← PC版は別頁

◇１変数関数の増減表◇

※　このページでは，関数 $f(x)$ や $f\,'(x)$ が連続なものを扱う．したがって，$f\,'(x)$ の符号が変化するときは，必ず $f\,'(x)=0$ となる点が存在する．

1．［増加，減少の定義］

○　ある区間 $a\leqq x\leqq b$ 内の任意の値 x_1, x_2 について，

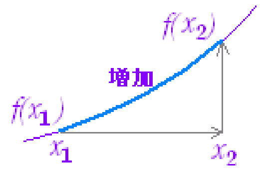
$x_1< x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$

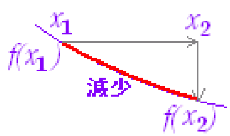
が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 $a\leqq x\leqq b$ において（単調）増加であるという．

○　ある区間 $a\leqq x\leqq b$ 内の任意の値 x_1, x_2 について，

$x_1< x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$

が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 $a\leqq x\leqq b$ において（単調）減少であるという．





2．［導関数を用いた増減の判定］

（単調）増加及び（単調）減少は，異なる２つの値 x_1, x_2 に対する関数の値を比較して得られる性質であるので，原理的には１点の値 $f(x)$ や $f\,'(x)$ のみによっては判断できないものであるが，１つの区間 $a\leqq x\leqq b$ において $f\,'(x)$ が常に正であるならば，この区間で（単調）増加であることを示すことができる．（平均値の定理を用いて証明される．）

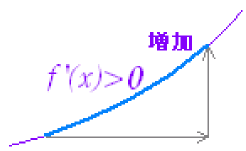
同様にして，１つの区間 $a\leqq x\leqq b$ において $f\,'(x)$ が常に負であるならば，この区間で（単調）減少であることを示すことができる．

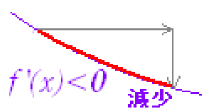
○　ある区間 $a\leqq x\leqq b$ 内で

つねに $f\,'(x) > 0$ →　（単調）増加

○　ある区間 $a\leqq x\leqq b$ 内で

つねに $f\,'(x) < 0$ →　（単調）減少





3．［極値の定義］

○　関数 $f(x)$ について $x=a$ のまわりで，つねに

$$f(a)>f(x)\ ,\ (x\neq a)$$

となるとき，$f(x)$ は $x=a$ で極大であるといい，$f(a)$ を極大値という．

　極大となるところ $x=a$ では，関数 $f(x)$ が増加から減少に変化し，

$$f\,'(a)=0$$

となる．その前後では $f\,'(x)$ の符号は正から負に変化する．

○　関数 $f(x)$ について $x=a$ のまわりで，つねに

$$f(a)<f(x)\ ,\ (x\neq a)$$

となるとき，$f(x)$ は $x=a$ で極小であるといい，$f(a)$ を極小値という．

　極小となるところ $x=a$ では，関数 $f(x)$ が減少から増加に変化し，

$$f\,'(a)=0$$

となる．その前後では $f\,'(x)$ の符号は負から正に変化する．

○　極大値と極小値をまとめて極値という．

○　極値 →$f\,'(x)=0$ でかつ $f\,'(x)$ の符号が変化する[右図1]

　　$f\,'(x)$ の符号が正から負へ変化：極大値

　　$f\,'(x)$ の符号が負から正へ変化：極小値

○$f\,'(x)=0$ でも $f\,'(x)$ の符号が変化しないとき[右図2]

　　極値でない

※　この章では増減表を用いた極値の調べ方を解説したが，後の章で増減表を用いない極値の調べ方にも触れる．（2変数関数についても同様）

　極大の前後では，$f\,'(x)$ が正から負に変化してあり，極大のところでは $f\,'(x)=0$ となる．

x		a	
$f\,'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

図1

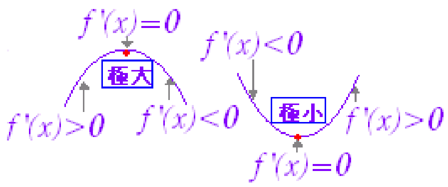
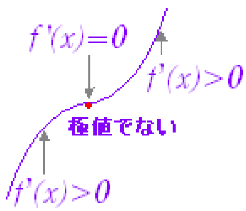
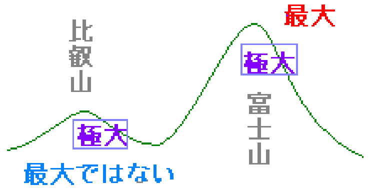


