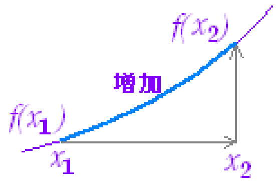
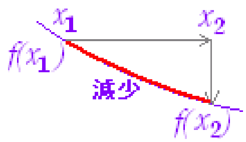
→ スマホ版は別頁

◇１変数関数の増減表◇

※　このページでは，関数 $f(x)$ や $f'(x)$ が連続なものを扱う．したがって，$f'(x)$ の符号が変化するときは，必ず $f'(x)=0$ となる点が存在する．





1．［増加，減少の定義］

○　ある区間 $a \leqq x \leqq b$ 内の任意の値 x_1, x_2 について，

$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$

が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ において（単調）増加であるという．

○　ある区間 $a \leqq x \leqq b$ 内の任意の値 x_1, x_2 について，

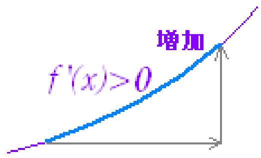
$x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$

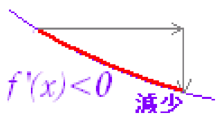
が成り立つとき，関数 $f(x)$ は区間 $a \leqq x \leqq b$ において（単調）減少であるという．

2．［導関数を用いた増減の判定］

（単調）増加及び（単調）減少は，異なる２つの値 x_1, x_2 に対する関数の値を比較して得られる性質であるので，原理的には１点の値 $f(x)$ や $f'(x)$ のみによっては判断できないものであるが，１つの区間 $a \leqq x \leqq b$ において $f'(x)$ が常に正であるならば，この区間で（単調）増加であることを示すことができる．（平均値の定理を用いて証明される．）

同様にして，１つの区間 $a \leqq x \leqq b$ において $f'(x)$ が常に負であるならば，この区間で（単調）減少であることを示すことができる．





○　ある区間 $a \leqq x \leqq b$ 内で

つねに $f'(x) > 0$ →　（単調）増加

○　ある区間 $a \leqq x \leqq b$ 内で

つねに $f'(x) < 0$ →　（単調）減少

3．［極値の定義］

○　関数 $f(x)$ について $x=a$ のまわりで，つねに

$f(a)>f(x)$, $(x \neq a)$

となるとき，$f(x)$ は $x=a$ で極大であるといい，$f(a)$ を極大値という．

極大となるところ $x=a$ では，関数 $f(x)$ が増加から減少に変化し，

$f'(a)=0$

となる．その前後では $f'(x)$ の符号は正から負に変化する．

極大の前後では，$f'(x)$ が正から負に変化してあり，極大のところでは $f'(x)=0$ となる．

x		a	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

図1

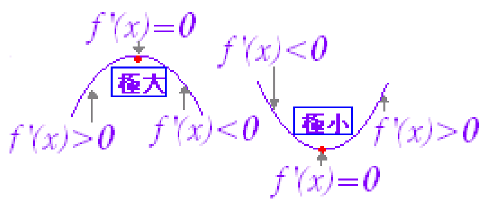


図2

○　関数 $f(x)$ について $x=a$ のまわりで，つねに

$f(a)<f(x)$, $(x \neq a)$

となるとき，$f(x)$ は $x=a$ で極小であるといい，$f(a)$ を極小値という．

極小となるところ $x=a$ では，関数 $f(x)$ が減少から増加に変化し，

$f'(a)=0$

となる．その前後では$f'(x)$の符号は負から正に変化する．

○　極大値と極小値をまとめて極値という．

○　極値 →$f'(x)=0$ でかつ$f'(x)$の符号が変化する[右図1]

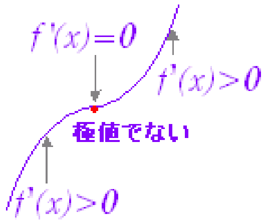
$f'(x)$ の符号が正から負へ変化：極大値

$f'(x)$ の符号が負から正へ変化：極小値

○$f'(x)=0$ でも$f'(x)$の符号が変化しないとき[右図2]

