ミクロ経済学の基礎
（上下統合版）

同志社大学 経済学部
田中 靖人

まえがき

本書は『ミクロ経済学』および『ゲーム理論』の基礎を解説したものであり，初級のミクロ経済学用テキストとして使用することを想定している。授業で使用しているものは授業が二つに分かれたのに合わせて上下に分けているが，このファイルは分けていない。また演習問題の解答と付録をつけている。付録には本文ではページ数の関係で割愛したロイの恒等式・マッケンジーの補題・スルツキー方程式の一般的証明や，補償変分，ブラウワーの不動点定理の証明とそれを用いた競争経済の均衡の存在証明，（ゲーム理論の）ナッシュ交渉解の解説などが含まれている。その付録を授業で使うことは予定していないが参考にしていただければ幸いである。もし使うのならプリントにして配る。

説明は簡潔に記したので適当な参考書を併読することが望ましい（必ずしも必要ではないが)。代表的な参考書には次のようなものがあるが，他にもいろいろあるので自分で手にとってみて読みやすそうなものを購入することを勧める*1。

1. 神取道宏『ミクロ経済学の力』（日本評論社）**（お勧め）**
2. 浅羽茂『企業の経済学』（日経文庫）
3. 荒井一博『ミクロ経済理論（有斐閣アルマ)』（有斐閣）
4. 石井安憲 他『入門ミクロ経済学』（有斐閣）
5. 入谷，篠塚『ミクロ経済学講義』（日本経済新聞出版社）
6. 浦井，吉町『ミクロ経済学』（ミネルヴァ書房）
7. 井堀利宏『入門ミクロ経済学』（新世社）
8. 奥野正寛『入門ミクロ経済学』（日経文庫）
9. 奥野正寛『ミクロ経済学』（東京大学出版会）
10. 奥野・鈴村『ミクロ経済学 I，II』（岩波書店）
11. 梶井・松井『ミクロ経済学 戦略的アプローチ』（日本評論社）
12. 倉澤資成『入門価格理論』（日本評論社）
13. 佐々木宏夫『（基礎コース）ミクロ経済学』（新世社）
14. 武隈慎一『ミクロ経済学 増補版』（新世社）
15. 遠山智久『弱点克服 大学生のミクロ経済学』（東京図書）
16. 永田良 他『標準ミクロ経済学』東洋経済新報社
17. 成生達彦『ミクロ経済学入門（有斐閣アルマ)』（有斐閣）

*1 以下で示す文献の中には，このテキストの前身の，そのまた前身のテキストに記載されていたかなり古いものも含まれており，何度も改訂されたり，すでに出版されていなかったり，訳者や書名が変ったりしたものもあるかもしれないが，その際はご容赦願いたい。

18. 西村和雄『ミクロ経済学』（岩波書店）
19. 西村和雄『ミクロ経済学入門』（岩波書店）
20. 林貴志『ミクロ経済学-増補版』（ミネルヴァ書房）
21. 川島康男『寡占と価格の経済学』（勁草書房）
22. 柳川隆 他『ミクロ経済学・入門—ビジネスと政策を読みとく (有斐閣アルマ)』（有斐閣）
23. 矢野誠『ミクロ経済学の基礎』（岩波書店）
24. 矢野誠『ミクロ経済学の応用』（岩波書店）
25. 戸瀬信之『コア・テキスト 経済数学』（新世社）

ゲーム理論の参考書としては上記梶井・松井の他に以下のものが代表的である。

1. 岡田章『ゲーム理論・入門』（有斐閣アルマ）**（お勧め）**
2. グレーヴァ 香子『非協力ゲーム理論 (数理経済学叢書) 』（知泉書館）**（学部上級にお勧め）**
3. 岡田章『ゲーム理論』（有斐閣）**（大学院生にお勧め）**
4. 神戸伸輔『入門 ゲーム理論と情報の経済学』（日本評論社）
5. R. ギボンズ（福岡正夫他訳）『経済学のためのゲーム理論入門』（創文社）
6. 佐々木宏夫『入門 ゲーム理論—戦略的思考の科学』（日本評論社）
7. 中山幹夫『はじめてのゲーム理論』（有斐閣）
8. 船木由喜彦『演習 ゲーム理論』（新世社）
9. 武藤滋夫『ゲーム理論入門』（日経文庫）
10. 武藤滋夫『ゲーム理論』（オーム社）
11. 渡辺隆裕『ゼミナール ゲーム理論入門』（日本経済新聞出版社）

本書は以前に中央大学生協出版局から発行していた『ゼロから始める経済学（改訂版）』をもとにして作り同志社大学経済学部の『中級ミクロ経済学』テキストして使用したものから中級の内容の一部を削除して作成した。

