→ スマホ版は別頁

== 重積分の計算 ==

◇累次積分◇

区間 $a \leqq x \leqq b$ において不等式 $p(x) \leqq y \leqq q(x)$ を満たす xy 平面上の領域を K とする． K 上で定義される関数 $z=f(x, y) \geqq 0$ について，不等式 $0 \leqq z \leqq f(x, y)$ を満たす xyz 空間の領域（立体）を M とするとき，立体 M の体積を求めることを考える．

集合記号で表わすと次の領域となっている：

$K=\{(x,y)|a \leqq x \leqq b,\ p(x) \leqq y \leqq q(x)\}$

$M=\{(x,y,z)|\ (x,y) \in K,\ 0 \leqq z \leqq f(x,y)\}$

図 1

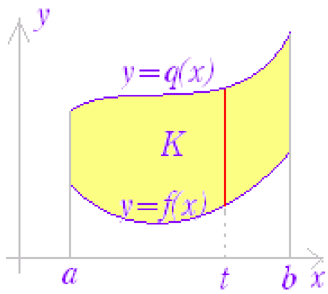


図 2

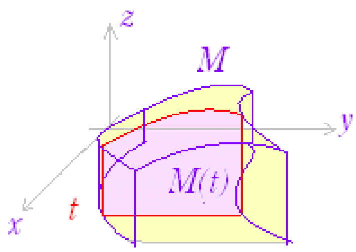


図 3

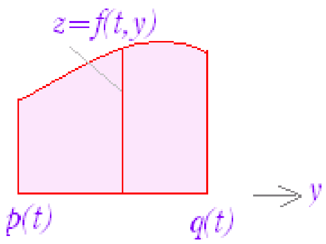


図 4

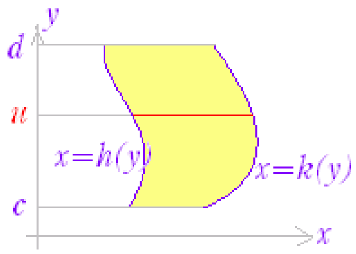


図２，図３において桃色で示した $x=t$ の断面の面積を $M(t)$ とすると,

$$M(t)=\int_{p(t)}^{q(t)} f(t, y)dy$$

M の体積を V とおくと,

$$V=\int_a^b \{\int_{p(t)}^{q(t)} f(x, y)dy\}dx \quad \cdots(1)$$

一方，領域 K 上の重積分は

$$V=\iint_K f(x, y)dxdy \quad \cdots(2)$$

で表わされるから,

$$\boxed{\iint_K f(x, y)dxdy=\int_a^b \{\int_{p(t)}^{q(t)} f(x, y)dy\}dx}$$

※　このように定積分を繰り返し行うこと（累次積分）により重積分の値を求めることができる．

※　上の説明では $f(x, y) \geqq 0$ の場合について，体積を求めたが，$f(x, y)$ が必ずしも正または0とは限らないとき重積分は体積を表わさないが，累次積分で求められる事情は同じである．

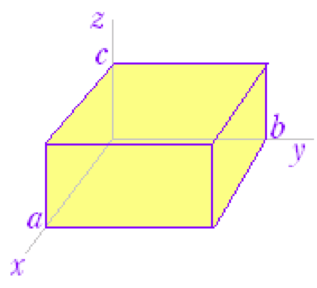
※　図４のように，領域 K の形によっては，$y=u$ の断面から求める方が求めやすいことがある．この場合は,

$$V=\int_c^d \{\int_{h(t)}^{k(t)} f(x, y)dx\}dy$$

で求められる．

例 1

右図のように，$0 \leqq x \leqq a$，$0 \leqq y \leqq b$，$0 \leqq z \leqq c$ の区間にある直方体の体積は $V=abc$ であるが，これを重積分で確かめると



ア）　$x=t$ の断面で切ると，

$$M(t)=\int_0^b cdy=\Big[cy\Big]_0^b=bc$$

$$V=\int_0^a\{\int_0^b cdy\}dx=\int_0^a bcdx=abc$$

イ） $y=u$ の断面で切ると，

$$M(u)=\int_0^a cdx=\Big[cx\Big]_0^a=ac$$

$$V=\int_0^b\{\int_0^a cdx\}dy=\int_0^b acdy=abc$$

例 2

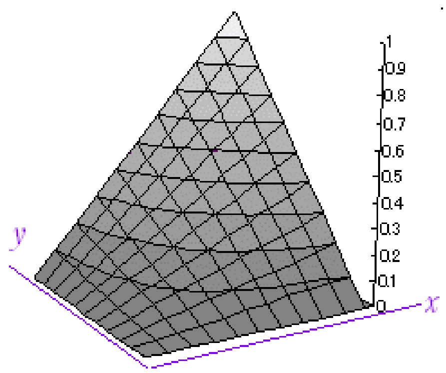
$K=\{(x,y)|\ 0\leqq x\leqq 1,\ \ 0\leqq y\leqq 1\}$