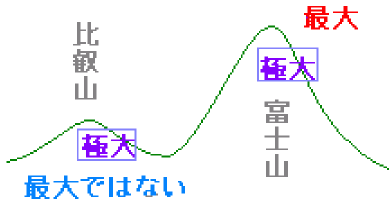
極値でない

※　この章では増減表を用いた極値の調べ方を解説したが，後の章で増減表を用いない極値の調べ方にも触れる．（2変数関数についても同様）



※　高校以来学んでいるように，極大・極小はその点のまわりだけの性質で，一定の区間で一番大きい，小さいを表わす最大・最小とは別のものである．

極大であっても，最大である場合も，最大でない場合もある．



◇2変数関数の増減表◇

1．［2変数関数の極値］

○　2変数関数$f(x, y)$について，点(a, b)のまわりで，つねに

$$f(a, b)>f(x, y)\ ,\ (x, y)\neq(a, b)$$

となるとき，$f(x, y)$は(a, b)で極大であるといい，$f(a, b)$を極大値という．

極大となるところでは，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となり，各々増加から減少に変化する．

○　2変数関数$f(x, y)$について，点(a, b)のまわりで，つねに

$$f(a, b)<f(x, y)\ ,\ (x, y)\neq(a, b)$$

となるとき，$f(x, y)$は(a, b)で極小であるといい，$f(a, b)$を極小値という．

極小となるところでは，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ となり，各々減少から増加に変化する．

○　1変数関数のときと同様に，極大値と極小値をまとめて極値という．

※　峠を越える道路は通常，右図5の青で示した経路となる．青で示した方向で x 座標だけが変化するとすると，この道路は各yの最小値を取りながら山を越えるようになっている．特に鞍点（峠）では，y方向に見れば極小，x方向に見れば極大となるが，２変数関数としては極値でない．（これよりも大きいところも小さいところもある．）

右図6に示した点（一人掛けソファーの中心部）も $\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,$ $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ であるが極値ではない．

図3

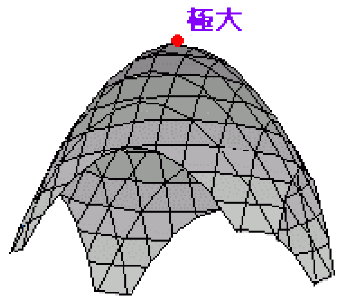


図4

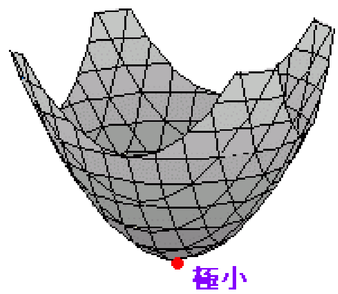


図5

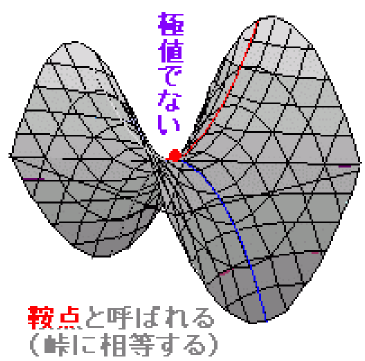
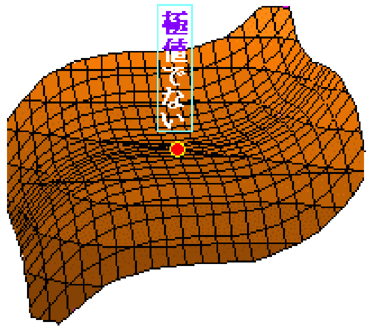


図6

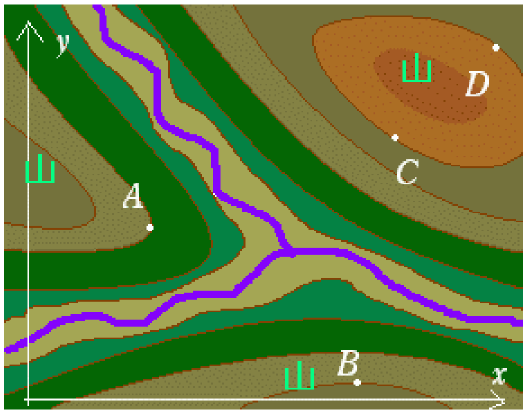


問題

右の等高線で，点 B C, D について f_x，f_y の符号を埋めよ．（初めに？を選び，続いて符号を選べ．）

	例：A	B	C	D
f_x	−	?	?	?
f_y	0	?	?	?