これまでのテキスト執筆の機会を与えてくださった中央大学生協出版局，同志社大学経済学部事務室，および授業で使っていただいた中央大学法学部・商学部，同志社大学経済学部の学生諸君に深くく感謝する。誤りや説明のわかりにくい所などがあればご指摘願いたい。今後の改訂の参考にさせていただく。なお本書は目次と索引の自動作成，作図を含めて，パソコン用組版システム LaTeX とその関連ソフトを用いて執筆した。これらのプログラムをフリーソフトとして公開してくださった方々に厚く感謝する。日本語フォントは「原ノ味明朝」および「原ノ味角ゴシック」フォント (https://github.com/trueroad/HaranoAjiFonts) を用いた。

授業用テキスト（下）と本書の問題番号は異なるが，授業用テキストの問題はすべて本書に含まれているので同じ問題を探していただきたい。また授業用テキストを前提とした記述も散見されるがご了承願いたい。本書を読むのに支障はない。

なお，「上巻第 2 章」と書かれている箇所は本書の第 2 章を指す。

2021 年 4 月 1 日 田中靖人

目次

第 1 章

需要と供給

■この章のキーワード　財，市場，経済主体，生産，消費，合理的な行動，需要曲線，需要の価格弾力性，代替財，補完財，供給曲線，供給の価格弾力性，市場均衡，需要曲線のシフト，供給曲線のシフト，市場均衡の安定性，ワルラスの調整過程，マーシャルの調整過程，くもの巣の調整過程

1.1　財と市場

「経済」とは財の生産と消費をめぐる人間の社会的，あるいは個人的営みであり，経済学が研究の対象とするのはそれら財の生産と消費をめぐるメカニズムである。すなわちどのような財がどれだけ生産され，それがいかなる形の取り引きを経て（いくらの「価格」がつくかも含めて）誰によってどれだけ消費されるか，あるいは誰にどのように配分されるかという問題である。そのメカニズムは経済の体制によって異なるが，わが国の経済は他の多くの国々と同様に市場経済システムのもとで営まれているので，**市場メカニズム**の働きを考えることが経済学の主要なテーマとなる。しかし市場経済とは言っても各国の経済システムは必ずしも純粋な市場経済ではなく，政府がさまざまな形で経済に関与している。そのような経済体制は**混合経済**と呼ばれている。

経済学では，市場経済のもとにおいて生産や消費を行う各経済主体はそれぞれの目標を最も効率よく達成できる行動を選ぼうとするという意味で**合理的な行動**を選択するものと考える。

合理的な行動の内容を検討する前にまずいくつかの言葉の説明から始めよう。

1.1.1　経済主体

経済の中で何らかの役割をはたす個人や団体，組織を経済主体と呼び，その役割によって区別する。生産を行う経済主体を**生産者** (producer) または（たとえそれが個人であっても）**企業** (firm) と呼び，消費を行う経済主体は**消費者** (consumer) または**家計** (household)

と呼ばれる。本書では『企業』と『消費者』という言葉を使う。消費者とは必ずしも個人ではなく消費生活の単位という意味なので家計とも呼ばれる。

第三の経済主体として毎年の予算や景気対策，産業構造政策，社会保障，貿易政策などの経済政策によって経済に影響を与える**政府**がある。政府には地方自治体も含まれる。政府の経済的な役割についての詳しい内容は『財政学』あるいは『公共経済学』で研究されている。後で見るように市場経済においては財の生産と消費は企業・消費者の自由な意思に基づいて行われるが，政府は企業間，企業と消費者の間の契約の履行や犯罪の防止のための法整備などによって市場経済での取引が円滑に進められるようにするという役割と，社会的に望ましくない財（麻薬など）の取引を規制したり，一部の仕事を免許制（医師や弁護士）にしたりするなど，言わば市場経済を修正する役割がある。

1.1.2　財

経済において生産され，購入され，消費されるものを**財** (good) と呼ぶ。要するにお金を出して買うものがすべて財である。財には牛肉，大根，冷蔵庫，自動車などの形あるもの，あるいは物質的なもの（有形財または財貨とも呼ばれる）と，金融，不動産仲介，教育，音楽演奏や理髪店（床屋），美容院，着付け，弁護士，探偵などが提供する仕事のように形のないものがある。形のない財（無形財）を**サービス** (service)（用役）と呼ぶ。サービスとは誰かが誰かに何かをしてあげて報酬を受け取る仕事そのものを指している。たとえば不動産の仲介は，家を買ったり借りたりする人が自分で家を探して持ち主や大家さんと契約をする代わりに，不動産業者が家を紹介し契約手続の仲立ちをすることによって契約者本人や大家さんの手間を省くサービスであり，不動産業者はそれに対する報酬として手数料を受け取る。弁護士の仕事なども同様である。

