から $\mathbf{P}$ を掛けると，**第 i 列**は c 倍になる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \boxed{ca_{13}} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & \boxed{ca_{23}} & a_{24} \end{pmatrix}$$

(2)　l 次単位行列の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる l 次正方行列

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を， l 行からなる行列に左から掛けると，**第 i 行と第 j 行**は入れ替わる．

例２

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \boxed{a_{31}} & \boxed{a_{32}} \\ \boxed{a_{21}} & \boxed{a_{22}} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$$

※参考： l 列からなる行列に右から $\mathbf{Q}$ を掛けると，**第 i 列と第 j 列**が入れ替わる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & \boxed{a_{13}} & \boxed{a_{12}} & a_{14} \\ a_{21} & \boxed{a_{23}} & \boxed{a_{22}} & a_{24} \end{pmatrix}$$

(3)　l 次単位行列の第（ i, j ）成分を c に入れ替えて得られる l 次正方行列

$$R=\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & & 1 & & & 0 \\ \vdots & & & & 1 & & 0 \\ 0 & & & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow i\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \uparrow j\text{列} \end{array}$$

を， l 行からなる行列に左から掛けると，**第 i 行に第 j 行**の c 倍を加えた行列ができる．

例３

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\boxed{c}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}+ca_{31}&ca_{22}+ca_{32}\\a_{31}&a_{32}\\a_{41}&a_{42}\end{pmatrix}$$

※参考：参考：l 列からなる行列に右から $\mathbf{R}$ を掛けると，**第 j 列に第 i 列の** c 倍を加えた行列ができる．

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&\boxed{c}&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&ca_{12}+a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&ca_{22}+a_{23}&a_{24}\end{pmatrix}$$

○　以上のように，行列の（**行**）基本変形は，基本行列 $\mathbf{P}$，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$ を**左から**掛けることに対応している．

例４　以下の変形には，各々次の基本行列を左から掛けることが対応する．

$$Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad R_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad R_2=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\1&2&-3\\0&3&-4\end{pmatrix}\Rightarrow\underset{QA}{\begin{pmatrix}1&2&-3\\2&1&3\\0&3&-4\end{pmatrix}}\Rightarrow\underset{R_1(QA)}{\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&-3&9\\0&3&-4\end{pmatrix}}$$

$$\Rightarrow\underset{P(R_1QA)}{\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&-3\\0&3&-4\end{pmatrix}}\Rightarrow\underset{R_2(PR_1QA)}{\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-3\\0&3&-4\end{pmatrix}}$$

■確認テスト■

次の空欄を埋めよ．

(1)　$\mathbf{A}$ を4行5列の行列とするとき，次の基本行列を左から $\mathbf{A}$ に掛けると，どのような基本変形が行われるか述べよ．

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

… 行列 $\mathbf{A}$ の [ ] 行目と [ ] 行目が入れ替わる．（小さいものから順に書け）

採点する　やり直す

(2)　$\mathbf{A}$ を4行5列の行列とするとき，次の基本行列を左から $\mathbf{A}$ に掛けると，どのような基本変形が行われるか述べよ．

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

… 行列 $\mathbf{A}$ の第 [ ] 行を [ ] 倍する．

採点する　やり直す

(3)　$\mathbf{A}$ を4行5列の行列とするとき，次の基本行列を左から $\mathbf{A}$ に掛けると，どのような基本変形が行われるか述べよ．

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&5\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

… 行列 $\mathbf{A}$ の第 [ ] 行に第 [ ] 行の [ ] 倍を加える．

採点する　やり直す

(4)　次のように，任意の2行2列の行列に左から掛けて，第1行に第2行の3倍を加えた結果が得られるように行列の成分を定めよ.

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ c & d \end{pmatrix}$$

採点する　やり直す