← PC版は別頁

◇２次関数による近似（１変数関数）◇

◇要点◇ ※　近似式に関する記述は→第２章←

○ $x \fallingdotseq a$ における関数 $f(x)$ の振舞い

0次近似：$f(x) \fallingdotseq f(a)$

１次近似：$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)$

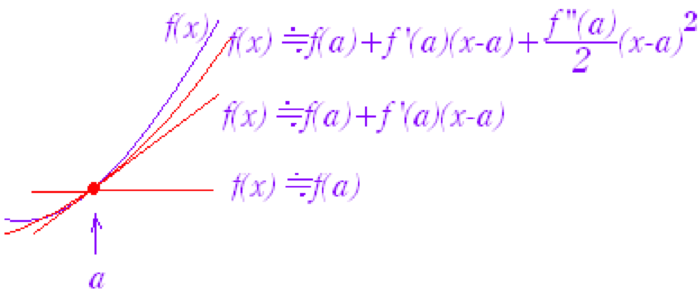
２次近似：$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

○　特に，$x \fallingdotseq 0$ のとき

0次近似：$f(x) \fallingdotseq f(0)$

１次近似：$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x$

２次近似：$f(x) \fallingdotseq f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2$



※　近似式の身近な例

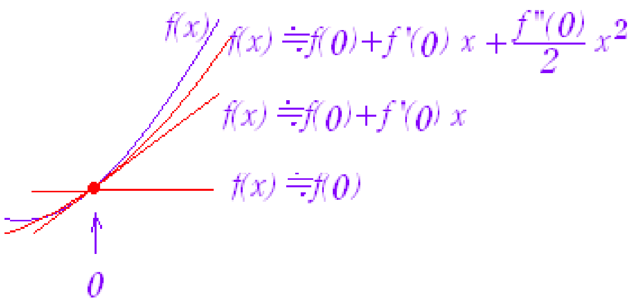
$f(a)=1$，$f'(a)=2$，$f''(a)=6$，$x-a=0.1$ のとき，

$f(x) \fallingdotseq 1+2\cdot 0.1+\dfrac{6}{2}\cdot 0.1^2=1.23$

$f(a)$ は整数部分に対応

$f'(a)(x-a)$ は小数第1位に対応

$\dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ は小数第2位に対応している．



※　近似式の身近な例

$f(0)=1$，$f'(0)=2$，$f''(0)=6$，$x=0.01$ のとき，

$f(x) \fallingdotseq 1+2\cdot 0.01+\frac{6}{2}\cdot 0.01^2=1.0203$

$f(0)$ は整数部分に対応

$f'(0)x$ は小数第2位に対応

$\frac{f''(0)}{2}x^2$ は小数第4位に対応している．

◇極値の判定◇

以下においては，関数 $f(x)$ として滑らかな関数，すなわち，$f'(x)$ が連続な関数のみを取り扱う．

第4章では，$x=a$ の前後における $f'(x)$ の符号の変化によって極値の判定を行った：

○極値 →$f'(x)=0$ でかつ $f'(x)$ の符号が変化する
$f'(x)$　の符号が正から負へ変化：極大値
$f'(x)$　の符号が負から正へ変化：極小値
○$f'(x)=0$ でも $f'(x)$ の符号が変化しないとき
極値でない

次のように $x=a$ における $f''(x)$ の値 $f''(a)$ で調べることもできる：

$f'(a)=0$ のとき，
○$f''(a)>0$ →$x=a$ で極小値をとる．
○$f''(a)<0$ →$x=a$ で極大値をとる．
○$f''(a)=0$ →$x=a$ で極値かどうかこれだけでは分からない．
※　2次導関数が負→極大，正→極小であることに注意

（証明）
2次近似：$f(x) \fallingdotseq f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$
の式において，$f'(a)=0$ のとき，
$$f(x)-f(a) \fallingdotseq \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$
となるから，
(1)$f'(a)=0, f''(a)<0$ のとき，$x\neq a$ のとき $f(x)<f(a)$ となる．
(2)$f'(a)=0$, $f''(a)>0$ のとき，$x\neq a$ のとき $f(x)>f(a)$ となる．
(3)$f'(a)=0$, $f''(a)=0$ のとき，これだけでは分からない．

極大値

x		a	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

極小値

x		a	
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

極値でない

x		a	

$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	$f(a)$	↗

極大値

x		a	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		−	
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

極小値

x		a	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		+	
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

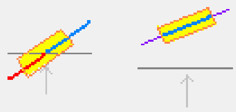
これだけでは分からない

x		a	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		0	
$f(x)$	?	$f(a)$	?