[選択肢]＋，−，0



2．［2変数関数の増減表］

2変数関数で極値となるところでは，$\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ が成り立つが，この連立方程式の解となる (x, y) が実際に極値となるかどうか［上記の図5，図6でなく図3，図4となるかどうか］は，右図のように2変数関数の増減表を作って調べる．

（手順）

(1) $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ の曲線を描く

(2) $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ の曲線を描く

以上の(1)(2)はていねいに描く必要はない．実際には，これら2曲線の交点 (a, b)（連立方程式の解）とその付近での(1)(2)の向きが分かればよい．

(3) $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ の曲線上で $\frac{\partial f}{\partial y}$ の符号に応じて z が増える向きに矢印を描く（↑または↓）

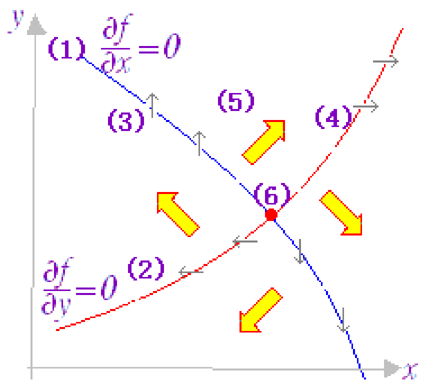
(4) $\frac{\partial f}{\partial y}=0$ の曲線上でも同様に右向き又は左向きの矢印を描く．（→または←）

(5)4個の領域について，左で上なら左上向き45°の太めの矢印を描く．右下なら右下向き45°とする．以下同様．（これらは各点での傾き($\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$) を正確に反映している必要はなく，最終的に点 (a, b) に向かっているか，離れているかが分かればよいので，おおまかに45°で描けばよい．）

(6)4個の領域について矢印が描けたら，これらの矢印が全部点 (a, b) に向かっていれば，(a, b) は極大値，全部点 (a, b) から離れていけば，(a, b) は極小値とする．それ以外の場合は極値でない．

※　次の関係に注意：

増減表



例1

$z=f(x, y)=x^2-2xy+3y^2-4x+8y$ の極値を求めよ．

（答案）

連立方程式

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-2y-4=0$ ･･･(1)

$\frac{\partial f}{\partial y}=-2x+6y+8=0$ ･･･(2)

を解くと，$x=1$, $y=-1$

---

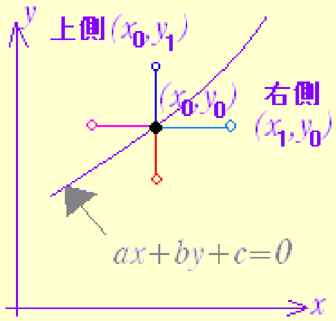
(1)よりも右にあれば（x が大きければ），$\frac{\partial f}{\partial x}>0$ となるから，(1)よりも右にある部分に（→）を入れる．

※この場合は，(1)よりも下にあれば（y が小さければ）$\frac{\partial f}{\partial x}>0$ となるといっても同じ．

逆に，(1)よりも左にあれば $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ となるから，(1)よりも左にある部分に（←）を入れる．（　(2)の上だけでよい．　）

※この場合は，(1)よりも上にあれば（y が大きければ）$\frac{\partial f}{\partial x}<0$ となるといっても同じ．

※※　(1)では $\frac{\partial f}{\partial x}=0$ が成り立つ．(1)以外では $\frac{\partial f}{\partial x}$ は正か負かいずれかとなる．つまり，x が増えれば，z は増えるか減るかいずれかとなる．この符号は計算しやすい点の座標を代



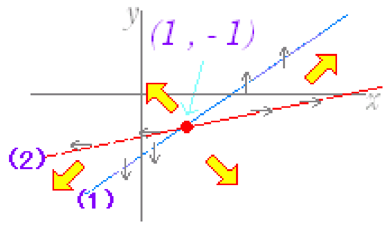
左の図で $a>0$ のとき，
$x_0<x_1$ ならば，
$ax_0+by_0+c=0<ax_1+by_0+c$

同様に $b>0$ のとき，
$y_0<y_1$ ならば，
$ax_0+by_0+c=0<ax_0+by_1+c$

入して求めてもよい．例えば $(0\ ,\ 0)$ では $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ だから $(0\ ,\ 0)$ を含む領域では←になる．