図2



※　高校以来学んでいるように，極大・極小はその点のまわりだけの性質で，一定の区間で一番大きい，小さいを表わす最大・最小とは別のものである．

　極大であっても，最大である場合も，最大でない場合もある．



◇2変数関数の増減表◇

1.　［2変数関数の極値］

○　2変数関数 $f(x, y)$ について，点 (a, b) のまわりで，つねに

$$f(a, b)>f(x, y)\ ,\ (x, y)\neq(a, b)$$

となるとき，$f(x, y)$ は (a, b) で極大であるといい，$f(a, b)$ を極大値という．
　極大となるところでは，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となり，各々増加から減少に変化する．

○　2変数関数 $f(x, y)$ について，点 (a, b) のまわりで，つねに

$$f(a, b)<f(x, y)\ ,\ (x, y)\neq(a, b)$$

となるとき，$f(x, y)$ は (a, b) で極小であるといい，$f(a, b)$ を極小値という．
　極小となるところでは，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となり，各々減少から増加に変化する．

○　1変数関数のときと同様に，極大値と極小値をまとめて極値という．

※　峠を越える道路は通常，右図5の青で示した経路となる．青で示した方向で x 座標だけが変化するとすると，この道路は各 y の最小値を取りながら山を越えるようになっている．特に鞍点（峠）では，y 方向に見れば極小，x 方向に見れば極大となるが，２変数関数としては極値でない．（これよりも大きいところも小さいところもある．）

右図6に示した点（一人掛けソファーの中心部）も $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ であるが極値ではない．

図3

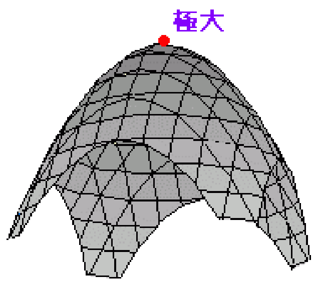


図4

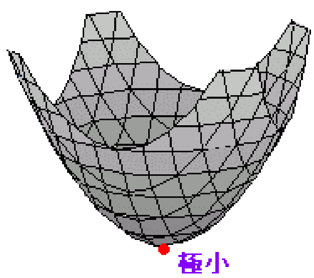


図5

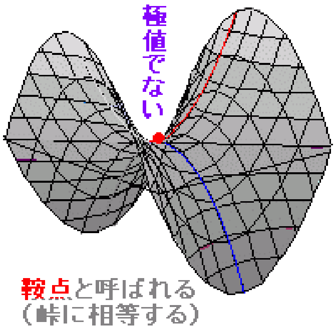
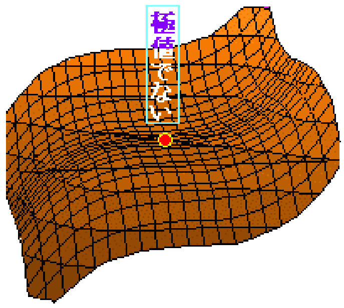


図6

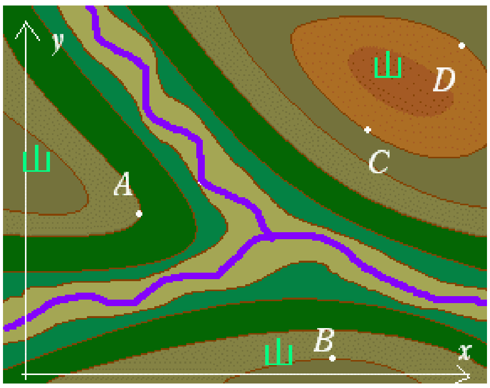


問題

右の等高線で，点 B C, D について f_x，f_y の符号を埋めよ．（初めに?を選び，続いて符号を選べ．）

	例：A	B	C	D
f_x	－	?	?	?
f_y	0	?	?	?

