→ スマホ版は別頁

== 定積分の計算 ==

◇微積分学の基本定理◇

$F'(x)=f(x)$ が成り立つとき，関数 $F(x)$ を関数 $f(x)$ の原始関数という．このとき，次の関係が成立する．

【微積分学の基本定理】

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

（証明）

１次の近似式

$$F(x_k)-F(x_{k-1})=F'(c_k)\Delta x_k=f(c_k)\Delta x_k$$
$$(x_{k-1}\leqq c_k\leqq x_k)$$

において，$|\Delta x_k|$ の最大値 $|\Delta|\rightarrow 0$ のとき，$c_k\rightarrow x_k$ に注意すると，

$$(左辺)=\lim_{|\Delta|\rightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k$$
$$=\lim_{|\Delta|\rightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}\{F(x_k)-F(x_{k-1})\}$$
$$=\lim_{|\Delta|\rightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}F(x_k)-\lim_{|\Delta|\rightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}F(x_{k-1})$$

図のように，中央部分が消え両端だけが残るから，

（左辺）$=F(x_n)-F(x_0)=F(b)-F(a)$　（証明終）

※　なぜこの関係が「基本定理」なのか？

もともと定積分（左辺）は，総和の極限として定義されており，直接計算すれば大変な計算量となる．

$$\lim_{|\Delta|\rightarrow 0}\sum_{k=1}^{n}f(c_k)\Delta x_k$$

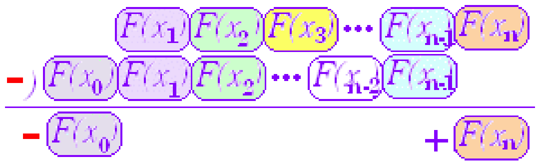
これに対して，微分は平均変化率の極限として定義され，

$$F'(x)=\lim_{h\rightarrow 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$$

例えば，$(x^2)'=2x$ だから，その逆計算は $2x\rightarrow x^2$ のような簡単な式の変形である．

この２つが等しいことが発見され，総和の極限は微分の逆計算により簡単に求められるようになった．このように，17～18世紀のニュートンやライプニッツによる微積分学の基本定理の発見は，もともと別の道を歩んできた「積分」と「微分」を結びつけた大きな一歩となっている．

（高校では，積分は微分の逆計算として導入されることが多いが，これは微積分学の基本定理のおかげである．）



◇不定積分とは◇

○　関数 $f(x)$ の原始関数は，不定積分とも呼ばれ

$$\int f(x)dx$$

で表わされるが，次のように積分区間の上端が変数 x となる定積分に等しい．

$$\int_c^x f(x)dx$$ （c は任意の定数）

任意の定数 c を省略すると，$\int^x f(x)dx$

これを，$\int f(x)dx$ と書く．

○　１つの関数に対する原始関数はただ一つではないが，それらの差は定数である．したがって，原始関数を１つ見つけると他の原始関数も求まる．（任意定数 C を足せばよい．）･･･（＊→）

（＊→）

関数 $f(x)$ の２つの原始関数を $F(x)$，$G(x)$ とすると，

$F'(x)=f(x)$，$G'(x)=f(x)$ となり，

$(F(x)-G(x))'=f(x)-f(x)=0$

ゆえに，$F(x)-G(x)=C$ （C は定数）

○　基本的な関数の不定積分

関数 $f(x)=F'(x)$	不定積分 $F(x)=\int f(x)dx$

（簡単な例）

１次関数

	（任意定数 C を付けて使う）
定数 k	$kx+C$
x^k（ただし，$k\neq-1$）	$\frac{x^{k+1}}{k+1}+C$
$\frac{1}{x}$	$\log\lvert x\rvert+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x+C$
e^x	e^x+C

$f(x)=ax+b\rightarrow\int f(x)dx=\frac{a}{2}x^2+bx+C$

２次関数
$f(x)=px^2+qx+r$
$\rightarrow\int f(x)dx=\frac{p}{3}x^3+\frac{q}{2}x^2+rx+C$