---

(2)よりも上にあれば $\frac{\partial f}{\partial y}>0$ となるから，(2)よりも上にある部分に（↑）を入れる．逆に，(2)よりも下にあれば $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ となるから，(2)よりも下にある部分に（↓）を入れる．
（　(1)の上だけでよい．　）
※で示した考え方は，上と同様．



以上により点 $(1,-1)$ は極小値 $z=f(1,-1)=6$ をとる．

例2

$z=f(x,\ y)=x^2+xy-y^2-2x-y$ の極値を調べよ．

（答案）

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+y-2=0$ ･･･(1)

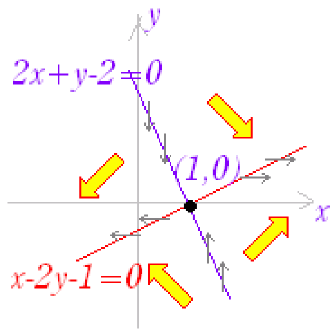
$\frac{\partial f}{\partial y}=x-2y-1=0$ ･･･(2)

を解くと，$x=1\ ,\ y=0$

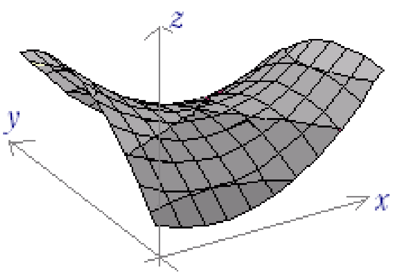
(1)よりも上では（y が大きければ） $\frac{\partial f}{\partial x}>0$ で右矢印
(1)よりも下では（y が小さければ） $\frac{\partial f}{\partial x}<0$ で左矢印
(2)よりも右では（x が大きければ） $\frac{\partial f}{\partial y}>0$ で上矢印
(2)よりも左では（x が小さければ） $\frac{\partial f}{\partial y}<0$ で下矢印

※　計算しやすい点の座標を代入する方法で行うと，
$(0\ ,\ 0)$ では $2x+y-2<0,\ x-2y-1<0$ となるから，
　(1)は負，(2)も負：左下向き
次に(1)を横切ると左右の向きが変り，(2)を横切ると上下の向きが変ることに注意すると，全部の↗が描ける．

増減表を作ると右図のようになるから，極値はない．



参考：鳥瞰図



例3

$z=f(x,\ y)=2x^3-6xy+3y^2$ の極値を調べよ．

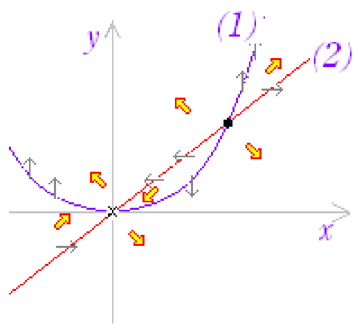
（答案）

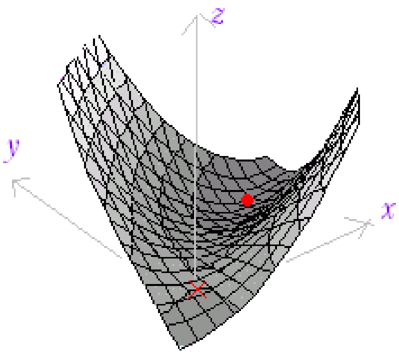
$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2-6y=6(x^2-y)=0$ ･･･(1)

$\frac{\partial f}{\partial y}=-6x+6y=-6(x-y)=0$ ･･･(2)

を解くと，$(0\ ,\ 0)\ ,\ (1\ ,\ 1)$
$(1\ ,\ 0)$ において，→↓
以下境界線を横切るたびに→↓の向きを入れ換えると右図の増減表ができる．

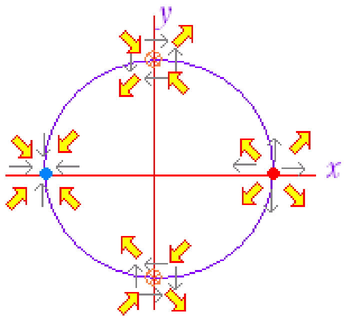
$(1\ ,\ 1)$ において極小値 -1 をとる．
$(0\ ,\ 0)$ では極値とはならない．





例4

$z=f(x,\,y)=x^3+3xy^2-3x$ の極値を調べよ.