※これだけ（第2次導関数まで）では分からないとは，「分からない」ということではなく，さらに高次の導関数を用いれば判断できる．

　右の表において，ア）では，$f'(a)=0$, $f''(a)=0$ となっており第2次導関数までだけでは極値かどうか判断できない．

　まず，符号の変わり目ではわずかな値の変化でも符号が変るが，$x=a$ において符号が正のとき，その近くにおいては，符号が急に変化するわけではないことに注意する．



○　右の表において，$f''(x)$ という関数の導関数は $f^{(3)}(x)$ で，増加して（$f^{(3)}(x)>0$） 0 になる（$f''(x)=0$）のだから，それまでは $f''(x)$ は負であったといえる．また，0 から増加するのだから，その後は正であるといえる．
　以上により，$f''(x)$ の符号が定まる．
○　同様にして，$f'(x)$ という関数の導関数は $f''(x)$ で，減少して（$f''(x)<0$） 0 になる（$f'(x)=0$）のだから，それまでは正（$f'(x)>0$）．また，0 から増加するのだから，その後は正であるといえる．
　以上により，$f'(x)$ の符号が定まる．
○　以上により，$f(x)$ は増加→（休み）→増加となるから，$x=0$ のとき $f(x)$ は極値ではないことが分かる．

※　右の表ウ）では，第3次導関数まで符号が 0 で第4次導関数で符号が正になる点 $x=0$ において，極小値となる例を示している．考え方は同様である．

ア）$f(x)=x^3$

x		0	
$f'(x)=3x^2$		0	
$f''(x)=6x$		0	

$f(x)$	?	0	?

イ） $f(x)=x^3$

x		0	
$f(x)$	↗	0	↗
$f'(x)=3x^2$	+	0	+
$f''(x)=6x$	−	0	+
$f^{(3)}(x)=6$	+	+	+

ウ） $f(x)=x^4$

x		0	
$f(x)$	↘	0	↗
$f'(x)=4x^3$	-	0	+
$f''(x)=12x^2$	+	0	+
$f^{(3)}(x)=24x$	-	0	+
$f^{(4)}(x)=24$	+	+	+

例

関数 $f(x)=e^x\sin x$ が $x=-\frac{\pi}{4}$ において極値をとるかどうか調べよ．

（答案）

$f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)$

$f''(x)=e^x(\sin x+\cos x)+e^x(\cos x-\sin x)=2e^x\cos x$

$f'(-\frac{\pi}{4})=0$

$f''(-\frac{\pi}{4})>0$ により， $x=-\frac{\pi}{4}$ において極小値をとる．

問題

$f(x)=2\sin x+\cos 2x$ （$0<x<\pi$）の極値を調べた．正しいものを選べ．

（答案）

$f'(x)=2\cos x-2\sin 2x$

$f''(x)=-2\sin x-4\cos 2x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x-2\sin 2x=2\cos x-4\sin x\cos x$

$=2\cos x(1-2\sin x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}, x=\frac{\pi}{2}, x=\frac{5\pi}{6}$

ア） $x=\frac{\pi}{6}$ のとき， $f'(\frac{\pi}{6})=0$， $f''(\frac{\pi}{6})<0$ だから，

○ 極大 ○ 極小 ○ 極値でない

イ） $x=\frac{\pi}{2}$ のとき， $f'(\frac{\pi}{2})=0$， $f''(\frac{\pi}{2})>0$ だから，

○ 極大 ○ 極小 ○ 極値でない

ウ） $x=\frac{5\pi}{6}$ のとき， $f'(\frac{5\pi}{6})=0$， $f''(\frac{5\pi}{6})<0$ だから，

○ 極大 ○ 極小 ○ 極値でない

Check

◇２変数関数の近似◇

◇要点◇

○ $(x, y)\fallingdotseq(a, b)$ における関数 $f(x, y)$ の振舞い

0次近似：

$f(x, y) \fallingdotseq f(a, b)$ ･･･(1)

1次近似：

$f(x, y) \fallingdotseq f(a, b)+f_x(a, b)(x-a)+f_y(a, b)(y-b)$ ⋯(2)

2次近似：

$f(x, y) \fallingdotseq f(a, b)+f_x(a, b)(x-a)+f_y(a, b)(y-b)$
$+\frac{1}{2}\{f_{xx}(a, b)(x-a)^2+2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b)$
$+f_{yy}(a, b)(y-b)^2\}$ ･･･(3)