有形財はそれを生産した人の手を離れており，また蓄えが可能であるが，サービスはそれを提供する人と一体となっていて通常は蓄えができない。テレビを何日分かあるいは何ヵ月分かまとめて生産し在庫しておくことはできるが，理髪店で 3 回分まとめて髪を刈ってもらうわけにはいかないであろう[*1]。

教育は学校で提供される場合蓄えのできない財であるが，授業をビデオ（あるいは DVD, Brue-ray）に録画して売れば蓄えができることになる。音楽もコンサートに出かけて生で聞くものは蓄えができないが，CD に録音されたものなら蓄えができる。授業のビデオや音楽 CD は物質的な財であるその媒体（テープや CD）にサービスである授業や音楽が収められているもので物質的な財とサービスの間にある財であるが，基本的には付加価値のついた物質的な財と見なすことができる。(CD や DVD に収められた) パソコンソフト，（小説や経済学の解説などが収められた）書籍なども同様である。ネットからダウンロードするパソコンやスマートフォンのソフト・アプリもサーバーに蓄えができる電子データ

[*1] 月 1 回散髪に行くとして，3 か月持つように短くすればよいわけではない。1 か月経てば何もしなくても自然に短くなるようにしなければいけない。

なので同様の財である。以下で述べるようにサービスは生産と消費が同時でなければならない。

1.1.3 生産

生産とは企業が機械・土地・労働や原材料などの**生産要素**を用いて，ある財（テレビやビールなど）を作り出す（製造する）ことであるが，経済学で生産と言う場合，製造した財の運送・保管・販売などの流通過程における仕事も含まれる。北海道の毛ガニを飛行機で東京に運ぶのも，倉庫の洗濯機を電機店のフロアに並べるのも生産活動の一部である。

また，上で述べた金融・教育などのサービスを提供することもそれらのサービスを生産していると解釈される。

生産要素もそれ自体が財またはサービスであるから（労働も含めて），生産とは**財またはサービスを用いて別の財またはサービスを作り出すことである**，と言える[*2]。

1.1.4 消費

消費とは消費者がある財（サービスを含む）を購入して（購入せずにもらったり盗んだりしても同様）欲望を満たそうとして何らかの行動，行為をすることである。具体的には，顔を洗い歯を磨く（水，歯ブラシ，歯磨き粉などを消費する），パンを食べる，ビールを飲む，本を読む，音楽を聴く，電車・バスで学校に行き授業を受けることなどわれわれの日常生活のすべてが経済的に見れば消費活動である。電車・バス・飛行機などは輸送サービス，授業は教育サービスを消費する。電車や飛行機などに乗って移動するとき，われわれは電車・飛行機そのものを買っているわけではなく，輸送というそれらのサービスを買っている。上で述べたように，サービスは提供する人と一体になっているというのは「生産と消費が同時である」とも言える。弁護士が裁判で被告を弁護をしているとき，弁護士はそのサービスを生産し弁護してもらっている被告は同時にそのサービスを消費している[*3]。

本書の以下の議論では有形財とサービスの違いは特に問題にしない。

[*2] 機械・土地・労働はそれら自体が財に取り込まれるのではなくそれらの機能が生産に用いられるのでサービスである。一方原材料や部品は財に取り込まれるが，それらももともと（工場や畑で作られたり，山から掘って来たりして）生産された財であり，生産の過程を遡ると生産要素は機械（広く言えば生産設備，工場なども含まれ，「資本」とも呼ばれる）・土地・労働だけになる。

[*3] 寿司屋で握ってもらった寿司をすぐに食べるとしても，握って食べるまでに多少の時間がかかるので同時ではない。サービスの生産と消費が同時であるというのはサービスの特質として原理上そうなっているのであり，同時でなくすことはできない。

1.1.5　市場および市場経済

市場といっても青果市場や証券市場などの具体的な場所を指すのではなく，抽象的に**財やサービスが取り引きされる場**を意味する。酒屋の店先でお酒を買うのも，通信販売で本やパソコンを買うのも市場における取り引きである。市場経済とは企業によって生産された財が政府による割り当てや配給ではなく，売り手と買い手の自由な意思による取り引きによって消費者の手に渡るような経済の仕組みを言う。

市場経済における財の取り引きとはすなわち**交換**である。つまり自分が持っているものと他の人が持っていて自分が欲しいと思うものとを一定の比率で取り替えることである。交換には財と財とを直接交換する物々交換と，貨幣を媒介とした間接的な交換とがあり得る[*4]。交換以外に自分の欲しいものを手に入れる手段としては,『もらう（贈与あるいは配給)』と『奪う，盗む（略奪)』が考えられる。しかし贈与はそれによって生活に必要な財を十分に手に入れられるほどあてにできるものではないであろうし，政府が財を配給するシステムでは個々の消費者が欲しいと思うものを得ることは期待できないであろうから，贈与や配給をベースに快適な経済社会を作り上げることは困難である。また略奪をベースにした社会では平和な生活は望めない。したがって市場における交換は各自が求めるものを手に入れるための理に適った仕組みであると考えられる。

