→ スマホ版は別頁

◇微分の計算◇

次の共通の性質と右の基本公式を用いて，様々な関数の導関数（微分）を求めることができる．

線形性

$$\{af(x)+bg(x)\}'=af'(x)+bg'(x)$$

積の微分法

$$(fg)'=f'g+fg'$$

商の微分法

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$$

合成関数の微分法

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

次の公式はよく使われる基本公式である．

- $f(x)=\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}\rightarrow f'(x)=\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$
- $f(x)=\sin x\rightarrow f'(x)=\cos x$
- $f(x)=\cos x\rightarrow f'(x)=-\sin x$
- $f(x)=\tan x\rightarrow f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$
- $f(x)=\arcsin x\rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x)=\arccos x\rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $f(x)=\arctan x\rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$
- $f(x)=e^x\rightarrow f'(x)=e^x$
- $f(x)=a^x\ (a>0,a\neq 1)\rightarrow f'(x)=a^x\log a$
- $f(x)=\log x\rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$
- $f(x)=\log_a x\ (a>0,a\neq 1)\rightarrow f'(x)=\frac{1}{x\log a}$

例

次の関数の導関数を求めよ．

(1)　$f(x)=\sin 4x+\cos 5x$　→　$f'(x)=4\cos 4x-5\sin 5x$

(2)　$f(x)=\log(x^2+1)$　→　$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$

(3)　$y=e^{\cos x}$　→　$y'=-\sin x\, e^{\cos x}$

例

次の関数について，[　　]内に指定されたものを求めよ．

$z=\sin(x-y)$　[　$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，全微分 dz　]

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\cos(x-y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\cos(x-y)$$

$$dz=\cos(x-y)dx-\cos(x-y)dy$$

（※半角数字=1バイト文字で答えよ）

問題1

次の関数の導関数を求めよ．

(1)

$y=\sqrt{5x^2+3}\rightarrow y'=\frac{[\ \ ]x}{\sqrt{[\ \ ]x^2+[\ \ ]}}$

Check　Reset　Help

$$y=\sqrt{5x^2+3}$$

$$y=t^{\frac{1}{2}}$$
$$t=5x^2+3$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\cdot(10x)$$
$$=\frac{5x}{\sqrt{5x^2+3}}$$

(2)　$y=\sin 2x\cos 3x$

→　$y'=[\ \ ]\cos 2x\cos 3x-[\ \ ]\sin 2x\sin 3x$

Check　Reset　Help

$y'=(\sin 2x)'\cos 3x+\sin 2x(\cos 3x)'$
$=2\cos 2x\cos 3x+\sin 2x(-3\sin 3x)$

(3)

$y=\frac{e^{3x}}{\log 2x} \to y'=\frac{e^{3x}(\square x\log 2x-\square)}{x(\log 2x)^2}$

Check Reset Help

$y'=\frac{3e^{3x}\log 2x-e^{3x}\times\frac{1}{x}}{(\log 2x)^2}=\frac{e^{3x}(3x\log 2x-1)}{x(\log 2x)^2}$

問題2

次の関数について，[　]内に指定されたものを求めよ．

(1) $z=(x^2+y^2)(x^4+y)$　[$\frac{\partial z}{\partial x}$]

$\to \frac{\partial z}{\partial x}=\square x(\square x^4+\square x^2y^2+y)$

Check Reset Help

$\frac{\partial z}{\partial x}=(x^2+y^2)_x(x^4+y)+(x^2+y^2)(x^4+y)_x$

$=2x(x^4+y)+(x^2+y^2)4x^3=2x^5+2xy+4x^5+4x^3y^2$

$=6x^5+4x^3y^2+2xy$

$=2x(3x^4+2x^2y^2+y)$

(2) $z=e^x(x+y^2)$　[$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$]

$\to \frac{\partial z}{\partial x}=e^x(\square+x+y^2) \to \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\square ye^x$

Check Reset Help

$\frac{\partial z}{\partial x}=(e^x)_x(x+y^2)+e^x(x+y^2)_x=e^x(x+y^2)+e^x$

$=e^x(1+x+y^2)$

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=e^x(2y)$

(3) $f(x,y)=\log(2x+3y)$　[$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)$]

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\square}{2x+3y}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\square}{(2x+3y)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)=\frac{\square}{\square}$

Check Reset Help

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2}{2x+3y}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{-4}{(2x+3y)^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(1,1)=\frac{-4}{25}$

(4) $z=f(x,y)=x^2+2xy+3y^2$

[$x=2$, $y=-1$ のときの接平面の方程式]

$\to z=\square x-\square y-\square$

Check Reset Help

$f(2,-1)=3$

$\frac{\partial f}{\partial x}=2x+2y \to \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=2$

$\frac{\partial f}{\partial y}=2x+6y \to \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1)=-2$

$z=2(x-2)-2(y+1)+3=2x-2y-3$

(5) $z=\sin(2x-3y)$

[$y=\pi$ の断面上の $(0,\pi)$ における接線の方程式]

$\to z=\square x$　（ただし，$y=\pi$）

Check Reset Help

$z(0,\pi)=0$

$\frac{\partial z}{\partial x}=2\cos(2x-3y)=-2$

$\to z=-2(x-0)+0$

(6) $z=e^{2x+3y}$　[全微分]

$\to dz=e^{2x+3y}(\square dx+\square dy)$

$\frac{\partial z}{\partial x}=2e^{2x+3y}$

$\frac{\partial z}{\partial y}=3e^{2x+3y}$

Check Reset Help

$$dz=2e^{2x+3y}\,dx+3e^{2x+3y}\,dy$$