三角関数
$f(x)=\sin(2x+3)\rightarrow\int f(x)dx=-\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C$

$f(x)=\cos(2x+3)\rightarrow\int f(x)dx=\frac{1}{2}\sin(2x+3)+C$

指数関数
$f(x)=e^{2x+3}\rightarrow\int f(x)dx=\frac{1}{2}e^{2x+3}+C$

◇部分積分法◇

部分積分法は，積の微分法の逆計算で，元の形では不定積分を求めにくいときに，部分積分法を使えば計算しやすい形に変ることがある．

【不定積分】
$$\int uv'dx=uv-\int u'vdx$$
【定積分】
$$\int_a^b uv'dx=\Big[uv\Big]_a^b-\int_a^b u'vdx$$

（部分積分法の証明）
【不定積分】
積の微分法により，
$$(uv)'=u'v+uv'$$
この式の両辺を x で積分すると
$$uv=\int u'vdx+\int uv'dx$$
移項すると，
$$\int u'vdx=uv-\int uv'dx$$
【定積分】
$$(uv)'=u'v+uv'$$
の両辺を区間 $a\leqq x\leqq b$ で積分すると
$$\Big[uv\Big]_a^b=\int_a^b u'vdx+\int_a^b uv'dx$$
移項すると，
$$\int_a^b u'vdx=\Big[uv\Big]_a^b-\int_a^b uv'dx$$

◇置換積分法◇

置換積分法は，合成関数の微分法の逆計算で，元の形では不定積分を求めにくいときに，置換積分法を使えば計算しやすい形に変ることがある．

【不定積分】$x=g(t)$ とおくと
$$\int f(x)dx=\int f(g(t))g'(t)dt$$
【定積分】$x=g(t)$ とおくとき，$a=g(\alpha)$，$b=g(\beta)$ ならば
$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

※　実際の計算を行うには，この公式を暗記するのでなく，被積分関数，積分変数，（定積分の場合は積分区間）の各々を等しいものに変換すればよい．（右の例参照）

※不定積分で置換積分法を用いるときは，求まった関数を元の変数で表わしておく．

例
$$\int(2x+1)^3dx$$

$2x+1=t$ とおくと，
被積分関数は，$(2x+1)^3=t^3$
$\frac{dt}{dx}=2$ だから $dx=\frac{dt}{2}$

$$\int(2x+1)^3dx=\int t^3\cdot\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^4}{4}+C$$

t とおいたのは，答案作成者の都合であって，問題文にはそのようなことは書かれていない．
不定積分の置換積分では，元の変数に戻さなければならない．

$=\frac{(2x+1)^4}{8}+C$ …(答)

※定積分で置換積分法を用いるときは，積分区間が変換され，結果は新しい積分区間の下端と上端 α，β を用いた数値

となるので，変数を何にするかということは考えなくてもよい．

例

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx$$

$2x+1=t$ とおくと，$x=0\to 1$ のとき，$t=1\to 3$

被積分関数は，$(2x+1)^3=t^3$

$\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx=\dfrac{dt}{2}$

$$\int_0^1 (2x+1)^3 dx=\int_1^3 t^3\cdot\frac{dt}{2}$$

$$=\left[\frac{t^4}{8}\right]_1^3=\frac{81}{8}-\frac{1}{8}=10\cdots(答)$$

※定積分では，値を求めることができればよく，「元の変数が何であったのかは関係ない」

◇広義積分◇

積分区間の下端または上端が$-\infty$，∞となる定積分を次のように定め，広義積分という．

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx\cdots(1)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx\cdots(2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{\substack{b\to\infty\\ a\to-\infty}}\int_a^b f(x)dx\cdots(3)$$

ただし，(3)では，$a\to-\infty$ と $b\to\infty$ の２つの極限は分けて考えて，

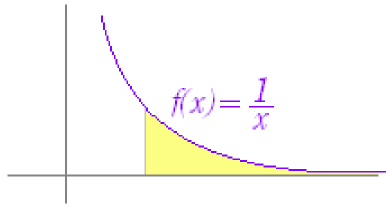
$$\int_{-\infty}^{0} f(x)dx,\quad \int_0^{\infty} f(x)dx$$