1.1.6　合理的な行動

経済学では各経済主体はそれぞれ合理的な行動をするものと考える。これは，各経済主体が各々何らかの目標を持ち，自らに与えられた制約条件の下でその目標を最もよく達成できると考える行動を選択するという意味である。具体的には後の章で説明するように，企業は自らの生産技術を用いて生産した財の販売によって得られる利潤をできるだけ大きくしようとし，消費者は予算の範囲内で可能な財の消費から得られる効用（満足度）をなるべく大きくしようとすると考える。

1.1.7　経済の循環

企業は財を消費者に供給し消費者はそれを需要するが，一方企業による生産に用いられる労働サービス[*5]は消費者が労働者として企業に供給するものである。財と労働サービス

[*4] 本書では物々交換と貨幣を媒介とした間接的な交換とは実質的に同じものであると考える。ミクロ経済学では通常そのように取り扱い，貨幣は特別な役割を果たさない。しかし，貨幣はその価値を長期間保存できるということや，貨幣そのものが（財として）価値を持つ，あるいは政府がその価値を保証しているので誰もがそれを受け取ることなど，一般の財とは異なる特徴がある。経済における貨幣の性質・役割についてはマクロ経済学や金融（論）で学ぶ機会がある。

[*5] 労働サービスとは労働者が企業に提供する生産要素であるが，形のある財ではないのでサービスである。生産要素とその報酬については第 3 章で説明する。

とでは需要と供給の関係が逆になっている[*6]。消費者は労働サービスを企業に供給して所得を得（資本家として資本サービスを供給する消費者や地主として土地サービスを供給する消費者もいる），その所得で財を購入する。企業は財を消費者に売って得た収入から賃金や地代などの報酬を支払っている。

経済の循環に政府を含めると，政府は企業や消費者（労働者）から法人税，所得税，消費税などの税を徴収する一方,（その見返りとして）行政サービス (治安，防衛，公的な医療，教育，公共施設の建設など) を供給している。

1.2　需要と需要曲線

市場経済のメカニズムとは財を生産・販売する企業とそれを購入・消費する消費者の意図の調整が図られる機構である。

1.2.1　需要

消費者がある財をある価格のもとで，それに必要な予算を用意して購入したいと思っていることを**需要** (demand) と呼ぶ。単に欲しいと思っているだけでは需要ではなく供給されればその価格で買える用意ができていなければならない。その財をどのくらい需要するかを**需要量**と言うが，通常需要という言葉で需要量をも意味する。需要には 1 人の消費者の需要と消費者全体の需要とがある。後者を**市場の需要**と呼ぶ。市場の需要は各価格水準における 1 人 1 人の消費者の需要を合計したものである。また，各財の（市場の）需要は一定期間（1 日，1 ヶ月，1 年など）および一定の地域について測られる量である。ある財に対する需要はさまざまな要因によって決まるが，主なものは『その財の価格』,『他の財の価格』,『消費者の所得』，そして『消費者の好み（『嗜好』あるいは『選好』とも言う）』である。中でも重要なのはその財自身の価格である。

[*6] 需要，供給について詳しくは以下で説明する。

1.2.2　需要曲線

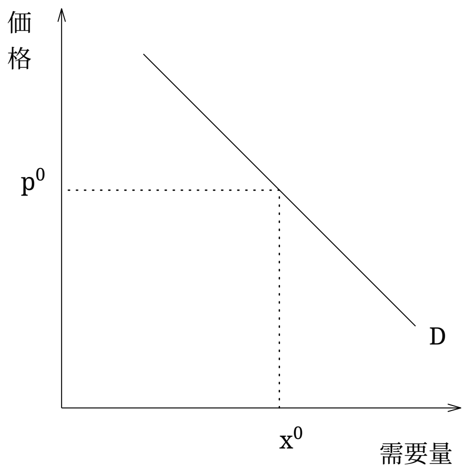


図 1.1　需要曲線

図 1.1 参照。ある一つの財の需要について考えるとき，とりあえずその他の財の価格，消費者の所得，好みは変わらないものとする。すると需要はその財の価格によって決まることになる。その関係を図のように表したものを**需要曲線** (demand curve) と呼ぶ。需要曲線は縦軸に価格，横軸に需要量をとって表す。通常，財の需要は価格が高くなると減少し低くなると増加するから需要曲線は一般に**右下がり**（傾きがマイナス）である。