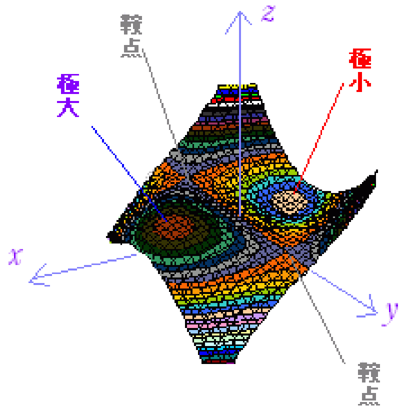


（答案）

$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-3=3(x^2+y^2-1)=0$ ・・・(1)

$\frac{\partial f}{\partial y}=6xy=0$ ・・・(2)

を解くと，$(1\,,\,0)\,,\,(0\,,\,1)\,,\,(-1\,,\,0)\,,\,(0\,,-1)$
$(1\,,\,1)$ において，→↑
以下境界線を横切るたびに→↓の向きを入れ換えると右図の増減表ができる.

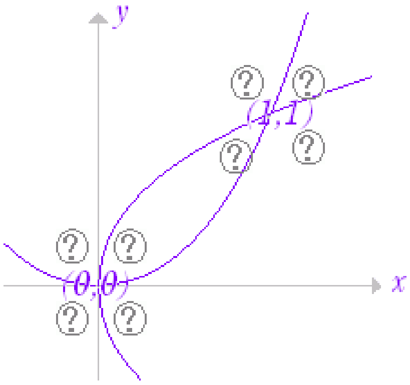


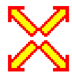
$(1\,,\,0)$ において極小値 -2 をとる.
$(-1\,,\,0)$ において極大値 2 をとる.
$(0\,,\,1)\,,\,(0\,,-1)$ では極値とはならない.

問題

1． 次の関数の増減表を作れ．（右図で，初めに?を選び続いてを選べ．正しければ確定し，間違っていれば元に戻る．）

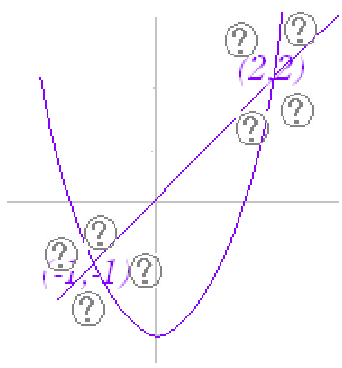
(1) $z=f(x,\,y)=x^3-3xy+y^3$

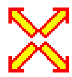




Help→途中計算鳥瞰図

(2) $z=f(x,\,y)=2x^3-6xy-12x+3y^2$





Help→途中計算鳥瞰図

2. 次の関数の極値を求めよ.

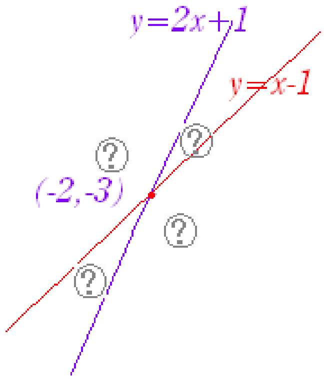
増減表は右図で，初めに?を選び続いて↘↗↗↘を選べ.

極値は，該当するものを選べ.

$z=f(x,\ y)=2x^2-2xy+y^2+2x+2y$

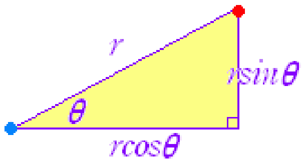
- ○ $(-2,-3)$ で極大値 -5 をとる
- ○ $(-2,-3)$ で極小値 -5 をとる
- ○ 極値なし

Help→途中計算鳥瞰図



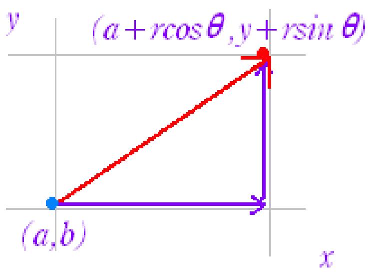
3. ［方向微分］

右図のように x 軸の正の向きとなす角がθである斜辺に沿って長さ r だけ進むと，x 座標が $r\cos\theta$，y 座標が $r\sin\theta$ だけ大きくなるから，点 $(a,\ b)$ から x 軸の正の向きとなす角がθである斜辺に沿って長さ r だけ進んだ点の座標は $(x+r\cos\theta,\ y+r\sin\theta)$ となる.