が両方とも存在するときにその和で定義されるものとすればよい．

(1)の広義積分が有限確定値となるためには，$x\to\infty$のとき$f(x)\to 0$でなければならない（必要）が，$f(x)\to 0$であっても

$$\int_a^x \frac{1}{x}dx=\log x-\log a\to\infty$$

のように無限大に発散するものもある．



$f(x)=x^k$ の形の関数については，

ア） $k<-1$ のときは，

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{a^{k+1}}{k+1}\right)$$

は有限確定値となるが，

イ） $k>-1$ のときは，

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}-\frac{a^{k+1}}{k+1}\right)$$

は無限大に発散する．

ウ） $k=-1$ のときは，上記のように，$\log x-\log a$ となって無限大に発散する．（$k=-1$ が境目となっている．）

問題

（半角数字=1バイト文字で答えよ）

1． 次の積分を求めよ．

(1)

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\infty}=\boxed{}$$

(2)

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x(x+1)}dx=\int_1^{\infty}\left\{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right\}dx$$
$$=\Big[\log x-\log(x+1)\Big]_1^{\infty}=\left[\log\frac{x}{x+1}\right]_1^{\infty}$$

ここで, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\square$

であるから

$$\lim_{x\to\infty}\log\frac{x}{x+1}=\square$$

（原式）$=\log\square$

採点する　やり直す　解説

2．　$-\infty<x<\infty$ で定義される確率密度関数（統計では確率分布関数と呼ばれることが多い） $f(x)$ は，任意の x に対して $f(x)\geqq 0$ となる他，全事象の確率が1となることに対応して，次の条件を満たさなければならない．

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$$

以下の各式が確率密度関数となるように定数 A の値を定めよ．

(1)　$f(x)=\dfrac{A}{1+x^2}$

（解答）

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{1+x^2}dx=1$$

となるように，定数 A の値を定める．

$f(x)$ は偶関数だから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{1+x^2}dx=2A\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx$$

$x=\tan t$ とおいて置換積分を行う

$x=0\to\infty$ のとき $t=0\to\dfrac{\pi}{2}$， $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ だから

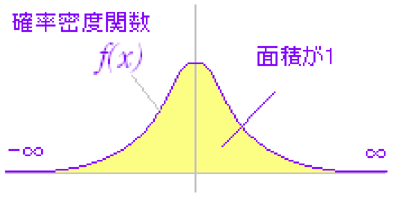
$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot\frac{dt}{\cos^2 t}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dt=\frac{\pi}{2}$$

だから

$$A=\frac{\square}{\square}$$

※分母には全角文字（記号）を使う

採点する　やり直す



(2)　$f(x)=\dfrac{A}{e^x+e^{-x}}$

（解答）

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{e^x+e^{-x}}dx=1$$

となるように定数 A の値を定める．

$e^x=t$ とおいて置換積分を行うと，

$x=-\infty\to\infty$ のとき $t=0\to\infty$， $\dfrac{dt}{dx}=e^x=t$ だから

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^{\infty}\frac{A}{t+\frac{1}{t}}\cdot\frac{dt}{t}$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{A}{1+t^2}dt$$

ここで(1)の結果を利用すると，$A=\dfrac{\square}{\square}$

※分母には全角文字（記号）を使う

採点する　やり直す

◇立体の体積◇

図１のような立体を x 軸に垂直な平面で切ったときの断面積を $S(x)$ とすると，区間 $a\leqq x\leqq b$ にある立体の体積は，

$$V=\int_a^b S(x)dx$$

図１

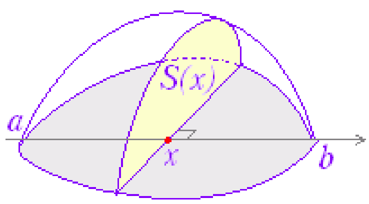


図２

で求められる．

（解説）

円柱や角柱などの柱状図形の体積は，(底面積)×(高さ)で求められ，図２のように高さΔxを x 軸方向に，x 軸に垂直な断面を底面積に選ぶと，この薄い柱状図形の体積は

