

## 7 連立1次方程式2

○ 以下においては、拡大係数行列の基本変形を用いて、具体的に連立1次方程式を解く方法をまとめてみる。

### 例1

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases} \text{ の拡大係数行列 } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & 2 \end{pmatrix} \text{ を基本変形すると, } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \end{pmatrix} \text{ となるが,}$$

これは,

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 11 \\ x_3 = -11 \end{cases}$$

を表わしている。

この例においては、未知数  $(x_1, x_2, x_3)$  の個数は  $n=3$ 、係数行列、拡大係数行列の階数（先頭の1の個数）は  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A} \ \bar{\mathbf{b}}]) = 3$  となっている。

○ この例のように、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = n$  となるときは、連立1次方程式はただ1つの解が存在する。

### 例2

(A) 基本変形の結果、拡大係数行列が  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  となるようなときは、

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ x_3 = 3 \\ 0 = 0 \cdots \text{注} \end{cases}$$

を表わしており、 $x_1, x_2$  のうちいずれか1つは任意定数とすることができる。

以下においては、先頭の1に対応しない未知数（この例では  $x_2$ ）を任意定数  $c$  とおくことにすれば、先頭の1に対応する未知数（この例では  $x_1, x_3$ ）について解けることとなる。

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2c \\ x_2 = c \\ x_3 = 3 \\ (0=0 \text{ は成立する}) \end{cases}$$

(B) これに対して、基本変形の結果、拡大係数行列が  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  となるようなときは、

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 1 \cdots \text{注} \end{cases}$$

を表わしており、

第3式  $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$  はどんな  $x_1, x_2, x_3$  を持ってきても成立しない。

上記 (A)(B) は、係数行列のうち、すべての成分が0となる行（3行目）について右辺が0であるか否か（注の部分）の相違であるが、これは係数行列の階数（先頭の1の個数） $\text{rank}(\mathbf{A})$  と拡大係数行列の階数（先頭の1の個数） $\text{rank}([\mathbf{A} \ \bar{\mathbf{b}}])$  が等しいか否かで区別することができる。

すなわち、上記 (A) においては  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A} \ \bar{\mathbf{b}}]) = 2$  であるが、上記 (B) においては、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$  であるのに対して、3行目の右辺が1であるから  $\text{rank}([\mathbf{A} \ \bar{\mathbf{b}}]) = 3$  となる。

$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A} \ \bar{\mathbf{b}}]) < n$  のときは上記 (A) の形となり、 $n - \text{rank}(\mathbf{A})$  個の任意定数をもつ解が存在する。

これに対して、 $\text{rank}(\mathbf{A}) \neq \text{rank}([\mathbf{A} \ \bar{\mathbf{b}}])$  のときは、上記 (B) の形になるから、連立方程式の解は存在しない。

### 定理2

(1) 方程式の個数が  $m$  個、未知数の個数が  $n$  個の連立1次方程式

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$$

が解をもつための必要十分条件は

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A} \ \vec{b}])$$

このとき、 $n - \text{rank}(\mathbf{A})$ 個の任意定数を含む解が存在する。

(2) 方程式の個数が  $m$  個、未知数の個数が  $n$  個の連立 1 次方程式

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$$

が**ただ1つの解**をもつための必要十分条件は

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A} \ \vec{b}]) = n$$

○ 例 3

未知数  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  の連立 1 次方程式において、拡大係数行列の基本形が  $[\mathbf{A} \ \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  とな

ったとき、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A} \ \vec{b}]) = 3$  だから、解が存在し、 $5 - 3 = 2$  個の任意定数を含んでいる。

先頭の 1 に対応しない未知数を  $x_4 = c_4, x_5 = c_5$  とおくと、 $x_1 = -c_4, x_2 = 4 - 3c_5, x_3 = 5 + c_4, x_4 = c_4, x_5 = c_5$  となり、

ベクトルを用いて、
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_5 \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 と書くことができる。

○ 例 4

未知数  $x_1, x_2$  の連立 1 次方程式において、拡大係数行列の基本形が  $[\mathbf{A} \ \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  となるときは、 $\text{rank}(\mathbf{A}) = 2$ ,

$\text{rank}([\mathbf{A} \ \vec{b}]) = 3$  だから、解は存在しない。

○ 例 5

未知数  $x_1, x_2$  の連立 1 次方程式において、拡大係数行列の基本形が  $[\mathbf{A} \ \vec{b}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  となるときは、

$\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A} \ \vec{b}]) = 2$  だから、ただ 1 つの解が存在し、 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  と表わすことができる。

○ 連立 1 次方程式  $\mathbf{A} \vec{x} = \vec{b}$  の定数項 (右辺) が零ベクトル  $\vec{0}$  であるとき、すなわち、

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$$

のとき、この方程式を**同次形**の連立 1 次方程式という。

**同次形**の連立 1 次方程式は、つねに  $\vec{x} = \vec{0}$  を解にもつ。この解を**自明な解**という。(  $0a_{i1} + 0a_{i2} + \dots + 0a_{in}$  が 0 に等しいのは自明の真理である。 )