[選択肢]＋，－，0



2． [2変数関数の増減表]

2変数関数で極値となるところでは，$\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$ が成り立つが，この連立方程式の解となる (x, y) が実際に極値となるかどうか［上記の図5，図6でなく図3，図4となるかどうか］は，右図のように2変数関数の増減表を作って調べる．

（手順）

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ の曲線を描く

(2) $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ の曲線を描く

以上の(1)(2)はていねいに描く必要はない．実際には，これら2曲線の交点 (a, b)（連立方程式の解）とその付近での(1)(2)の向きが分かればよい．

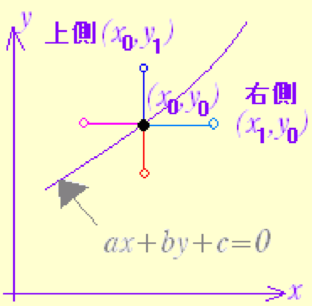
(3) $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ の曲線上で $\frac{\partial f}{\partial y}$ の符号に応じて z が増える向きに矢印を描く（↑または↓）

(4) $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ の曲線上でも同様に右向き又は左向きの矢印を描く．（→または←）

(5)4個の領域について，左で上なら左上向き45°の太めの矢印を描く．右下なら右下向き45°とする．以下同様．（これらは各点での傾き($\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$) を正確に反映している必要はなく，最終的に点 (a, b) に向かっているか，離れているかが分かればよいので，おおまかに45°で描けばよい．）

(6)4個の領域について矢印が描けたら，これらの矢印が全部点 (a, b) に向かっていれば，(a, b) は極大値，全部点 (a, b) から離れていけば，(a, b) は極小値とする．それ以外の場合は極値でない．

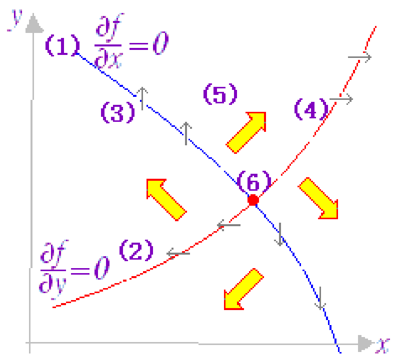
※　次の関係に注意：



左の図で $a>0$ のとき，
$x_0<x_1$ ならば，
$ax_0+by_0+c=0<ax_1+by_0+c$

同様に $b>0$ のとき，
$y_0<y_1$ ならば，
$ax_0+by_0+c=0<ax_0+by_1+c$

増減表



例1

$z=f(x, y)=x^2-2xy+3y^2-4x+8y$ の極値を求めよ．

（答案）

連立方程式

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2y-4=0$ ···(1)

$\frac{\partial f}{\partial y}=-2x+6y+8=0$ ···(2)

を解くと，$x=1$, $y=-1$

---

(1)よりも右にあれば（x が大きければ），$\frac{\partial f}{\partial x}>0$ となるから，(1)よりも右にある部分に（→）を入れる．

※この場合は，(1)よりも下にあれば（y が小さければ）$\frac{\partial f}{\partial x}>0$ となるといっても同じ．

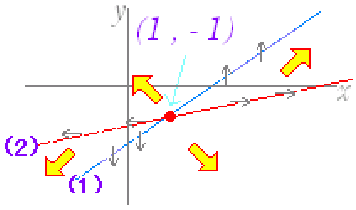
逆に，(1)よりも左にあれば $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ となるから，(1)よりも左にある部分に（←）を入れる．（　(2)の上だけでよい．　）