$$\Delta V_k = S(x_k)\Delta x_k$$

となる．

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$$

で分割された n 個の区間について，これらの総和を求めると，

$$\sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$

さらに，分割を細かくして，Δx_k の最大値 $|\Delta|$ を限りなく 0 に近づけると，

$$V = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{k=1}^{n} S(x_k)\Delta x_k$$

は，定積分で表わすことができ，

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

となる．

図３のように，$y=f(x)$ のグラフと x 軸，$x=a$, $x=b$ の直線で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積は，

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

で求められる．

（解説）

x 軸に垂直な断面積は$S(x)=\pi\{f(x)\}^2$

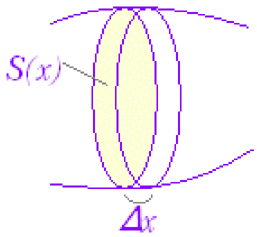
となり，これを積分すれば得られる．

例　$y=x^2$ の曲線と x 軸，$x=0$, $x=1$ の直線で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転してできる回転体の体積は，

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \frac{\pi}{5}$$

なお，図４のようにドーナツ状に中空があるときは，中空の部分を取り除く．

図5のように x 軸の両側にある図形を回転するときは，x 軸から最も遠い線（図では赤の破線）が残る．

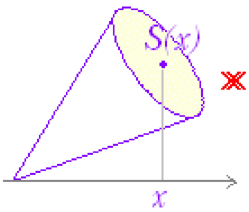


注意

$S(x)$ が断面積であっても，次の図のように断面が x 軸に垂直でなければ，

$$\int_a^b S(x)dx$$

は体積を表わさない．



x 軸に垂直に切ったときの断面積を，x 座標の関数として表わすことが重要である．

図3

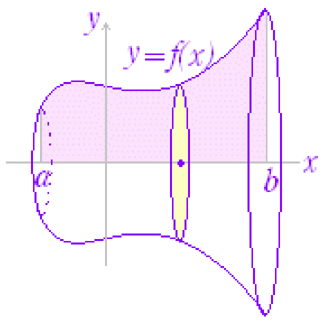


図４

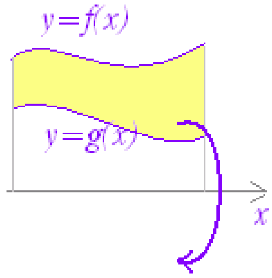
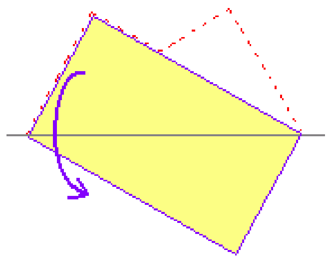


図５

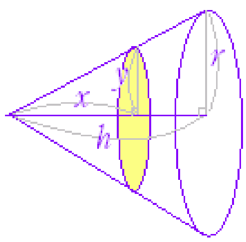


問題

(1)　次の答案は，底面の半径がr，高さがhの直円錐の体積を求めたものである．空欄を埋めよ．

（半角小文字=1バイト文字で答えよ）

円錐の頂点をx軸の原点にとると，xにおける断面は円になり，その半径yは



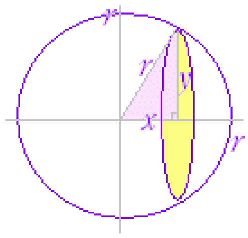
$$y=\frac{\boxed{}}{}x$$

となるから，

$$V=\pi\int_0^h\left\{\frac{\square}{\square}x\right\}^2dx=\frac{\pi\square^2\square}{\square}$$

