→ スマホ版は別頁

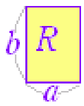
== 積分の定義 ==

◇面積とは何か◇

（考え方の要点）
面積は自然物のように初めからあるのではなく，人間が定義するものである．

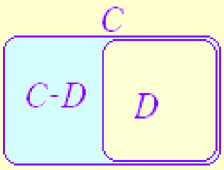
A は２次元の図形，$m(A)$ は図形にその面積を対応させる関数とするとき，関数 $m(A)$ は次の性質をもつ．

(1) $m(A) \geqq 0$
(2) $m(\emptyset)=0$　（$\emptyset$ は空集合）
(3) $A \cap B=\emptyset$ のとき $m(A \cup B)=m(A)+m(B)$



面積を表わす関数 $m(A)$ は，さらに次の性質を持つものとする：
(4)　長方形 R については，$m(R)=ab$

上の性質を前提とすれば，例えば次のような常識（？）も証明可能な定理となる．



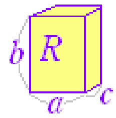
「$C \supset D$ ならば $m(C) \geqq m(D)$」
（∵）
集合 C のうち D でないものを $C-D$ で表わす．（参考までに，$C+D$ という記号は使わず，和集合は $C \cup D$ と書く．）
$(C-D) \cap D=\emptyset$，$C=(C-D) \cup D$ だから
$m(C)=m(C-D)+m(D)$
$m(C)-m(D)=m(C-D) \geqq 0$

○　左の性質(1)(2)(3)を満たすものの例

A を事象とし，$p(A)$ を事象 A が起こる確率とすると，
(1) $p(A) \geqq 0$
(2) $p(\emptyset)=0$　（$\emptyset$ は空集合）
(3) $A \cap B=\emptyset$ のとき $p(A \cap B)=p(A)+p(B)$

確率については，さらに
(4) $p(A) \leqq 1$ が成り立つ．

○　左の性質で A は３次元の図形，$m(A)$ は図形にその体積を対応させる関数とするとき，(4)は次の形になる．



(4)　直方体 R については，$m(R)=abc$

◇曲線で囲まれた図形の面積◇

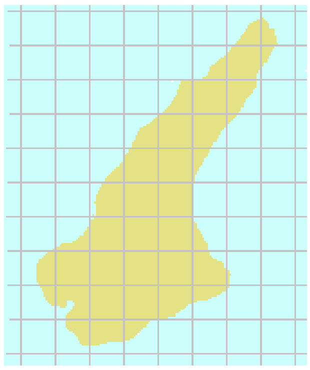
右図のように，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，関数 $y=f(x)$ がつねに正のとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ において，関数 $y=f(x)$，直線 $x=a$，$x=b$ および x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると，

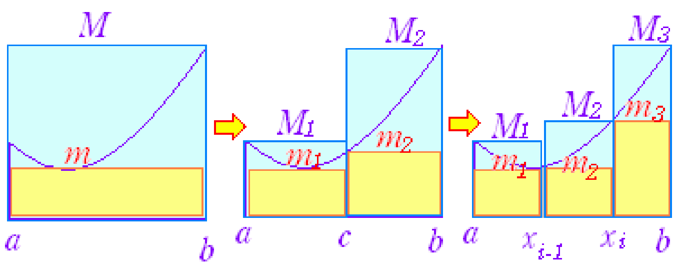
(1)　左端の図から，
$$m(b-a) \leqq S \leqq M(b-a)$$

(2)　２分割したときは，中央の図から，
$$m_1(c-a)+m_2(b-c) \leqq S \leqq M_1(c-a)+M_2(b-c)$$

(n)　分割を細かくしていくと，
$$m_1(x_1-a)+m_2(x_2-x_1)+\cdots+m_n(b-x_{n-1})$$
$$\leqq S \leqq M_1(x_1-a)+M_2(x_2-x_1)+\cdots+M_n(b-x_{n-1})$$
となるが，この右辺と左辺との差は，
(右辺)-(左辺)$=\Sigma(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1})$
M_i-m_i の値のうち最大のものを d とおくと，
$$\Sigma(M_i-m_i)(x_i-x_{i-1}) \leqq \Sigma d(x_i-x_{i-1})=d\Sigma(x_i-x_{i-1})$$
$$=d(b-a)$$
は，$d \to 0$ のとき，0 に近づくから，右辺と左辺は一致し，この値が図形の面積 S となる．

※　小学生のときに，次のような地図から島の面積を求めることがある．塗りつぶされている方眼の数を数えて面積とするのであるが，縦横の線を細かくひけば，もっと正確な値を求めることができる．（半分以上塗りつぶされている方眼を数える（四捨五入する）など近似の精度を上げる工夫もあり得る．）





◇定積分の定義◇

右図のように区間 $a \leqq x \leqq b$ をn個に分割し，
$a=x_0<x_1<x_2< \cdots <x_{n-1}<x_n=b$ とする．