**同次形**の連立 1 次方程式では、**行基本変形によって右辺に 1 が登場する余地はなく**、明らかに  $\text{rank}(\mathbf{A}) = \text{rank}([\mathbf{A} \ \vec{b}])$  が成り立つ。また前節に示したように、 $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq m$  かつ  $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq n$  であるから、 $m < n$  ならば  $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq m < n$  となって、任意定数が現われる。よって、次の定理が成り立つ。

**定理 3**

(1) 方程式の個数が  $m$  個、未知数の個数が  $n$  個の同次形連立 1 次方程式

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$$

が**自明な解のみ**をもつための必要十分条件は

$$\text{rank}(\mathbf{A}) = n$$

(2) 方程式の個数が  $m$  個、未知数の個数が  $n$  個の同次形連立 1 次方程式

$$\mathbf{A} \vec{x} = \vec{0}$$

は  $m < n$  のとき**自明でない解**をもつ。

※ 参考

○ 上の定理 2 (1) は、行列  $\mathbf{A}$  の列ベクトル  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  が 1 次独立な場合に対応する。

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \end{bmatrix}$$

すなわち,  $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{i1} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$   $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$   $\dots \dots \vec{a}_n = \begin{bmatrix} \vdots \\ a_{in} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$  とおくと,

「 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  が 1 次独立」 $\Leftrightarrow$  「 $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$  ならば  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 」

「 $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$  が自明な解のみをもつ」 $\Leftrightarrow$  「 $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$  ならば  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ 」

○ 上の定理 2 (2) は, 行列  $\mathbf{A}$  の列ベクトル  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  が 1 次従属な場合に対応する.

すなわち,

「 $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  が 1 次従属」 $\Leftrightarrow$  「 $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$  が  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  以外の解をもつ」

「 $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$  が自明でない解をもつ」 $\Leftrightarrow$  「 $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$  が  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$  以外の解をもつ」

○ 例 6

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 3x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

の係数行列の基本変形は, 次のようになる.

1行と2行の入れ替え

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2行+1行 $\times(-2)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

2行 $\div(-3)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

1行+2行 $\times(-2)$ , 3行+2行 $\times(-3)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

3行 $\div 5$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1行+3行 $\times(-3)$ , 2行+3行 $\times 3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

したがって,  $\text{rank}(\mathbf{A})=3$

方程式は自明な解  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$  をもつ.

○ 例 7

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 9x_3 = 0 \end{cases}$$

の係数行列の基本変形は, 次のようになる.

2行+1行 $\times(-2)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & 11 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 11 & -9 \end{pmatrix}$$

3行+1行 $\times(-4)$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

2行と3行の入れ替え

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2行 $\div 3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1行+2行×(-2)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、 $\text{rank}(\mathbf{A})=2$ となり、方程式は自明でない解をもつ。

$x_3=c_3$  とおくと  $x_1=5c_3$ ,  $x_2=-c_3$ ,  $x_3=c_3$  だから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### ■確認テスト■

次の空欄を埋めよ。(半角数字=1バイト文字を記入)

#### (1) 連立方程式

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 5 \end{cases}$$

の拡大係数行列の基本形を求める

1行と2行の入れ替え

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2行+1行×(-3)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ \square & -7 & -14 \end{pmatrix}$$

2行÷(-7)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & \square & 2 \end{pmatrix}$$

1行+2行×(-3)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \square & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって、未知数の個数=, 係数行列の階数=拡大係数行列の階数= となり、方程式はただ1つの解をもつ。

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \end{pmatrix}$$

[採点する](#)

[やり直す](#)

#### (2) 連立方程式

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$$

の拡大係数行列の基本形を求める

2行+1行×(-2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

2行×(-1)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 13 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって、未知数の個数=, 係数行列の階数=拡大係数行列の階数= となり、方程式は任意定数1つを含む解をもつ。

$x_3=c_3$  とおくと,  $x_1=2-13c_3$ ,  $x_2=5c_3$ ,  $x_3=c_3$  となるから

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$$

[採点する](#)

[やり直す](#)

#### (3) 連立方程式

$$x_1 + 3x_2 = -1$$

(1, 0, 0)

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$  の拡大係数行列を基本形に直すと,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  となる.

$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 5 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$  のとき, 係数行列の階数は , 拡大係数行列の階数は  となるから, この方程式の解は存在しない.

採点する

やり直す

(4) 次の同次形連立1次方程式が自明でない解をもつように定数  $a$  の値を定めるには,

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ ax_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$  の係数行列  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ a & 6 \end{pmatrix}$  の基本形が  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6-2a \end{pmatrix}$  となることから,

未知数の個数 =  に対して, 係数行列の階数 =  となればよいから,  $6-2a = \text{}$ ,  $a = \text{}$

採点する

やり直す

(5) 同次形連立1次方程式

$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}$  の係数行列を基本形に直すと,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  となる.

この同次形連立1次方程式の自明でない解は,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = c_3 \begin{pmatrix} \text{} \\ \text{} \\ \text{} \end{pmatrix} \text{ と書ける.}$$

採点する

やり直す

(6) 連立1次方程式

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 10 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ の解は,}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{} \\ \text{} \\ \text{} \end{pmatrix} \text{ と書ける.}$$

採点する

やり直す