○　特に，$(x, y) \fallingdotseq (0, 0)$ のとき

0次近似：

$f(x, y) \fallingdotseq f(0, 0)$

1次近似：

$f(x, y) \fallingdotseq f(0, 0)+f_x(0, 0)\,x+f_y(0, 0)\,y$

2次近似：

$f(x, y) \fallingdotseq f(0, 0)+f_x(0, 0)\,x+f_y(0, 0)\,y$
$+\frac{1}{2}\{f_{xx}(0, 0)\,x^2+2f_{xy}(0, 0)\,xy+f_{yy}(a, b)\,y^2\}$

1次近似までについては，第2章で述べた．

2次近似の式を
$f(x, y) \fallingdotseq f(a, b)+f_x(a, b)(x-a)+f_y(a, b)$
$(y-b)+A(x-a)^2+B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2$　･･･(4)
とおくと，A, B, C は次のようにして求められる：

(4)の両辺を x で偏微分すると，
$f_x(x, y) \fallingdotseq f_x(a, b)+2A(x-a)+B(y-b)$　･･･(5)
関数 $f_x(x, y)$ に(2)を適用すると
$f_x(x, y) \fallingdotseq f_x(a, b)+f_{xx}(a, b)(x-a)+f_{xy}(a, b)(y-b)$　･･･
(6)
(5)(6)を比較すると，$2A=f_{xx}(a, b), B=f_{xy}(a, b)$

同様にして，(4)の両辺を y で偏微分すると，
$f_y(x, y) \fallingdotseq f_y(a, b)+B(x-a)+2C(y-b)$　･･･(5)
関数 $f_y(x, y)$ に(2)を適用すると
$f_y(x, y) \fallingdotseq f_y(a, b)+f_{xy}(a, b)(x-a)+f_{yy}(a, b)(y-b)$　･･･
(6)
(5)(6)を比較すると，$B=f_{xy}(a, b), 2C=f_{yy}(a, b)$

以上から(3)が得られる．

◇２変数関数の極値◇

２変数関数の極値を，増減表を作成して調べる方法については第4章で学んだ．ここでは，第2次偏導関数の符号によって２変数関数の極値を調べる方法を学ぶ．

すなわち，２変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において極値をとるためには，第1次偏導関数が $f_x(a, b)=f_y(a, b)=0$ を満たすことが必要条件であるが，この条件を満たしても極値でない場合が含まれる．そこで，第1次偏導関数が $f_x(a, b)=f_y(a, b)=0$ を満たす点が，さらにどのような条件を満たせば極値となるかを調べる．

上記(3)により，
$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b)+f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+\frac{1}{2}\{f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\}$
であるが，$f_x(a,b)+f_y(a,b)=0$ の場合を調べているから，
$f(x,y) \fallingdotseq f(a,b)+\frac{1}{2}\{f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\}$

そこで，$f(x,y)-f(a,b)=\frac{1}{2}\{f_{xx}(a,b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b)+f_{yy}(a,b)(y-b)^2\}$ が，つねに正ならば $f(a,b)$ は極小値，つねに負ならば $f(a,b)$ は極大値といえる．

$f(x,y)-f(a,b)=A(x-a)^2+B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2$
符号を調べると，次のことが分かる．
ここで，$A=\frac{1}{2}f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$, $C=\frac{1}{2}f_{yy}(a,b)$ である．

◇要点◇
(I) $B^2-4AC<0$ のとき極値となる．
ア) $A>0, B^2-4AC<0$ のとき，極小
イ) $A<0, B^2-4AC<0$ のとき，極大
(II) $B^2-4AC>0$ のとき極値でなく，鞍点となる．
(III) $B^2-4AC=0$ のとき，これだけでは分からない．

※　右の結果を B^2-4AC の符号によって分類したものがこの要点である．

上の結果を用いると，２変数関数の極値は次のようにまとめることができる．
※ $H(x,y)$ はヘッセ行列と呼ばれる．

◇要点◇
$$H(x,y)=\begin{pmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{pmatrix}$$
とおき，
行列 $H(x,y)$ の固有値を，p,q とすると，
(I) p,q が同符号ならば，$f(x,y)$ は (a,b) で極値をとる．
$p>0, q>0$ のとき，極小値
$p<0, q<0$ のとき，極大値
(II) p,q が異符号ならば，$f(x,y)$ は (a,b) で極値とならず鞍点となる．
(III) $pq=0$ のとき，$f(x,y)$ は (a,b) で極値かどうかこれだけでは分からない．

