

◇ 2次関数による近似 (1変数関数) ◇

◇要点◇ ※ 近似式に関する記述は→第2章←

○ $x \doteq a$ における関数 $f(x)$ の振舞い

0次近似: $f(x) \doteq f(a)$

1次近似: $f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a)$

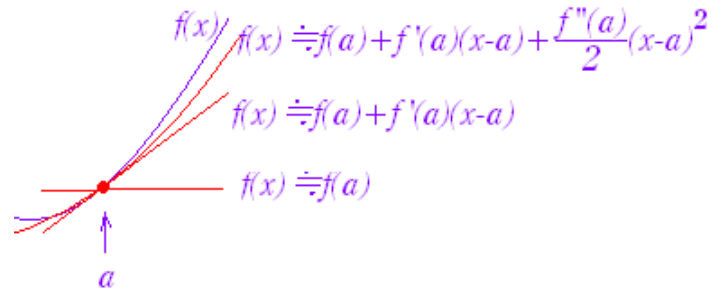
2次近似: $f(x) \doteq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

○ 特に, $x \doteq 0$ のとき

0次近似: $f(x) \doteq f(0)$

1次近似: $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x$

2次近似: $f(x) \doteq f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$



※ 近似式の身近な例

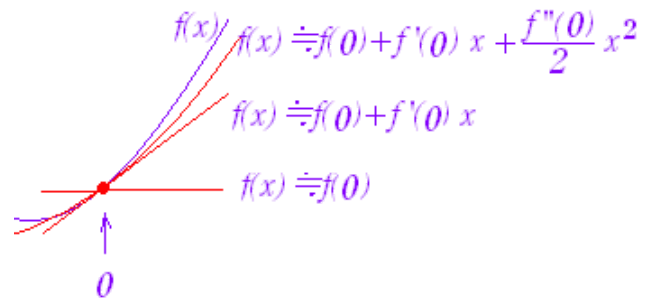
$f(a)=1, f'(a)=2, f''(a)=6, x-a=0.1$ のとき,

$$f(x) \doteq 1 + 2 \cdot 0.1 + \frac{6}{2} \cdot 0.1^2 = 1.23$$

$f(a)$ は整数部分に対応

$f'(a)(x-a)$ は小数第1位に対応

$\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$ は小数第2位に対応している。



※ 近似式の身近な例

$f(0)=1, f'(0)=2, f''(0)=6, x=0.01$ のとき,

$$f(x) \doteq 1 + 2 \cdot 0.01 + \frac{6}{2} \cdot 0.01^2 = 1.0203$$

$f(0)$ は整数部分に対応

$f'(0)x$ は小数第2位に対応

$\frac{f''(0)}{2}x^2$ は小数第4位に対応している。

◇ 極値の判定 ◇

以下においては, 関数 $f(x)$ として滑らかな関数, すなわち, $f'(x)$ が連続な関数のみを取り扱う。

第4章では, $x=a$ の前後における $f'(x)$ の符号の変化によって極値の判定を行った:

- 極値 → $f'(x)=0$ ですか? $f'(x)$ の符号が変化する
 $f'(x)$ の符号が正から負へ変化: 極大値
 $f'(x)$ の符号が負から正へ変化: 極小値
- $f'(x)=0$ でも $f'(x)$ の符号が変化しないとき
 極値でない

極大値

x		a	
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

極小値

x		a	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

極値でない

x		a	
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗	$f(a)$	↗

次のように $x=a$ における $f''(x)$ の値 $f''(a)$ で調べることも

できる:

$f'(a)=0$ のとき,

○ $f''(a)>0 \rightarrow x=a$ で極小値をとる.

○ $f''(a)<0 \rightarrow x=a$ で極大値をとる.

○ $f''(a)=0 \rightarrow x=a$ で極値かどうかこれだけでは分からない.

※ 2次導関数が負→極大, 正→極小であることを注意

(証明)

2次近似: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

の式において, $f'(a)=0$ のとき,

$$f(x) - f(a) \approx \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

となるから,

(1) $f'(a)=0, f''(a)<0$ のとき, $x \neq a$ のとき $f(x) < f(a)$ となる.