※この場合は，(1)よりも上にあれば（y が大きけれ

ば）$\frac{\partial f}{\partial x}<0$ となるといっても同じ．
※※　(1)では $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ が成り立つ．(1)以外では $\frac{\partial f}{\partial x}$ は正か負かいずれかとなる．つまり，x が増えれば，z は増えるか減るかいずれかとなる．この符号は計算しやすい点の座標を代入して求めてもよい．例えば $(0\,,\,0)$ では $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ だから $(0\,,\,0)$ を含む領域では←になる．

---

(2)よりも上にあれば $\frac{\partial f}{\partial y}>0$ となるから，(2)よりも上にある部分に（↑）を入れる．逆に，(2)よりも下にあれば $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ となるから，(2)よりも下にある部分に（↓）を入れる．
（　(1)の上だけでよい．　）
※で示した考え方は，上と同様．



以上により点 $(1,-1)$ は極小値 $z=f(1,-1)=6$ をとる．

例2

$z=f(x,\,y)=x^2+xy-y^2-2x-y$ の極値を調べよ．

（答案）

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y-2=0$　･･･(1)

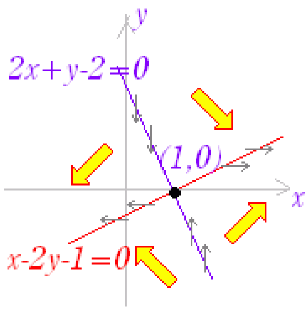
$\frac{\partial f}{\partial y}=x-2y-1=0$･･･(2)

を解くと，$x=1\,,\,y=0$

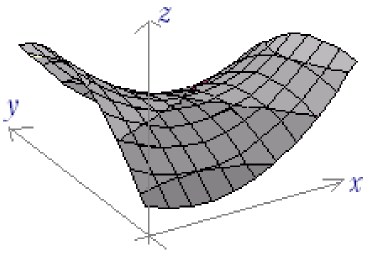
(1)よりも上では（y が大きければ）$\frac{\partial f}{\partial x}>0$ で右矢印
(1)よりも下では（y が小さければ）$\frac{\partial f}{\partial x}<0$ で左矢印
(2)よりも右では（x が大きければ）$\frac{\partial f}{\partial y}>0$ で上矢印
(2)よりも左では（x が小さければ）$\frac{\partial f}{\partial y}<0$ で下矢印

※　計算しやすい点の座標を代入する方法で行うと，
$(0\,,\,0)$ では $2x+y-2<0,\ x-2y-1<0$ となるから，
　(1)は負，(2)も負：左下向き
次に(1)を横切ると左右の向きが変り，(2)を横切ると上下の向きが変ることに注意すると，全部の が描ける．

増減表を作ると右図のようになるから，極値はない．



参考：鳥瞰図



例3

$z=f(x, y)=2x^3-6xy+3y^2$ の極値を調べよ.

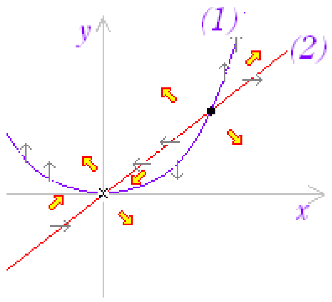
（答案）

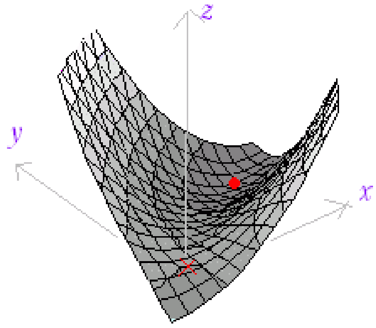
$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2-6y=6(x^2-y)=0$ ・・・(1)

$\frac{\partial f}{\partial y}=-6x+6y=-6(x-y)=0$ ・・・(2)

を解くと，$(0 , 0)$, $(1 , 1)$
$(1 , 0)$ において，→↓
以下境界線を横切るたびに→↓の向きを入れ換えると右図の増減表ができる.