（解説）　次のように変形する．
i) $A\neq 0$ のとき，
$F=A(x-a)^2+B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2$ とおくと
$F=A\{(x-a)^2+\frac{B}{A}(x-a)(y-b)\}+C(y-b)^2$
$=A\{(x-a)+\frac{B}{2A}(y-b)\}^2-\frac{B^2}{4A}(y-b)^2+C(y-b)^2$
$=A\{(x-a)+\frac{B}{2A}(y-b)\}^2-\frac{B^2-4AC}{4A}(y-b)^2$
だから，点 (a,b) の近くで
$A>0,\ B^2-4AC<0$ ならば $F\geqq 0$ (等号は $(x,y)=(a,b)$ のとき)
$A<0,\ B^2-4AC<0$ ならば $F\leqq 0$ (等号は $(x,y)=(a,b)$ のとき)
（$0\leqq B^2<4AC$ のときは，A は 0 とはならない．）

$B^2-4AC>0$ ならば A と $-\frac{B^2-4AC}{4A}$ は符号が逆になり，F は

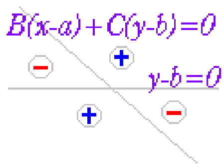
正の値も負の値もとる：極値でなく，鞍点となる．

$B^2-4AC=0$ ならば $F=A\ \{(x-a)+\frac{B}{2A}(y-b)\ \}^2$ となり，A の符号によって変り，これだけでは分からない．

ii) $A=0$ のとき

$F=B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2=(y-b)\{B(x-a)+C(y-b)\}$

a) $B\neq 0$ のとき $y-b$ の正負に応じて，F は正負の値をとる．



b) $B=\ 0$ のとき，$F=C(y-b)^2$ となり，C の符号によって変り，これだけでは分からない．

（解説）

$f(x,\ y)-f(a,\ b)=\frac{1}{2}\{\,f_{xx}(a,\ b)(x-a)^2+2f_{xy}(a,\ b)(x-a)(y-b)$
$+f_{yy}(a,\ b)(y-b)^2\,\}$

$$=A(x-a)^2+B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2$$

とおくと

$$f_{xx}(a,\ b)=2A,\ f_{xy}(a,\ b)=B,\ f_{yy}(a,\ b)=2C$$

だから

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a,b)-z & f_{xy}(a,b) \\ f_{xy}(a,b) & f_{yy}(a,b)-z \end{vmatrix}=0$$

は，

$$\begin{vmatrix} 2A-z & B \\ B & 2C-z \end{vmatrix}=0$$

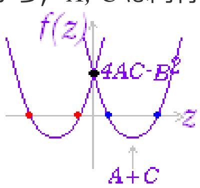
と書ける．すなわち，固有方程式は，

$$f(z)=z^2-2(A+C)z+4AC-B^2=0$$
$$f(z)=\{\ (z-(A+C)\ \}^2-(A+C)^2+4AC-B^2=0$$
$$f(z)=\{\ (z-(A+C)\ \}^2-\{\ (A-C)^2+B^2\}=0$$

となり，右のように２次関数のグラフと z 軸との交点を見ると，極値かどうか調べることができる．

$4AC-B^2>0$ のとき（$B^2-4AC<0$ のとき）

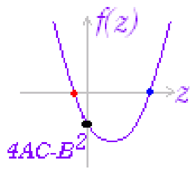
$0\leqq B^2<4AC$ は正だから，$A,\ C$ は同符号



<===> ２つの正の固有値 p,q をもつとき，上記(I)ア)より極小となる．

<===> ２つの負の固有値 p,q をもつとき，上記(I)イ）より，極大となる．

$4AC-B^2<0$ のとき（$B^2-4AC>0$ のとき）



<===> 固有値が異符号となるとき，上記(II)より鞍点となる．

例1

$f(x,y)=x^3-3xy+y^3$ の極値を調べよ.

（答案）

$f_x=3x^2-3y, f_{xx}=6x, f_{yx}=-3, f_y=-3x+3y^2, f_{yy}=6y$

だから,

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

連立方程式 $f_x=3x^2-3y=0, f_y=-3x+3y^2=0$ の解は

$(0,0), (1,1)$ の２個

(1)

$(0,0)$ のとき, $H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

の固有方程式は,

$$\begin{vmatrix} -z & -3 \\ -3 & -z \end{vmatrix}=0$$

固有方程式の解は, $z^2-9=0$ より, $z=\pm 3$

異符号だから, $(0,0)$ では極値を持たず鞍点となる.