$M=\{(x,y,z)\ |\ (x,y)\in K\ ,\ 0\leqq z\leqq xy\}$ で定義される立体の体積は,

$$V=\int_0^1\{\int_0^1 xydx\}dy=\int_0^1\Big[\frac{1}{2}x^2y\Big]_0^1dy$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}ydy=\Big[\frac{y^2}{4}\Big]_0^1=\frac{1}{4}$$

$z=xy$ の曲面



一般に，$f(x,y)=g(x)h(y)$ のように，積の形に変数分離できるときは

$$\int_a^b\int_c^d g(x)h(y)dxdy\ =\int_a^b g(x)dx\int_c^d h(y)dy$$

が成り立つ.

例

$$\int_a^b\int_c^d x^my^ndxdy\ =\int_a^b x^mdx\int_c^d y^ndy$$

$$=\Big(\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}\Big)\Big(\frac{d^{n+1}-c^{n+1}}{n+1}\Big)$$

だから

$$\int_0^1\int_0^1(Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F)dxdy$$

$$=\frac{A}{3}+\frac{B}{4}+\frac{C}{3}+\frac{D}{2}+\frac{E}{2}+F$$

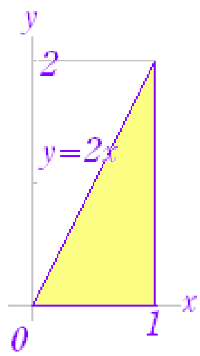
例 3

右図のように，$y=2x$ ， x 軸および直線 $x=1$ とで囲まれた図形上で定義される２変数関数 $z=xy$ と平面 $z=0$ とで囲まれる立体の体積

すなわち，

$K=\{(x,y)|\ 0\leqq x\leqq 1,\ \ 0\leqq y\leqq 2x\}$

$M=\{(x,y,z)\ |\ (x,y)\in K\ ,\ 0\leqq z\leqq xy\}$ で定義される立体の体積は,



ア）x 軸に垂直な断面で切り，y で積分した後に x で積分すれば

$$\int_0^1\{\int_0^{2x} xydy\}dx=\int_0^1\Big[x\frac{y^2}{2}dy\Big]_0^{2x}dx$$

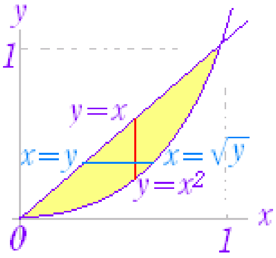
$$=\int_0^1\Big[x\frac{4x^2}{2}\Big]dx=\int_0^1 2x^3dx$$

$$=\Big[\frac{x^4}{2}\Big]_0^1=\frac{1}{2}$$

イ）y 軸に垂直な断面で切り，x で積分した後に y で積分すれば

$$\int_0^2 \{\int_{\frac{y}{2}}^1 xydx\}dy = \int_0^2 \left[\frac{x^2}{2}y\right]_{\frac{y}{2}}^1 dy$$
$$= \int_0^2 (\frac{y}{2} - \frac{y^3}{8})dy = \left[\frac{y^2}{4} - \frac{y^4}{32}\right]_0^2 = \frac{1}{2}$$

例 4



右図のように，$y=x$ と $y=x^2$ とで囲まれた図形上で定義される２変数関数 $z=x+y$ と平面 $z=0$ とで囲まれる立体の体積

すなわち，

$K=\{ (x,y) | 0 \leqq x \leqq 1 ,\quad x^2 \leqq y \leqq x \}$

$M=\{ (x,y,z) | (x,y) \in K ,\ 0 \leqq z \leqq x+y \}$ で定義される立体の体積は，

ア）x 軸に垂直な断面で切り，y で積分した後に x で積分すれば

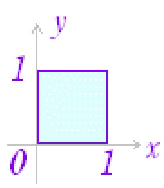
$$\int_0^1 \{\int_{x^2}^x (x+y)dy\}dx$$
$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^x dx$$
$$= \int_0^1 \left\{(x^2 + \frac{x^2}{2}) - (x^3 + \frac{x^4}{2})\right\}dx$$
$$= \int_0^1 \left\{(\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2})\right\}dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$$

