

3 行列の定義

- 行列 (matrix) とは, スカラー (数とか式) を縦, 横に並べたもので, 配列 (array) ともいう。
- $m \times n$ 個の数を長方形に並べ [] または () でくくってまとめたもの

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ または } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

を m 行 n 列の行列, $m \times n$ 型の行列, $m \times n$ 行列, (m, n) 行列などという。

- 行列を表わす記号には大文字を用いる。たとえば

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

とにおいて, 行列 A , 行列 B という。

- 行列 A の上から i 番目, 左から j 番目に現われる数 a_{ij} を行列 A の (i, j) 成分という。
- 2つの行列 A, B は「型が一致」して, かつ「すべての i, j について $a_{ij} = b_{ij}$ 」のとき, 等しいといい $A = B$ と書く。

例 1

- (1) 4軒のコンビニで, りんご, かき, みかんの単価を調査した結果をこの順に並べたもの

$$A = \begin{bmatrix} 128 & 108 & 58 \\ 150 & 120 & 50 \\ 136 & 116 & 76 \\ 100 & 110 & 88 \end{bmatrix}$$

- (2) 2×3 行列 B において (i, j) 成分を $b_{ij} = i + j$ の規則でつくったもの

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

- (3) 次の2つの行列は等しい。すなわち, $C = D$ である。

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 21 & 22 & 23 \end{pmatrix}$$

次の2つの行列は等しくない。すなわち, $E \neq F$ である。(行列の型が異なる。)

$$E = \begin{pmatrix} 10 & -11 & 0 \\ -21 & 22 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 10 & -11 \\ -21 & 22 \end{pmatrix}$$

- 行列 A の成分の横の並びを A の行 (row) といい, 上から第 i 番目の行を第 i 行という。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

の第 i 行 ($1 \leq i \leq m$) は

$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

また, 行列 A の成分の縦の並びを A の列 (column) といい, 左から第 j 番目の列を A の第 j 列という。

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

の第 j 列 ($1 \leq j \leq n$) は

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

- よく現われる特別な行列として, 次のようなものがある。

- $1 \times n$ 行列を **n 次の行ベクトル** (横ベクトル) , $m \times 1$ 行列を **m 次の列ベクトル** (縦ベクトル) という.

行列 **A** の第 **j** 列ベクトル

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

を束ねると

$$A = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n]$$

と書ける.

- すべての成分が0である $m \times n$ 行列を**零行列** (zero matrix) といい, $\mathbf{0}_{m,n}$ で表わすが, 型が明らかな場合は $\mathbf{0}$ と書く.

例 2 2×3 型の零行列は

$$\mathbf{0}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 行数と列数が等しい行列を**正方行列** (square matrix) といい, $n \times n$ 行列を **n 次の正方行列**という.

例 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

は2次の正方行列である.

- 対角線上にある成分 (右下がりの対角線, すなわち行番号と列番号が等しい成分) $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を**対角成分**という.

特に, 正方行列であって, かつ, 対角成分以外のすべての成分が0であるような行列を**対角行列** (diagonal matrix) という. (対角成分は, 何でもよい.)

例 4

次の行列 **A** の対角成分は, 3, 0, 1, 行列 **B** の対角成分は, 4, 3, 0, 1であり, **A** は対角行列でなく, **B** は対角行列である.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 対角成分がすべて1となる対角行列を**単位行列** (identity matrix, unit matrix) という. n 次の単位行列を **E_n** で表わし, 次数が明らかなときは, **E** で表わす.

例 5

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 対角成分がすべて等しい対角行列を**スカラー行列** (scalar matrix) という. スカラー行列は **kE** の形に表せる.

例 6 次の行列はスカラー行列である.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3E$$

■ 確認テスト ■ (半角数字で答えよ)

(1) 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 & 9 & 14 \\ 3 & 2 & 7 & 10 & 13 \\ 4 & 5 & 6 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ について答えよ.

• 何行何列の行列か ... 行 列

• $a_{23} =$

(2) 3×3 行列 $A = [a_{ij}]$ の成分が $a_{ij} = i - j$ で与えられるとき, **A** を書け.

$$A = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

(3) 2次の単位行列を書け.

$$\begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

(4) 次の行列**A**と同じ対角成分をもつ対角行列**B**を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 3 & 2 & 7 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

(5) 2次のスカラー行列 $5E$ を成分で表せ.

$$5E = \begin{bmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{bmatrix}$$

Check Reset