(2) $f'(a)=0, f''(a)>0$ のとき, $x \neq a$ のとき $f(x) > f(a)$ となる.

(3) $f'(a)=0, f''(a)=0$ のとき, これだけでは分からない.

極大値

x		a	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		-	
$f(x)$	↗	$f(a)$	↘

極小値

x		a	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		+	
$f(x)$	↘	$f(a)$	↗

これだけでは分からない

x		a	
$f'(x)$		0	
$f''(x)$		0	
$f(x)$?	$f(a)$?

※これだけ(第2次導関数まで)では分からないとは、「分からない」ということではなく、さらに高次の導関数を用いれば判断できる.

右の表において, ア) では, $f'(a)=0, f''(a)=0$ となっており第2次導関数までだけでは極値かどうか判断できない.

まず, 符号の変わり目ではわずかな値の変化でも符号が変るが, $x=a$ において符号が正のとき, その近くにおいては, 符号が急に変わるわけではないことに注意する.



○ 右の表において, $f''(x)$ という関数の導関数は $f^{(3)}(x)$ で, 増加して ($f^{(3)}(x)>0$) 0になる ($f''(x)=0$) のだから, それまでは $f''(x)$ は負であったといえる. また, 0から増加するのだから, その後は正であるといえる.

以上により, $f''(x)$ の符号が定まる.

○ 同様にして, $f'(x)$ という関数の導関数は $f''(x)$ で, 減少して ($f''(x)<0$) 0になる ($f'(x)=0$) のだから, それまでは正 ($f'(x)>0$). また, 0から増加するのだから, その後は正であるといえる.

以上により, $f'(x)$ の符号が定まる.

○ 以上により, $f(x)$ は増加→(休み)→増加となるから, $x=0$ のとき $f(x)$ は極値ではないことが分かる.

※ 右の表ウ) では, 第3次導関数まで符号が0で第4次導関数で符号が正になる点 $x=0$ において, 極小値となる例を示している. 考え方は同様である.

ア) $f(x)=x^3$

x		0	
$f'(x)=3x^2$		0	
$f''(x)=6x$		0	
$f(x)$?	0	?

イ) $f(x)=x^3$

x		0	
$f(x)$	↗	0	↗
$f'(x)=3x^2$	+	0	+
$f''(x)=6x$	-	0	+
$f^{(3)}(x)=6$	+	+	+

ウ) $f(x)=x^4$

x		0	
$f(x)$	↘	0	↗
$f'(x)=4x^3$	-	0	+
$f''(x)=12x^2$	+	0	+
$f^{(3)}(x)=24x$	-	0	+
$f^{(4)}(x)=24$	+	+	+

例

関数 $f(x)=e^x \sin x$ が $x=-\frac{\pi}{4}$ において極値をとるかどうかが調べよ.

(答案)

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

問題

$f(x)=2\sin x + \cos 2x$ ($0 < x < \pi$) の極値を調べた. 正しいものを選び.

(答案)

$$f'(x) = 2\cos x - 2\sin 2x$$

$$f''(x) = -2\sin x - 4\cos 2x$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos x - 2\sin 2x = 2\cos x - 4\sin x \cos x$$

$$f''(x) = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$$

$$f'(-\frac{\pi}{4}) = 0$$

$$f''(-\frac{\pi}{4}) > 0 \text{ により, } x = -\frac{\pi}{4} \text{ において極小値をとる.}$$

$$= 2\cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{3\pi}{2}$$

ア) $x = \frac{\pi}{6}$ のとき, $f'(\frac{\pi}{6}) = 0, f''(\frac{\pi}{6}) < 0$ だから,

● 極大 ● 極小 ● 極値でない

イ) $x = \frac{\pi}{2}$ のとき, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0, f''(\frac{\pi}{2}) > 0$ だから,

● 極大 ● 極小 ● 極値でない

ウ) $x = \frac{5\pi}{6}$ のとき, $f'(\frac{5\pi}{6}) = 0, f''(\frac{5\pi}{6}) < 0$ だから,

● 極大 ● 極小 ● 極値でない

Check

◇ 2変数関数の近似 ◇

◇ 要点 ◇

○ $(x, y) \doteq (a, b)$ における関数 $f(x, y)$ の振舞い

0次近似:

$$f(x, y) \doteq f(a, b) \cdots (1)$$

1次近似:

$$f(x, y) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) \cdots (2)$$

2次近似:

$$f(x, y) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \frac{1}{2}\{f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2\} \cdots (3)$$