この関係を

$$D = D(p);\quad p \text{ は価格},\ D \text{ は需要}$$

のような式の形で表したものを**需要関数**と呼ぶ*7。

需要曲線が表しているのは，たとえば図 1.1 において価格が p^0 のときの需要量は x^0 であるということである。それは消費者にとって x^0 だけの財を買うには価格が p^0（あるいはそれ以下）でなければならないということを意味する。好みや所得が異なる消費者については需要曲線の形も異り，財が違えば同じ消費者の需要曲線の形も異なる。

1.2.3　需要曲線が右下がりになる理由

個人あるいは市場の需要曲線が右下がりになる理由としては以下のことが考えられる。

*7 この式は需要 D は価格 p によって決まるということ，そしてそのことだけを意味している。

1. ある財の価格が高くなると少なくとも一部の消費者はその財の購入量を減らして，あるいは購入をやめて同様の目的に使える別の財（代替財：以下の説明を参照）を購入する。
2. ある財の価格が高くなるとその財の購入を続ける限り所得の実質的な価値が低下するので，すべての消費者は全般的に消費を控える。

それぞれ代替効果，所得効果と呼ばれる。詳しくは第 2 章で検討する。

需要曲線が右下がりなのは常識にもかなっており，原則としてすべての財についてそうであると考えられるが，そうならない場合もあるかもしれない。ダイヤの指輪などは価格が高いことに価値があり，自分（あるいは自分の夫など）はこんなに金持ちなんだと見せびらかすことに意味があるかもしれない。もしダイヤの大鉱脈が発見されて大量に生産され誰でも買えるようになったら価値がなくなり，誰も買わなくなることも考えられる。このような消費行動はアメリカの経済学者ヴェブレンが「有閑階級の理論」（1899）で指摘した「見せびらかし」の消費（顕示的消費）と呼ばれるが本書では詳しく扱わない[*8]。

1.3　需要の価格弾力性

需要曲線の特徴を表す指標の一つとして**需要の価格弾力性** (price elasticity of demand) がある。これはある財についてその価格が変化したときに需要がどの程度変化するかを示すものである。具体的には以下のように表される。

$$\text{需要の価格弾力性} = -\frac{\text{（市場の）需要の変化率}}{\text{価格の変化率}}$$

ここで『変化率』は小数で表しても，パーセントで表してもかまわない（もちろん分母と分子は同じ次元で表す必要がある）。価格が上昇すると需要が減るというように通常需要の変化率と価格の変化率とはプラス・ マイナスが逆になっているため，先頭にマイナス (–) をつけて弾力性の値がプラスになるようにしてある。価格が 10 %高くなって需要が 20 %減れば需要の価格弾力性は 2 であり，価格が 5 %低くなって需要が 15 %増えれば需要の価格弾力性は 3 である。

厳密には需要の価格弾力性はごくわずかな価格の変化（とそれに対応したごくわずかな需要の変化）について定義されるべきものである。したがって数学的には微分で表現される。大きな価格の変化を考えると，ある財の価格が 100 円から 150 円に値上がりしたときの弾力性と，逆に 150 円から 100 円に値下がりしたときの弾力性とは異なる値をとる可能性がある（具体的な例で考えてみていただきたい）が，ごくわずかな価格の変化を考えた

[*8] 第 2 章で，需要曲線が右下がりにならない可能性の一つとして「ギッフェン財」について説明する。

場合にはそうはならない。需要の価格弾力性を ε として式で書けば次のように表される。

$$\varepsilon=-\frac{p_x}{x}\frac{dx}{dp_x}=-\left(\frac{dx}{x}\right)/\left(\frac{dp_x}{p_x}\right)$$

この式は X 財の価格 p_x とその需要 x の関係を表すものである。$\frac{dx}{dp_x}$ は需要関数の微分であるが，わずかな価格の変化とそれに対する需要の変化の比を表すものと見ることができる。右端の項は価格の変化率と需要の変化率の比を表している[*9]。

需要の価格弾力性は財によって異なる。需要の価格弾力性の小さな財は，価格が少々高くなっても消費量をあまり減らせない，逆に少し安くなってもあまり消費量が増えない財，食料品や燃料など生活に欠かせないもの（生活必需品）に多いと考えられる。また，次に説明する代替財が多い財ほど弾力性が大きく，代替財があまりない財は弾力性が小さいと考えられる。一般に傾きの小さい（水平に近い）需要曲線をもつ財は傾きの大きい（垂直に近い）需要曲線をもつ財よりも，価格の変化に対する需要の変化の割合が大きいので需要の価格弾力性が大きい。

