→ スマホ版は別頁

4　行列の演算

○　**行列の和と差**　　2つの行列の和と差は，行列の型が同じ場合のみ定義され，各成分の和および差を成分とする行列として定義される．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \cdots & a_{1n}-b_{1n} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \cdots & a_{2n}-b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \cdots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}$$

例 1

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$

○　ベクトルのスカラー倍と同様に，行列 $\mathbf{A}$ のスカラー倍 k$\mathbf{A}$ は，$\mathbf{A}$ の各成分をk倍したものを成分とする行列として定義される．

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

例 2

$$\sqrt{2}\begin{pmatrix} 5 & 2\sqrt{2} & 3 \\ 1 & 5 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5\sqrt{2} & 4 & 3\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 5\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix}$$

○　**行列の積**　　2つの行列 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$の積$\mathbf{AB}$は，

[1]　$\mathbf{A}$の列数と$\mathbf{B}$の行数が等しいときだけ定義され，$l \times m$ 行列と $m \times n$ 行列との積は，$l \times n$ 行列となる．
[2]　$\mathbf{A}$のi行ベクトルと$\mathbf{B}$のj列ベクトルの内積が$\mathbf{AB}$の(i，j)成分となる．

[具体例]　　りんご，かき，みかんの単価を各々 150円，120円，80円とする．また，りんご，かき，みかんを各々3個，4個，5個買ったものとする．
単価を表わす行ベクトルを

$$\vec{a}=(150,120,80)$$

で，個数を表わす列ベクトルを

$$\vec{b}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

で表わすと，合計価格は内積

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=150\cdot3+120\cdot4+80\cdot5=1330$$

となるが，この計算は $\vec{a}, \vec{b}$ の要素の個数が一致する場合だけ定義される．

… … …

次のようにi行とj列の内積が(i，j)成分となる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ \boxed{a_{i1}} & \boxed{a_{i2}} & \cdots & \boxed{a_{im}} \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & \boxed{b_{1j}} & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{k1} & \boxed{b_{kj}} & b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & \boxed{b_{mj}} & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$c_{11} \cdots c_{1j} \cdots c_{1n}$$

$$
=\begin{pmatrix} c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{in} \\ c_{l1} & \cdots & c_{lj} & \cdots & c_{ln} \\ & & & & \end{pmatrix}
$$

例３　次の積において(2 , 3)成分は，$\boxed{2}\cdot\boxed{1}+\boxed{3}\cdot\boxed{2}+\boxed{1}\cdot\boxed{3}=11$となる．他の成分も順次計算すると

$$
\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ \boxed{2} & \boxed{3} & \boxed{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 4 & \boxed{2} & 3 \\ 2 & 0 & \boxed{3} & 2 \end{pmatrix}
$$
$$
=\begin{pmatrix} 18 & 8 & 17 & 12 \\ 8 & 12 & \boxed{11} & 11 \end{pmatrix}
$$

※　一般に，$\mathbf{AB}=\mathbf{C}$のとき，$\mathbf{C}$の成分は $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$ で表わされる．
Σ記号を用いて書けば

$$
c_{ij}=\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}
$$

例４　次の積は定義されない：3×4型・2×3型

$$
\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

※　上の例３，４の違いから分かるように，行列の積については$\mathbf{AB}$が定義されても，$\mathbf{BA}$も定義されるとは限らない点に注意．

また，次の例のように$\mathbf{AB}$，$\mathbf{BA}$とも定義されても型が異なり，$\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$となる場合がある．$\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$となるとき，$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$は**可換**であるという．

2×3型・3×2型 → 2×2型

$$
\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18 & 8 \\ 8 & 12 \end{pmatrix}
$$

3×2型・2×3型 → 3×3型

$$
\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 8 & 12 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}
$$

○　ある行列$\mathbf{A}$と単位行列$\mathbf{E}$との積が定義できるとき，その積はつねに$\mathbf{A}$となる．

m×n型・n×n型：$\mathbf{AE}=\mathbf{A}$

$$
\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

m×m型・m×n型：$\mathbf{EA}=\mathbf{A}$

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

○　行列の演算の性質をまとめると，次のようになる．
(演算が定義できる限り，**結合法則，分配法則，和の交換法則**はつねに成立するが，**積の交換法則**はつねには成立しないところが重要)

和の交換法則 **積は交換法則成立せず**	$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$
零元の性質 **単位元の性質**	$\mathbf{A0}=\mathbf{0A}=\mathbf{0}$，$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{A}=\mathbf{A}$ $\mathbf{AE}=\mathbf{EA}=\mathbf{A}$
スカラー倍の性質	$0\mathbf{A}=\mathbf{0}$，$1\mathbf{A}=\mathbf{A}$，$(ab)\mathbf{A}=a(b\mathbf{A})$，$(a\mathbf{A})\mathbf{B}=a(\mathbf{AB})$
和の結合法則 **積の結合法則**	$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$
分配法則	$a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$，$(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$ $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C})=\mathbf{AB}+\mathbf{AC}$，$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$

※　和の結合法則　$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ から，$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$ という式は，どちらの意味に理解されても等しく，$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}$ と書いてよい．k個の和は $\mathbf{A}+\mathbf{A}+\cdots+\mathbf{A}=k\mathbf{A}$ と書くことができる．

※　同様にして，積の結合法則　$(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ から，$\mathbf{ABC}$ という式は，どちらの意味に理解されても等しく，$\mathbf{ABC}$ と書いてよい．$\mathbf{A}$ が正方行列ならば，自分自身との積が定義でき，k個の積を $\mathbf{AA}\cdots\mathbf{A}=\mathbf{A}^k$ と書くことができる．