この方向に沿った平均変化率は

$$\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$



となるが，これを x 軸方向の増加と y 軸方向の増加の２段に分けて求めると，

$$\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)+f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

$$=\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)}{r}+\frac{f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

微分係数は，

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)}{r}$$

$$+\lim_{r\to 0}\frac{f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}$$

ここで第1項は，

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(a+r\cos\theta,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)}{r\cos\theta}\cdot\cos\theta$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b+r\sin\theta)-f(a,b+r\sin\theta)}{h}\cos\theta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta$$

第2項は，

$$\lim_{r\to 0}\frac{f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r}=\lim_{r\to 0}\frac{f(a,b+r\sin\theta)-f(a,\ b)}{r\sin\theta}\sin\theta$$

各々の点 $(a,\ b)$ に対して

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}\right|$$

が最大となる角度θが定まり，この角度θに沿って下降（または上昇）すれば，最短距離で下降（または上昇）することができる.

.

曲面にボールをそっと置くと，ボールは勾配ベクトルに沿って（逆向きに）転がっていくので，このボールを追跡すると２変数関数の極小値を求めることができる.

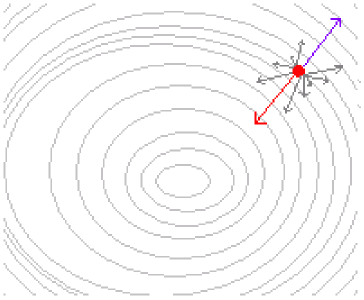
$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,\ b)}{h}\sin\theta=\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

となるから，次の式を得る．

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

この式を，ベクトル$\vec{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$ 方向の微分係数といい，$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}$ で表わす．すなわち，

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$

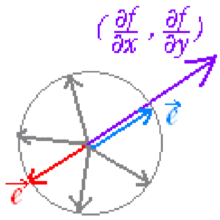


4．［勾配ベクトル］

○　方向微分係数は，各点$(a,\ b)$ごとに定まるベクトル$(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$ と単位ベクトル$\vec{e}=(\cos\theta,\sin\theta)$ の内積となっているから，$\vec{e}$ が $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$ と同じ向きのとき最大となる．

$$grad\ f(a,\ b)=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$$

で定められるベクトルを勾配ベクトルという．勾配ベクトルは各点$(a,\ b)$ において関数$f(x,\ y)$ が最も効果的に増加する向きを表わしている．（勾配ベクトルの逆向きが最も効果的に減少する向きとなる．）

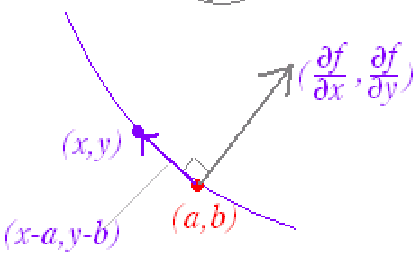


○　第２章で述べた等高線に沿った接線の方程式

$$f_x(a,\ b)(x-a)+f_y(a,\ b)(y-b)=0$$

は，右図のように接線上の点$P(x,\ y)$，接点$A(a,\ b)$ に対してベクトル $\vec{AP}=(x-a,\ y-b)$ と勾配ベクトル $(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y})$ が垂直であることを示している．

すなわち，「勾配ベクトルは等高線に垂直である．」



○　勾配ベクトルに沿った移動の実演

(1) 次の実演1は，上の問題2.の$z=f(x,\ y)=2x^2-2xy+y^2+2x+2y$ について，初期値$(0,\ 0)$ から$r=0.1$ ずつ，勾配ベクトルの逆向きに進んだときのシミュレーションで，「試行回数が50回になるか又は勾配ベクトルの大きさが 0.01 以下」になれば止まるプログラムである．上記の結果と比較してみよ．

実演1

(2) 実演2は，上と同じ2変数関数について，初期値を$(-3,\ 0)$にしたものである．

実演2