■需要の価格弾力性一定の需要関数　線形（直線）の需要曲線は傾きが一定であるが弾力性は一定ではない。

$$\text{需要の価格弾力性}=-\frac{\frac{\text{需要の変化}}{\text{需要}}}{\frac{\text{価格の変化}}{\text{価格}}}=-\frac{\text{需要の変化}}{\text{価格の変化}}\times\frac{\text{価格}}{\text{需要}}=-\frac{1}{\text{需要曲線の傾き}}\times\frac{\text{価格}}{\text{需要}}$$

なので同じ傾きの需要曲線についても弾力性を考える点での価格が高いほど需要が少ないほど弾力性は大きい。すなわち，需要曲線の上の方で考える方が弾力性は大きいことになる。しかし，同じ点で考えると傾き（の絶対値）が小さいほど弾力性が大きくなることは間違いない。

（以下は参考である）

では，弾力性が一定になる需要曲線（需要関数）はどのようなものだろうか。需要を x，価格を p として

$$x=p^{-e}$$

で表される需要関数を考えると

$$\text{需要の価格弾力性}=-\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}}=-\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}$$

となる。dx は需要の，dp は価格の変化を表すが $\frac{dx}{dp}$ は上の関数を p で微分したものに等しい。したがって

$$\text{需要の価格弾力性}=ep^{-e-1}\frac{p}{x}=e\frac{x}{p}\frac{p}{x}=e$$

[*9] 微分とは関数関係にある変数同士のわずかな変化の比を表す分数であると考えることができる。

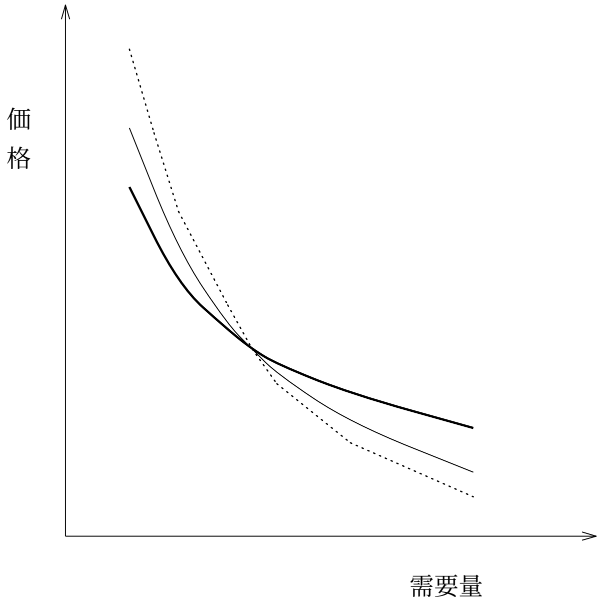


図 1.2　需要の価格弾力性一定の需要曲線

となり需要の価格弾力性は常に e に等しい。$e = 1$ ならいわゆる反比例のグラフになり，$e > 1$ なら全体的に傾きは小さく（傾きは一定ではない）$e < 1$ なら全体的に傾きは大きい。以下の図で細い曲線が $e = 1$ の場合を太い曲線が $e > 1$ の場合を，点線が $e < 1$ の場合を表している（図は正確ではないが，だいたいのイメージで）。

1.4　代替財と補完財

ある財に対する需要は他の財の価格の変化によっても影響を受ける可能性がある。

1.4.1　代替財

二つの財 A と B があり，財 A の価格が上昇すると財 B に対する需要が増え，逆に財 A の価格が下落すると財 B に対する需要が減る場合，この二つの財は**代替財** (substitutes) であると言う。代替財とは，異なる財ではあるが同様の目的（まったく同じではないとしても）に用いられるものを指す。例としては，コーヒーと紅茶，米とパン，ウィスキーと焼酎，ビールと発泡酒，パソコン用インクジェットプリンタとレーザープリンタなどがある。紅茶の価格は変わらずにコーヒーの価格が高くなれば，特にコーヒーが好きで紅茶など飲まないという人は別として，高くなったコーヒーに代えて紅茶を飲もうという人が増えると考えれるからこれらは代替財である。

p_A，p_B を A，B の価格，x_A，x_B を A，B の需要として代替財の性質を式で表せば次の

ようになる。

$$\varepsilon_{AB} = \frac{p_B}{x_A}\frac{dx_A}{dp_B} = \left(\frac{dx_A}{x_A}\right) / \left(\frac{dp_B}{p_B}\right) > 0$$

または

$$\varepsilon_{BA} = \frac{p_A}{x_B}\frac{dx_B}{dp_A} = \left(\frac{dx_B}{x_B}\right) / \left(\frac{dp_A}{p_A}\right) > 0$$