○ 特に, $(x, y) \doteq (0, 0)$ のとき

0次近似:

$$f(x, y) \doteq f(0, 0)$$

1次近似:

$$f(x, y) \doteq f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y$$

2次近似:

$$f(x, y) \doteq f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y + \frac{1}{2}\{f_{xx}(0, 0)x^2 + 2f_{xy}(0, 0)xy + f_{yy}(0, 0)y^2\}$$

1次近似までについては, 第2章で述べた.

2次近似の式を

$$f(x, y) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 \cdots (4)$$

とおくと, A, B, C は次のようにして求められる:

(4)の両辺を x で偏微分すると,

$$f_x(x, y) \doteq f_x(a, b) + 2A(x-a) + B(y-b) \cdots (5)$$

関数 $f_x(x, y)$ に(2)を適用すると

$$f_x(x, y) \doteq f_x(a, b) + f_{xx}(a, b)(x-a) + f_{xy}(a, b)(y-b) \cdots (6)$$

(5)(6)を比較すると, $2A = f_{xx}(a, b), B = f_{xy}(a, b)$

同様にして, (4)の両辺を y で偏微分すると,

$$f_y(x, y) \doteq f_y(a, b) + B(x-a) + 2C(y-b) \cdots (5)$$

関数 $f_y(x, y)$ に(2)を適用すると

$$f_y(x, y) \doteq f_y(a, b) + f_{xy}(a, b)(x-a) + f_{yy}(a, b)(y-b) \cdots (6)$$

(5)(6)を比較すると, $B = f_{xy}(a, b), 2C = f_{yy}(a, b)$

以上から(3)が得られる.

◇ 2変数関数の極値 ◇

2変数関数の極値を, 増減表を作成して調べる方法については第4章で学んだ. ここでは, 第2次偏導関数の符号によって2変数関数の極値を調べる方法を学ぶ.

すなわち, 2変数関数 $f(x, y)$ が点 (a, b) において極値をとるためには, 第1次偏導関数が $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たすことが必要条件であるが, この条件を満たしても極値でない場合が含まれる. そこで, 第1次偏導関数が $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ を満たす点が, さらにどのような条件を満たせば極値となるかを調べる.

上記(3)により,

$$f(x, y) \doteq f(a, b) + f_x(a, b)(x-a) + f_y(a, b)(y-b) + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2 \}$$

であるが, $f_x(a, b) + f_y(a, b) = 0$ の場合を調べているから,

$$f(x, y) \doteq f(a, b) + \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2 \}$$

そこで, $f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2 \}$ が, つねに正ならば $f(a, b)$ は極小値, つねに負ならば $f(a, b)$ は極大値といえる.

$$f(x, y) - f(a, b) = A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2$$

符号を調べると, 次のことが分かる.

ここで, $A = \frac{1}{2}f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = \frac{1}{2}f_{yy}(a, b)$ である.

◇要点◇

(I) $B^2 - 4AC < 0$ のとき極値となる.

ア) $A > 0, B^2 - 4AC < 0$ のとき, 極小

イ) $A < 0, B^2 - 4AC < 0$ のとき, 極大

(II) $B^2 - 4AC > 0$ のとき極値でなく, 鞍点となる.

(III) $B^2 - 4AC = 0$ のとき, これだけでは分からない.

※ 右の結果を $B^2 - 4AC$ の符号によって分類したものがこの要点である.

上の結果を用いると, 2変数関数の極値は次のようにまとめることができる.

※ $H(x, y)$ はヘッセ行列と呼ばれる.

◇要点◇

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

とおき,

行列 $H(x, y)$ の固有値を, p, q とすると,

(I) p, q が同符号ならば, $f(x, y)$ は (a, b) で極値をとる.

$p > 0, q > 0$ のとき, 極小値

$p < 0, q < 0$ のとき, 極大値

(II) p, q が異符号ならば, $f(x, y)$ は (a, b) で極値とならず鞍点となる.