○　行列 $\mathbf{A}$の行と列を入れ替えて得られる行列を $\mathbf{A}$の**転置行列**（transposed matrix）といい，${}^t\mathbf{A}$と書く．
${}^t\mathbf{A}$の (i , j) 成分は$\mathbf{A}$の (j , i) 成分である．

例 5
$$A=\begin{pmatrix}3&4&5\\-6&-7&-8\end{pmatrix}\text{ならば}\ {}^tA=\begin{pmatrix}3&-6\\4&-7\\5&-8\end{pmatrix}$$

○　転置行列については，次の性質がある．
$${}^t({}^t\mathbf{A})=\mathbf{A},\quad {}^t(a\mathbf{A})=a({}^t\mathbf{A}),\quad {}^t(\mathbf{A}+\mathbf{B})={}^t\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B},\quad {}^t(\mathbf{AB})={}^t\mathbf{B}\,{}^t\mathbf{A}$$

最後の式は次のように示すことができる：
両辺の (i , j) 成分が等しいことを示す．
行列 $\mathbf{A}$はp×q行列，$\mathbf{B}$はq×r列とする．
左辺の (i , j) 成分は，$\mathbf{AB}$の (j , i) 成分だから，
$$\sum_{k=1}^{q} a_{jk}b_{ki}$$
一方，${}^t\mathbf{B}$の (i , k) 成分は b_{ki} ，${}^t\mathbf{A}$の (k , j) 成分は a_{jk} となるから，右辺の (i , j) 成分は，
$$\sum_{k=1}^{q} b_{ki}a_{jk}=\sum_{k=1}^{q} a_{jk}b_{ki}$$
これらは等しい．

○　正方行列では，行数と列数が等しいので，${}^t\mathbf{A}=\mathbf{A}$となるものが存在する．このような行列を**対称行列**（symmetric matrixfont>）という．これに対して，${}^t\mathbf{A}=-\mathbf{A}$となる正方行列を**交代行列**という．

例 6
$${}^t\begin{pmatrix}3&1&2\\1&4&7\\2&7&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&1&2\\1&4&7\\2&7&9\end{pmatrix}\text{だから}\begin{pmatrix}3&1&2\\1&4&7\\2&7&9\end{pmatrix}\text{は対称行列}$$
$${}^t\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-7\\-2&7&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&-2\\-1&0&7\\2&-7&0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-7\\-2&7&0\end{pmatrix}\text{だから}\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-7\\-2&7&0\end{pmatrix}\text{は交代行列}$$

○　任意の正方行列 $\mathbf{A}$について，$\frac{1}{2}(\mathbf{A}+{}^t\mathbf{A})$は対称行列となり，$\frac{1}{2}(\mathbf{A}-{}^t\mathbf{A})$ は交代行列となる．
$\mathbf{A}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}+{}^t\mathbf{A})+\frac{1}{2}(\mathbf{A}-{}^t\mathbf{A})$であるから，任意の正方行列は対称行列と交代行列の和として表わすことができる．

■確認テスト■　（半角数字で答えよ）
(1)　次の計算をせよ．

$$\begin{pmatrix}1&0&3\\-2&5&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&1&2\\3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square&\square&\square\\\square&\square&\square\end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

$$\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\square\\\square\\\square\end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

$$2\begin{pmatrix}1&0\\-2&5\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0&1\\3&0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

$${}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

採点する　やり直す

$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$のとき $AB=\begin{pmatrix} \square & 4 \\ -1 & \square \\ 12 & \square \end{pmatrix}$

採点する　やり直す

$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$のとき $C\ {}^tD=\begin{pmatrix} 3 & -1 & \square \\ 3 & \square & -1 \end{pmatrix}$

採点する　やり直す

(2)　行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

について，次のうちで演算が定義できるものを選べ．（チェックを付ける）

☐ $\mathbf{A+B}$ ，☐ $\mathbf{AB-B}$ ，☐ $\mathbf{AC-B}$ ，☐ $\mathbf{BC}$
☐ ${}^t\mathbf{AB}$ ，☐ $\mathbf{A}{}^t\mathbf{B}$ ，☐ ${}^t\mathbf{A}{}^t\mathbf{B}$ ，☐ $\mathbf{A}+{}^t\mathbf{B}$

採点する　やり直す

(3)　次の等式が成り立つように，定数 $a,\ b,\ c$ の値を定めよ．

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$a=\square,\ b=\square,\ c=\square$

採点する　やり直す

(4)　行列 $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$が任意の２次正方行列と可換となるように，定数 $a,\ b$ の値を定めよ．

（考え方）

任意の 定数 $x,\ y,\ z,\ u$ について，次の等式が成立すればよい．すなわち，$x,\ y,\ z,\ u$ の恒等式となればよい．

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ax & ay \\ bx+z & by+u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ax+by & y \\ az+bu & u \end{pmatrix}$$

$a=\square,\ b=\square$

採点する　やり直す

(5)　次の関係を，言葉で表現しているものを下から選べ　：　${}^t\mathbf{A}=\mathbf{A}\ \rightarrow\ {}^t(\mathbf{A}^2)=\mathbf{A}^2$

☐ 対角行列の２乗は対角行列となる．　☐ 転置行列の２乗は転置行列となる．
☐ 対称行列の２乗は対称行列となる．　☐ 交代行列の２乗は交代行列となる．
☐ 転置行列の２乗は元の行列に等しい．

採点する　やり直す