それぞれ B の価格の変化率と A の需要の変化率の比，および A の価格の変化率と B の需要の変化率の比を表し，**交差弾力性** (cross elasticity) と呼ばれる。実は一般的にこの両者の符号が一致するとは限らないが，次の章で見る「補償需要」を考えるとこの両者の符号は一致する。交差弾力性が正の財同士が代替財である[*10]。

1.4.2　補完財

二つの財 A と B があり，財 A の価格が上昇すると財 B に対する需要が減り，逆に財 A の価格が下落すると財 B に対する需要が増える場合，この二つの財は**補完財** (complements) であると言う。補完財とは一つの目的を共同で達成する財，一緒に用いられる財を指す。例としては，コーヒーと砂糖，パンとジャム，パソコン用プリンターとインクやトナーなどがある。砂糖の価格は変わらずにコーヒーの価格が高くなれば，コーヒーに砂糖は入れないという人は別として，高くなったコーヒーを飲む量を減らしその結果砂糖の消費量も減ると考えられるからこれらは補完財である。式では

$$\varepsilon_{AB} = \frac{p_B}{x_A}\frac{dx_A}{dp_B} = \left(\frac{dx_A}{x_A}\right) / \left(\frac{dp_B}{p_B}\right) < 0$$

または

$$\varepsilon_{BA} = \frac{p_A}{x_B}\frac{dx_B}{dp_A} = \left(\frac{dx_B}{x_B}\right) / \left(\frac{dp_A}{p_A}\right) < 0$$

と表せる。交差弾力性が負の財同士が補完財である。

1.4.3　需要の価格弾力性と需要曲線の傾き

$$\text{需要の価格弾力性} = -\frac{\text{需要の変化率}}{\text{価格の変化率}} = -\frac{\frac{\text{需要の変化}}{\text{需要}}}{\frac{\text{価格の変化}}{\text{価格}}}$$

であり，一方

$$\text{需要曲線の傾き（の絶対値）} = -\frac{\text{価格の変化}}{\text{需要の変化}}$$

[*10] 厳密に言えば後で説明する所得効果を含まずにある財の価格の低下が別の財の需要を減らすときに代替財，増やすときに補完財と言い，所得効果を含めてそのようになる場合はそれぞれ「粗代替財」「粗補完財」と言う。

である。「需要曲線の傾きの絶対値」を「需要曲線の傾き」と呼ぶことにする。これらから

$$\text{需要の価格弾力性} = \left(\frac{\text{価格}}{\text{需要}}\right)\frac{1}{\text{需要曲線の傾き}}$$

であることがわかる。したがって需要の価格弾力性が一定になるような需要曲線の場合，右に行くほど（需要が大きく価格が低いほど）需要曲線の傾きが小さくならなければならいから，そのような需要曲線は原点に向かって凸（出っ張っている形）になる。一方，傾きが一定の需要曲線の場合には右に行くほど価格弾力性が小さくなる。

しかし，一般的に傾きが小さい需要曲線の方が傾きが大きい需要曲線より価格弾力性が大きいことに変わりはない。

上の式を 価格 $= p$，価格の変化 $= dp$，需要 $= x$，需要の変化 $= dx$ として記号で書くと

$$\text{需要の価格弾力性} = -\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = -\frac{p}{x}\frac{dx}{dp},\ \text{需要曲線の傾き} = -\frac{dp}{dx}$$

となるので

$$\text{需要の価格弾力性} = \frac{p}{x}\frac{1}{\text{需要曲線の傾き}}$$

が得られる。

（以下は参考である）

需要の価格弾力性一定の需要関数

線形（直線）の需要曲線は傾きが一定であるが弾力性は一定ではない。では，弾力性が一定になる需要曲線（需要関数）はどのようなものだろうか。需要を x，価格を p として

$$x = p^{-e}$$

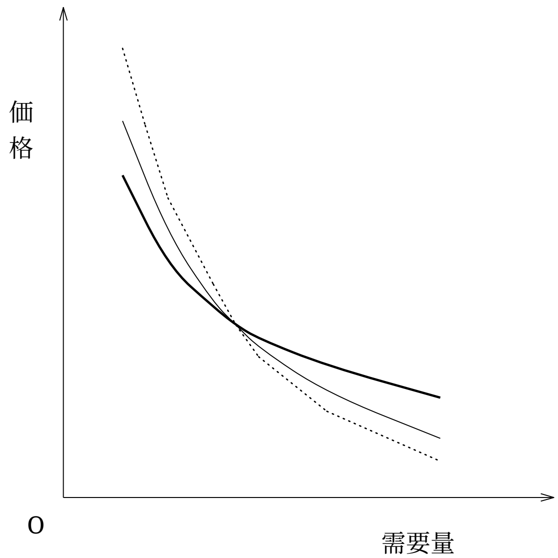
で表される需要関数を考えると

$$\text{需要の価格弾力性} = -\frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dp}{p}} = -\frac{dx}{dp}\frac{p}{x}$$