$(1 , 1)$ において極小値 -1 をとる.
$(0 , 0)$ では極値とはならない.





例4
$z=f(x, y)=x^3+3xy^2-3x$ の極値を調べよ.

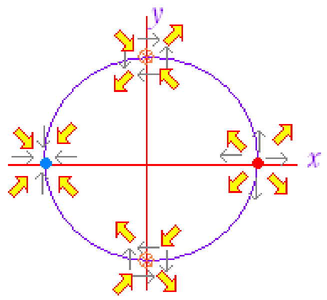
（答案）

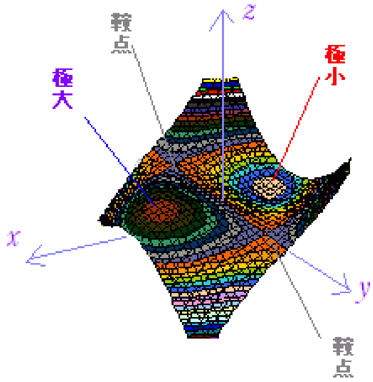
$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-3=3(x^2+y^2-1)=0$ ・・・(1)

$\frac{\partial f}{\partial y}=6xy=0$ ・・・(2)

を解くと，$(1 , 0)$, $(0 , 1)$, $(-1 , 0)$, $(0 ,-1)$
$(1 , 1)$ において，→↑
以下境界線を横切るたびに→↓の向きを入れ換えると右図の増減表ができる.

$(1 , 0)$ において極小値 -2 をとる.
$(-1 , 0)$ において極大値 2 をとる.
$(0 , 1)$, $(0 ,-1)$ では極値とはならない.



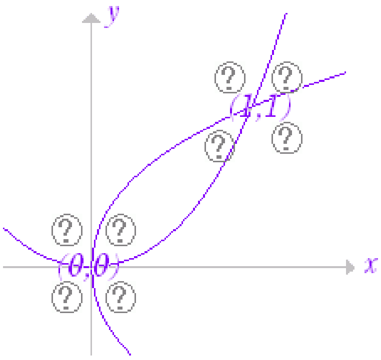


問題

1． 次の関数の増減表を作れ．（右図で，初めにを選び続いてを選べ．正しければ確定し，間違っていれば元に戻る．）

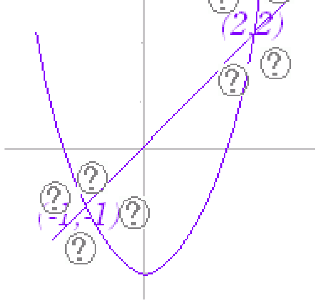
(1) $z=f(x,\,y)=x^3-3xy+y^3$

Help→途中計算鳥瞰図



(2) $z=f(x,\,y)=2x^3-6xy-12x+3y^2$

Help→途中計算鳥瞰図



2． 次の関数の極値を求めよ．

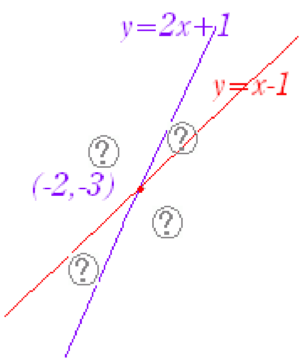
増減表は右図で，初めに?を選び続いて↘↗↙↘を選べ．

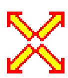
極値は，該当するものを選べ．

$z=f(x, y)=2x^2-2xy+y^2+2x+2y$

- ( ) $(-2,-3)$ で極大値 -5 をとる
- ( ) $(-2,-3)$ で極小値 -5 をとる
- ( ) 極値なし

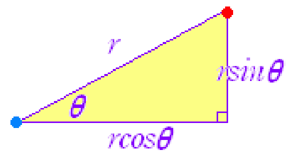
Help→途中計算鳥瞰図





3． ［方向微分］

右図のようにx軸の正の向きとなす角がθである斜辺に沿って長さrだけ進むと，x座標が$r\cos\theta$，y座標が$r\sin\theta$だけ大きくなるから，点(a, b)からx軸の正の向きとなす角がθである斜辺に沿って長さrだけ進んだ点の座標は$(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)$となる．