採点する　やり直す

(2)　次の答案は，半径が r の球の体積を求めたものである．空欄を埋めよ．



球は対称形をしているから，$0\leqq x\leqq r$ の半球の体積を求めて２倍することにする．
右のように x 軸に垂直な断面で切ると x における断面は円になり，その半径 y は

$$y=\sqrt{r^2-x^2}$$

となるから，

$$V=2\pi\int_0^r(r^2-x^2)dx=\frac{\square\pi\square^3}{\square}$$

採点する　やり直す

◇曲線の長さ◇

○　区間 $a\leqq x\leqq b$ における曲線 $y=f(x)$ の長さを L とすると

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

○　区間 $\alpha\leqq t\leqq\beta$ において媒介変数 t を用いて定義される曲線

$$\begin{cases}x=f(t)\\y=g(t)\end{cases}$$

の曲線の長さを L とすると

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\ dt$$

（解説）
x の増分 dx に対する y の増分を dy とすると，

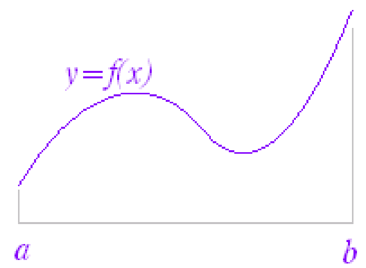
$$dy=f'(x)\ dx$$

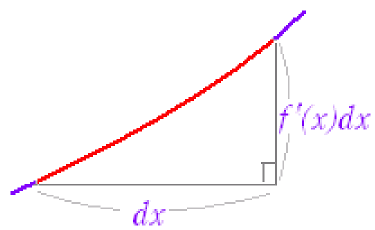
だから，この微小区間 dx における曲線の長さ dL は，ピタゴラスの定理により

$$dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$
$$=\sqrt{(dx)^2+\{f'(x)dx\}^2}$$
$$=\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

両辺を区間 $a\leqq x\leqq b$ において積分すると，

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$





※曲線の方程式が媒介変数で表わされているときは，

$$dL=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}$$
$$=\sqrt{\{f'(t)dt\}^2+\{g'(t)dt\}^2}$$
$$=\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$$

より，

$$L=\int_\alpha^\beta\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\ dt$$

が得られる．

例

曲線 $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$　（$0\leqq x\leqq 1$）の長さを求めよ．

（答案）

$$y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

例

半径が a の円を直線上で滑ることなく回転させたとき，円周上の１点が描く軌跡はサイクロイド曲線と呼ばれ，

$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$　（$0\leqq t\leqq 2\pi$，$a>0$）

だから

$$L=\int_0^1\sqrt{1+(y')^2}dx=\int_0^1\sqrt{1+(\frac{e^x-e^{-x}}{2})^2}dx$$

$$=\int_0^1\sqrt{4+\frac{e^{2x}-2+e^{-2x}}{4}}dx$$

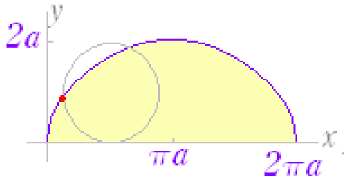
$$=\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4}}dx=\int_0^1\sqrt{\left\{\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right\}^2}dx$$

$$=\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_0^1$$

$$=\frac{e-\frac{1}{e}}{2}-\frac{1-1}{2}=\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$$

で表わされる．

この曲線の長さを求めよ．



（答案）

$\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t)$， $\frac{dy}{dt}=a\sin t$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\{a(1-\cos t\}^2+\{a\sin t\}^2}\ dt$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-2\cos t+1)}dt$$

$$L=\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}dt$$

半角公式 $\cos t=1-2\sin^2\frac{t}{2}$ を用い，

$0\leqq t\leqq 2\pi$ のとき $0\leqq\frac{t}{2}\leqq\pi$ に注意すると， $\sin\frac{t}{2}\geqq 0$

$$L=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$$

※円周の長さには， $2\pi a$ という形で無理数πが登場するが，サイクロイドの長さは，半径の整数倍 $L=8a$ となるのは興味深い．なお，サイクロイドの面積は円の３倍になる：$S=3\pi a^2$