イ）y 軸に垂直な断面で切り，x で積分した後に y で積分すれば

$$\int_0^1 \{\int_y^{\sqrt{y}} (x+y)dx\}dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + yx\right]_y^{\sqrt{y}} dy$$
$$= \int_0^1 \{(\frac{y}{2} + y\sqrt{y}) - (\frac{y^2}{2} + y^2)\}dy$$
$$= \int_0^1 (\frac{y}{2} + y\sqrt{y} - \frac{3y^2}{2})dy$$
$$= \left[\frac{y^2}{4} + \frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^3}{2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{3}{20}$$

問題

（※半角数字=1バイト文字で答えよ）



(1)

$\displaystyle\iint_K 2ydxdy$，$K=\{ (x,y) | 0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1 \}$

を計算せよ．

（原式）＝

（原式） ＝

Check Reset Help

$$\iint_K 2y\,dxdy = \int_0^1 \{\int_0^1 2y\,dy\}dx$$
$$= \int_0^1 \Big[y^2\Big]_0^1 dx = \int_0^1 1\,dx = \Big[x\Big]_0^1 = 1$$

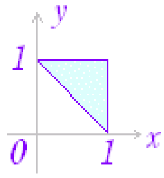
(2)

$$\iint_K 3x\,dxdy,\quad K=\{\ (x,y)|\ 0\leqq x\leqq 1,\ \ 1-x\leqq y\leqq 1\ \}$$

を計算せよ.

（原式） ＝

Check Reset Help



$$\iint_K 3x\,dxdy = \int_0^1 \{\int_{1-x}^1 3x\,dy\}dx$$
$$= \int_0^1 \Big[3xy\Big]_{1-x}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \{3x-3x(1-x)\}dx$$
$$= \int_0^1 3x^2 dx = \Big[x^3\Big]_0^1 = 1$$

(3)

原点を中心とする半径 1 の円の上半分の領域を D とするとき,

$$\iint_D y^2\,dxdy,\quad D=\{\ (x,y)|\ x^2+y^2\leqq 1,\ \ 0\leqq y\ \}$$

を計算せよ.

なお，必要ならば次の公式を用いよ.

$\cos^2 t=\frac{1}{2}(\cos 2t+1)$ （半角公式）

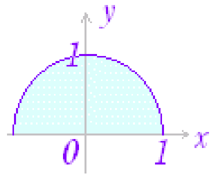
$\cos^4 t=(\cos^2 t)^2=\{\frac{1}{2}(\cos 2t+1)\}^2$

$=\frac{1}{4}\{\cos^2 2t+2\cos 2t+1\}$

$=\frac{1}{4}\{\frac{1}{2}(\cos 4t+1)+2\cos 2t+1\}=\frac{1}{8}\cos 4t+\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{3}{8}$

（原式） ＝ $\frac{\pi}{\ \ }$

Check Reset Help



$$\iint_D y^2\,dxdy = \int_{-1}^1 \{\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy\}dx$$
$$= \int_{-1}^1 \Big[\frac{y^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$x=\sin t$ とおくと，$dx=\cos t\,dt$

x	$0\ \to\ 1$
t	$0\ \to\ \frac{\pi}{2}$

$$（原式）=\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}\cos t\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 t\cos t\,dt = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt$$
$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\cos 4t}{8}+\frac{\cos 2t}{2}+\frac{3}{8})dt$$
$$= \frac{2}{3}\Big[\frac{\sin 4t}{32}+\frac{\sin 2t}{4}+\frac{3t}{8}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8}$$

◇極座標◇

極座標 $x=r\cos\theta$， $y=r\sin\theta$ により，$r\theta$ 平面上の領域 H を xy 平面上の領域 K に写す変数変換を考えると，

$dxdy=|J|drd\theta$

において，

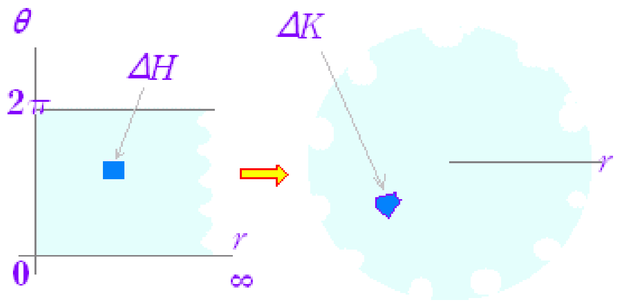
$$J=\begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|J|=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

だから

$$\iint_K f(x,y)dxdy=\iint_H f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