また，小区間 $x_{i-1} \leqq x \leqq x_i$ の幅をΔx_iとし，Δx_i の最大値を$|\Delta|$とおくとき，区間 $a \leqq x \leqq b$ における関数 $f(x)$ に対して次の極限値を定積分という．

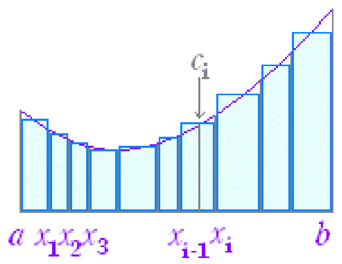
【 定積分の定義 】

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

※　この定義自体の練習を行う場合を除いて，この定義を用いて直接計算することはない．

※　区間 $a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$ のとき，この式で定まる値を面積とする．

$f(x)$ が必ずしも正または0 と限らない一般の場合，この式を定積分の定義とする．



※高校までは，区間 $a \leqq x \leqq b$ をn等分に分割するものとしていたが，上の図のように必ずしも等分でない分割でもよく，区間の幅の最大値$|\Delta|$が0 に近づけばよい．

◇定積分の基本的性質◇

次の関係が成り立つ．

(1) 【 積分変数に依存しない 】

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$$

(2) 【 線形性 】

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b \{f(x)+g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \{pf(x)+qg(x)\}dx = p\int_a^b f(x)dx + q\int_a^b g(x)dx$$

(2) 【 積分区間の性質 】

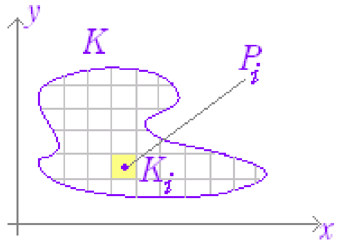
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

秋の奈良

◇重積分の定義◇

右図のように，xy 平面上の領域 K をn個の微小領域に分割し，各微小領域 K_i 内の任意の１点を P_i ，微小領域の面積を ΔA_i ，ΔA_i の最大値を Δ とすると，$f(P_i)\Delta A_i$ は底面積×高さとなって右図下のような角柱の体積となり，これらの総和 $\Sigma f(P_i)\Delta A_i$ は右図のような立体（山）の近似値となっている．

xy 平面上の領域 K における２変数関数 $f(x, y)$ の定積分，すなわち重積分を次のように定義する．



【 重積分の定義 】

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta A_i$$

（解説）

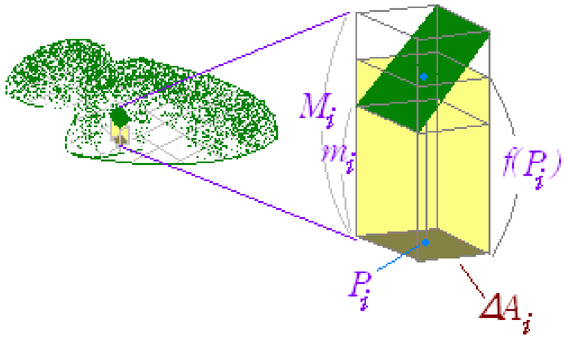
立体の体積を V，微小領域上の立体の体積を V_i とおくと

$$m_i\Delta A_i \leqq V_i \leqq M_i\Delta A_i$$

$$\Sigma m_i\Delta A_i \leqq \Sigma V_i \leqq \Sigma M_i\Delta A_i$$

ΔA_i の最大値 $|\Delta|$ が 0 に近づく極限において，左辺と右辺の極限値が一致するとき，その値を体積とする．

$f(x,y)$ が必ずしも正または 0 と限らない一般の場合については，符号付きで体積を表わすこととなるが，この式を重積分の定義とする．



※　角柱の底面積 ΔA_i を $\Delta x\Delta y$ と考えると，$\Delta A_i \to 0$ に対応して，$\Delta x\Delta y \to dxdy$ と書くことができる．

◇重積分の基本性質◇

重積分は次の性質をもっている．

【 線形性 】

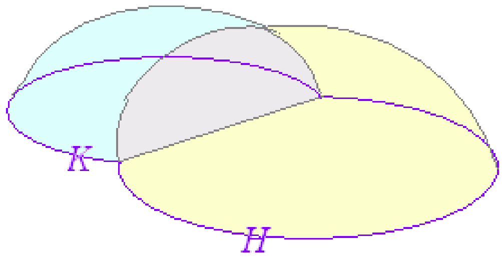
$$\iint_K \{f(x,y)+g(x,y)\}dxdy = \iint_K f(x,y)dxdy + \iint_K g(x,y)dxdy$$

$$\iint_K kf(x,y)dxdy = k\iint_K f(x,y)dxdy$$

【 加法性 】

２つの領域 K，H に重なる部分がないとき：
すなわち，$K\cap H=\emptyset$ のとき，

$$\iint_{K\cup H} f(x,y)dxdy = \iint_K f(x,y)dxdy + \iint_H f(x,y)dxdy$$



［加法性］　各々の体積を加えると，全体の体積になる．