(2)

$(1,1)$ のとき, $H(1,1)=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

の固有方程式は,

$$\begin{vmatrix} 6-z & -3 \\ -3 & 6-z \end{vmatrix}=0$$

固有方程式の解は, $z^2-12z+27=0$ より, $z=3, 9$

正の２つの解をもつから, $(1,1)$ で極小となり,

極小値は $f(1,1)=-1$

例2

$f(x,y)=\sin x \sin y$ （$-\frac{\pi}{2}<x, y<\frac{\pi}{2}$）の極値を調べよ.

（答案）

$f_x=\cos x \sin y, f_{xx}=-\sin x \sin y,$

$f_{yx}=\cos x \cos y, f_y=-\sin x \cos y, f_{yy}=-\sin x \sin y$

だから,

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix}$$

連立方程式 $f_x=\cos x \sin y=0, f_y=\sin x \cos y=0$ の解は

$(0,0)$

このとき, $H(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

の固有方程式は,

$$\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 1 & -z \end{vmatrix}=0$$

固有方程式の解は, $z^2-1=0$ より, $z=\pm 1$

異符号だから, $(0,0)$ では極値を持たず鞍点となる.

極値はない.

問題 （半角数字＝１バイト文字で答えよ）

(1) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy+1$ の極値を調べよ.

（答案）

偏導関数は $f_x=3x^2-$ ＿＿ , $f_y=3y^2-$ ＿＿ ,

$f_{xx}=$ ＿＿ , $f_{xy}=$ ＿＿ , $f_{yy}=$ ＿＿

となり, 連立方程式 $f_x=0$, $f_y=0$ の解は $(0,0), (2,2)$

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

ア） $(0,\ 0)$ において固有方程式

$$\begin{vmatrix}-z & -6\\ -6 & -z\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow z^2-36=0$$ の解は，$z=\pm 6$

だから $(0,\ 0)$ において

◯ 極大値をとる ◯ 極小値をとる ◯ 鞍点となる
◯ 第2次偏導関数までででは極値を判別できない

イ） $(2,\ 2)$ において固有方程式

$$\begin{vmatrix}12-z & -6\\ -6 & 12-z\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow z^2-24z+108=0$$

　の解は，$z=6,\ 18$

だから $(2,\ 2)$ において

◯ 極大値をとる ◯ 極小値をとる ◯ 鞍点となる
◯ 第2次偏導関数までででは極値を判別できない

Check　Reset

(2) $f(x,\ y)=(x^2-2x)(y^2-2y)$ の極値を調べよ．

（答案）

偏導関数は $f_x=(\quad)(y^2-2y)$，$f_y=(x^2-2x)(\quad)$，

$f_{xx}=\square(y^2-2y)$，$f_{xy}=(2x-2)(2y-2)$，

$f_{yy}=\square(x^2-2x)$ となり，

連立方程式 $f_x=0$，$f_y=0$ の解は $(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (2,\ 2)$

ア） $(0,\ 0)$ において

$$H(0,0)=\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix}$$

固有方程式は，$\begin{vmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow z^2-16=0$　の解は，$z=\pm 4$

だから $(0,\ 0)$ において

◯ 極大値をとる ◯ 極小値をとる ◯ 鞍点となる
◯ 第2次偏導関数までででは極値を判別できない

イ） $(1,\ 1)$ において

$$H(1,1)=\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix}$$

固有方程式は，$\begin{vmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow (-2-z)^2=0$　の解は，$z=2,\ 2$

だから $(1,\ 1)$ において

◯ 極大値をとる ◯ 極小値をとる ◯ 鞍点となる
◯ 第2次偏導関数までででは極値を判別できない

ウ） $(2,\ 2)$ において

$$H(2,2)=\begin{pmatrix}\square & \square\\ \square & \square\end{pmatrix}$$

固有方程式は，$\begin{vmatrix}\square-z & \square\\ \square & \square-z\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow z^2-4=0$　の解は，$z=\pm 2$

だから $(2, 2)$ において

- ◯ 極大値をとる ◯ 極小値をとる ◯ 鞍点となる
- ◯ 第2次偏導関数までででは極値を判別できない

Check Reset