が成り立つ．



上の問題(3)は極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を用いると，次のように計算できる

$$\iint_D y^2dxdy=\int_0^{\pi}\{\int_0^1 r^2\sin^2\theta\, rdr\}d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\sin^2\theta\int_0^1 r^2rdr$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos2\theta}{2}d\theta\int_0^1 r^3dr$$

$$=\left[\frac{\theta}{2}-\frac{\cos2\theta}{4}\right]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{8}$$

例　上の例２の結果を用いて次の式が導かれる．

xy 平面全体（$-\infty<x<\infty$，$-\infty<y<\infty$の範囲）を領域 K とするとき

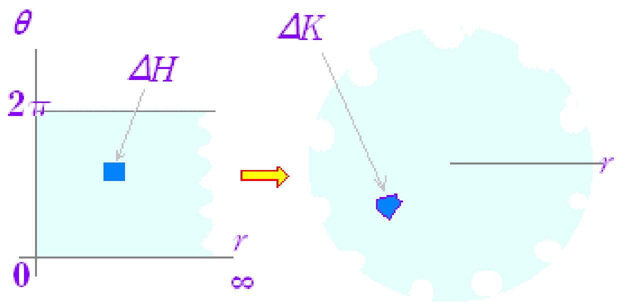
$$\iint_K e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\pi\cdots(1)$$

さらに

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}\cdots(2)$$[ガウスの公式]

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\quad(a>0)\cdots(3)$$

（解説）



図のように，極座標より，$r\theta$ 平面上の領域 H を xy 平面上の領域 K に写す変数変換 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を考えると，

$dxdy=|J|drd\theta$

$|J|=r$

となるから，

$$\iint_K e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\iint_H e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$$

（左辺）

$$=\iint_K e^{-(x^2+y^2)}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy$$

（右辺）$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr\,d\theta$

ここで

$$\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)'=e^{-r^2}r$$

に注意すると

$$\int_0^{\infty}e^{-r^2}r\,dr=\int_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)'dr$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{2}$$

（右辺）$=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi$

以上から，$I^2=\pi$

$I=\sqrt{\pi}$　→(2)

さらに，(3)の左辺において，$\sqrt{a}x=t$ とおいて置換積分を行うと，

$\sqrt{a}dx=dt$

x	$-\infty\to\infty$
t	$-\infty\to\infty$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy=I$$

とおくと

（左辺）$=I^2$　　（続く→）

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\cdot\frac{dt}{\sqrt{a}}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

次の(1)(2)を満たす関数 $f(x)$ を確率密度関数（または，確率分布関数）という．

(1)　区間$-\infty<x<\infty$ において，つねに $f(x)\geqq 0$

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

上の(3)の式において，$a=\frac{1}{2}$ とおくと，

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Ae^{-\frac{x^2}{2}}dx=A\sqrt{2\pi}=1$$

より

$$A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

（半角数字=1バイト文字で答えよ）

問題

(1)　関数 $f(x)=Ae^{-\frac{x^2}{2}}$ が確率密度関数を表わすように，定数 A の値を定めよ．

$$A=\frac{1}{\sqrt{\boxed{}\,\pi}}$$

Check　Reset　Help

(2)　関数

$$f(x)=Be^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\quad(\sigma>0)$$

が確率密度関数を表わすように，定数 B の値を定めよ．

$$B=\frac{1}{\sqrt{\boxed{}\,\pi}\,\sigma}$$

Check　Reset　Help

$$\int_{-\infty}^{\infty} Be^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

において，$x-m=\sqrt{2}\sigma t$

とおくと，$dx=\sqrt{2}\sigma dt$

x	$-\infty\to\infty$
t	$-\infty\to\infty$

$$\int_{-\infty}^{\infty} Be^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} Be^{-t^2}\sqrt{2}\sigma dt$$

$$=\sqrt{2}\sigma B\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{2\pi}\sigma B=1$$

より

$$B=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

(3)

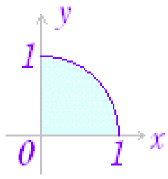
原点を中心とする半径 1 の円で $0\leqq x$，$0\leqq y$ を満たす領域を D とするとき，

$$\iint_D (x+y)dxdy,\ D=\{(x,y)|\ x^2+y^2\leqq 1,\ 0\leqq x,\ 0\leqq y\}$$

を極座標 $x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ を用いて計算せよ．

（原式）$=\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Check　Reset　Help



$$\iint_D (x+y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\int_0^1 (r\cos\theta+r\sin\theta)rdr\right\}d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta\int_0^1 r^2dr$$

$$=\Big[\sin\theta-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$