(III) $pq = 0$ のとき, $f(x, y)$ は (a, b) で極値かどうかこれだけでは分からない.

(解説)

$$f(x, y) - f(a, b) = \frac{1}{2} \{ f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a, b)(y-b)^2 \}$$

$$= A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2$$

とおくと

$$f_{xx}(a, b) = 2A, f_{xy}(a, b) = B, f_{yy}(a, b) = 2C$$

だから

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) - z & f_{xy}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) - z \end{vmatrix} = 0$$

は,

$$\begin{vmatrix} 2A - z & B \\ B & 2C - z \end{vmatrix} = 0$$

と書ける. すなわち, 固有方程式は,

(解説) 次のように変形する.

i) $A \neq 0$ のとき,

$$F = A(x-a)^2 + B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 \text{ とおくと}$$

$$F = A \left\{ (x-a)^2 + \frac{B}{A}(x-a)(y-b) \right\} + C(y-b)^2$$

$$= A \left\{ (x-a) + \frac{B}{2A}(y-b) \right\}^2 - \frac{B^2}{4A}(y-b)^2 + C(y-b)^2$$

$$= A \left\{ (x-a) + \frac{B}{2A}(y-b) \right\}^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A}(y-b)^2$$

だから, 点 (a, b) の近くで

$A > 0, B^2 - 4AC < 0$ ならば $F \geq 0$ (等号は $(x, y) = (a, b)$ のとき)

$A < 0, B^2 - 4AC < 0$ ならば $F \leq 0$ (等号は $(x, y) = (a, b)$ のとき)

($0 \leq B^2 < 4AC$ のときは, A は 0 とはならない.)

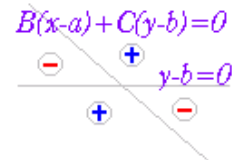
$B^2 - 4AC > 0$ ならば A と $-\frac{B^2 - 4AC}{4A}$ は符号が逆になり, F は正の値も負の値もとる: 極値でなく, 鞍点となる.

$B^2 - 4AC = 0$ ならば $F = A \left\{ (x-a) + \frac{B}{2A}(y-b) \right\}^2$ となり, A の符号によって変り, これだけでは分からない.

ii) $A = 0$ のとき

$$F = B(x-a)(y-b) + C(y-b)^2 = (y-b) \{ B(x-a) + C(y-b) \}$$

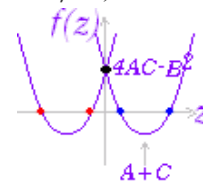
a) $B \neq 0$ のとき $y-b$ の正負に応じて, F は正負の値をとる.



b) $B = 0$ のとき, $F = C(y-b)^2$ となり, C の符号によって変り, これだけでは分からない.

$4AC - B^2 > 0$ のとき ($B^2 - 4AC < 0$ のとき)

$0 \leq B^2 < 4AC$ は正だから, A, C は同符号



\iff 2つの正の固有値 p, q をもつとき, 上記(I)ア)より

極小となる.

\iff 2つの負の固有値 p, q をもつとき, 上記(I)イ)より,

極大となる.

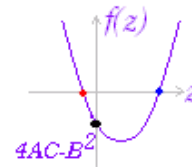
$$f(z) = z^2 - 2(A+C)z + 4AC - B^2 = 0$$

$$f(z) = \{z - (A+C)\}^2 - (A+C)^2 + 4AC - B^2 = 0$$

$$f(z) = \{z - (A+C)\}^2 - \{(A-C)^2 + B^2\} = 0$$

となり、右のように2次関数のグラフとz軸との交点を見ると、極値かどうか調べることができる。

$4AC - B^2 < 0$ のとき ($B^2 - 4AC > 0$ のとき)



\Leftrightarrow 固有値が異符号となる時、上記(II)より鞍点となる。

例1

$f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$ の極値を調べよ。

(答案)

$f_x = 3x^2 - 3y, f_{xx} = 6x, f_{xy} = -3, f_y = -3x + 3y^2, f_{yy} = 6y$
だから、

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

連立方程式 $f_x = 3x^2 - 3y = 0, f_y = -3x + 3y^2 = 0$ の解は $(0, 0), (1, 1)$ の2個

(1)