この方向に沿った平均変化率は

$$\frac{f(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

となるが，これをx軸方向の増加とy軸方向の増加の２段に分けて求めると，

$$\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)+f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

$$=\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)}{r}+\frac{f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

微分係数は，

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)}{r}$$
$$+\lim_{r\to 0}\frac{f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

ここで第1項は，

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)}{r\cos\theta}\cos\theta$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)}{h}\cos\theta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta$$

第2項は，

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r\sin\theta}\sin\theta$$

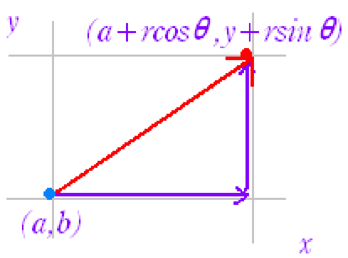
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,\ b)}{h}\sin\theta=\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

となるから，次の式を得る．

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

この式を，ベクトル$\vec{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 方向の微分係数といい，$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e}}$で表わす．すなわち，

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$



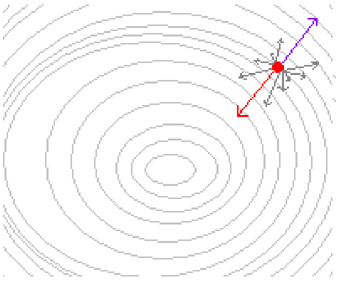
各々の点(a, b)に対して

$|\partial f|$

が最大となる角度θが定まり，この角度θに沿って下降（または上昇）すれば，最短距離で下降（または上昇）することができる．

.

　曲面にボールをそっと置くと，ボールは勾配ベクトルに沿って（逆向きに）転がっていくので，このボールを追跡すると２変数関数の極小値を求めることができる．



4．［勾配ベクトル］

○　方向微分係数は，各点(a, b)ごとに定まるベクトル$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$と単位ベクトル$\vec{e}=(\cos\theta, \sin\theta)$の内積となっているから，$\vec{e}$が$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$と同じ向きのとき最大となる．

$$grad\, f(a, b)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

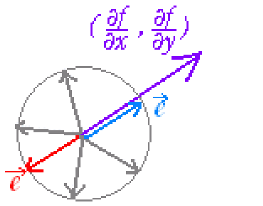
で定められるベクトルを勾配ベクトルという．勾配ベクトルは各点(a, b)において関数$f(x, y)$が最も効果的に増加する向きを表わしている．（勾配ベクトルの逆向きが最も効果的に減少する向きとなる．）

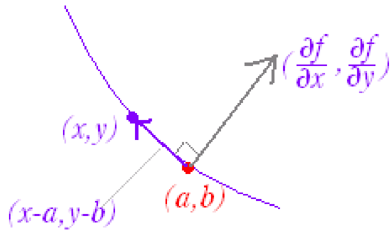
○　第２章で述べた等高線に沿った接線の方程式

$$f_x(a, b)(x-a)+f_y(a, b)(y-b)=0$$

は，右図のように接線上の点$P(x, y)$，接点$A(a, b)$に対してベクトル$\vec{AP}=(x-a, y-b)$と勾配ベクトル$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$が垂直であることを示している．

　すなわち，「勾配ベクトルは等高線に垂直である．」





○　勾配ベクトルに沿った移動の実演

(1) 次の実演1は，上の問題2.の$z=f(x, y)=2x^2-2xy+y^2+2x+2y$について，初期値$(0, 0)$から$r=0.1$ずつ，勾配ベクトルの逆向きに進んだときのシミュレーションで，「試行回数が50回になるか又は勾配ベクトルの大きさが 0.01 以下」になれば止まるプログラムである．上記の結果と比較してみよ．

実演1

(2) 実演2は，上と同じ2変数関数について，初期値を$(-3, 0)$にしたものである．

実演2