$(0, 0)$ のとき、 $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

の固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} -z & -3 \\ -3 & -z \end{vmatrix} = 0$$

固有方程式の解は、 $z^2 - 9 = 0$ より、 $z = \pm 3$

異符号だから、 $(0, 0)$ では極値を持たず鞍点となる。

(2)

$(1, 1)$ のとき、 $H(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$

の固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} 6-z & -3 \\ -3 & 6-z \end{vmatrix} = 0$$

固有方程式の解は、 $z^2 - 12z + 27 = 0$ より、 $z = 3, 9$

正の2つの解をもつから、 $(1, 1)$ で極小となり、

極小値は $f(1, 1) = -1$

例2

$f(x, y) = \sin x \sin y$ ($-\frac{\pi}{2} < x, y < \frac{\pi}{2}$) の極値を調べよ。

(答案)

$f_x = \cos x \sin y, f_{xx} = -\sin x \sin y,$
 $f_{yx} = \cos x \cos y, f_y = -\sin x \cos y, f_{yy} = -\sin x \sin y$
だから、

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \sin y & \cos x \cos y \\ \cos x \cos y & -\sin x \sin y \end{pmatrix}$$

連立方程式 $f_x = \cos x \sin y = 0, f_y = \sin x \cos y = 0$ の解は $(0, 0)$

このとき、 $H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

の固有方程式は、

$$\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 1 & -z \end{vmatrix} = 0$$

固有方程式の解は、 $z^2 - 1 = 0$ より、 $z = \pm 1$

異符号だから、 $(0, 0)$ では極値を持たず鞍点となる。
極値はない。

問題 (半角数字 = 1バイト文字で答えよ)

(1) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy + 1$ の極値を調べよ。

(答案)

偏導関数は $f_x = 3x^2 - \square, f_y = 3y^2 - \square,$

$f_{xx} = \square, f_{xy} = \square, f_{yy} = \square$

となり、連立方程式 $f_x = 0, f_y = 0$ の解は $(0, 0), (2, 2)$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

ア) $(0, 0)$ において固有方程式

$$\begin{vmatrix} -z & -6 \\ -6 & -z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 36 = 0 \text{ の解は、 } z = \pm 6$$

だから $(0, 0)$ において

- 極大値をとる ● 極小値をとる ● 鞍点となる
- 第2次偏導関数まででは極値を判別できない

イ) $(2, 2)$ において固有方程式

(2) $f(x, y) = (x^2 - 2x)(y^2 - 2y)$ の極値を調べよ。

(答案)

偏導関数は $f_x = (\square)(y^2 - 2y), f_y = (x^2 - 2x)(\square),$

$f_{xx} = \square(y^2 - 2y), f_{xy} = (2x - 2)(2y - 2),$

$f_{yy} = \square(x^2 - 2x)$ となり、

連立方程式 $f_x = 0, f_y = 0$ の解は $(0, 0), (1, 1), (2, 2)$

ア) $(0, 0)$ において

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

固有方程式は、 $\begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 16 = 0$ の解は、 $z = \pm 4$

だから $(0, 0)$ において

- 極大値をとる ● 極小値をとる ● 鞍点となる
- 第2次偏導関数まででは極値を判別できない

イ) $(1, 1)$ において

$$H(1, 1) =$$

$$\begin{vmatrix} 12-z & -6 \\ -6 & 12-z \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z^2 - 24z + 108 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

の解は, $z=6, 18$

だから (2, 2) において

- 極大値をとる
- 極小値をとる
- 鞍点となる
- 第2次偏導関数まででは極値を判別できない

Check Reset



秋の奈良

固有方程式は, $\begin{vmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow (-2-z)^2 = 0$ の解は, $z=2, 2$

だから (1, 1) において

- 極大値をとる
- 極小値をとる
- 鞍点となる
- 第2次偏導関数まででは極値を判別できない

ウ) (2, 2) において

$$H(2, 2) = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$$

固有方程式は, $\begin{vmatrix} \square - z & \square \\ \square & \square - z \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow z^2 - 4 = 0$ の解は, $z = \pm 2$

だから (2, 2) において

- 極大値をとる
- 極小値をとる
- 鞍点となる
- 第2次偏導関数まででは極値を判別できない

Check Reset