となる。dx は需要の，dp は価格の変化を表すが $\frac{dx}{dp}$ は上の関数を p で微分したものに等しい。したがって

$$\text{需要の価格弾力性} = ep^{-e-1}\frac{p}{x} = e\frac{x}{p}\frac{p}{x} = e$$

となり需要の価格弾力性は常に e に等しい。$e = 1$ ならいわゆる反比例のグラフになり，$e > 1$ なら全体的に傾きは小さく（傾きは一定ではない）$e < 1$ なら全体的に傾きは大きい。以下の図で細い曲線が $e = 1$ の場合を太い曲線が $e > 1$ の場合を，点線が $e < 1$ の場合を表している（図は正確ではないが，だいたいのイメージで）。



1.5　供給と供給曲線

1.5.1　供給

企業がある財をある価格で生産し消費者に購入してもらおうという意思を持っていることを**供給** (supply) と呼ぶ。単に売りたいと思っているだけでは供給ではなく，財を用意し需要があればその価格で売れる状態でなければならない。その財をどのくらい供給するかを**供給量**と言うが，通常供給という言葉で供給量をも意味する。供給には一つの企業の供給とその企業が属する産業全体の供給とがある。後者を**市場の供給**と呼ぶ。市場の供給は各価格水準において一つの産業（ある一つの種類の財を生産する企業の全体）の中のすべての企業の供給量を合計したものである。需要と同様に市場の供給は一定期間，一定の地域について測られる。ある財の供給量はさまざまな要因によって決まるが，主なものは『その財の価格』,『（その財の生産に用いられる）原材料・部品等の価格』,『労働賃金』,『生産技術』である。中でも重要なのはその財自身の価格である。

1.5.2　供給曲線

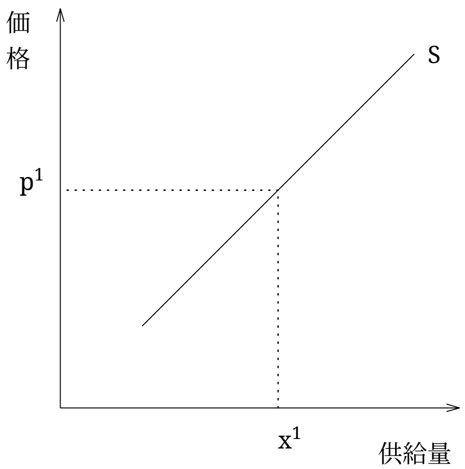


図 1.3　供給曲線

図 1.3 参照。ある一つの財の供給について考えるとき，とりあえず原材料・部品の価格，労働賃金，生産技術などは変わらないものとする。すると供給はその財の価格によって決まることになる。その関係を図 1.3 のように表したものを**供給曲線** (supply curve) と呼ぶ。供給曲線は縦軸に価格，横軸に供給量をとって表す。通常，供給は価格が高くなると増加し低くなると減少すると考えられるから供給曲線は一般に**右上がり**（傾きがプラス）である。

この関係を

$$S = S(p); \quad p \text{ は価格，} S \text{ は供給}$$

のように式で表したものを**供給関数**と呼ぶ[*11]。

供給曲線が表しているのは，たとえば価格が p^1 のときの供給量は x^1 であるということである。逆に見れば，企業にとって x^1 だけの財を生産・販売するには価格が p^1（あるいはそれ以上）でなければならないということである。すなわち企業にとっては 1 単位[*12]当

[*11] この式はある財の供給量 S はその価格 p によって決まるということ，そしてそのことだけを意味する。

[*12] 財の産出量の単位をこのように呼ぶ。財の数量を数えるとき，財によっては 1 個，2 個と数えるものもあれば，1kg，2kg と数えるものもある。すべての財に通じる数え方の基準として『1 単位』という言葉を用いる。

り p^1 の価格で売れなければ採算がとれない，それだけのコスト（費用）がかかっているということを意味している。

1.5.3　供給曲線が右上がりになる理由

供給曲線が右上がりになっているということは産出量を増やすためには 1 単位当たりでより大きなコストをかけなければならない，あるいは大きなコストをかけることができれば供給を増やすことが可能であるということを意味している（この説明は少し正確さを欠いているが詳しくは第 3 章で解説する）。これは必ずしも自明のことではないが次のような理由が考えられる。

1. 価格が上昇すると効率の悪い企業も採算が合うようになり生産を始める。
2. 生産を増やすためには労働者に残業をさせるなどの対応が必要になるが，それには通常よりも大きなコストがかかる。

供給曲線が右上がりであることは必ずしも常識的ではなく，またいつもそうであるとは限らない。実際，大量生産によってコストが下がるような財については供給曲線が右上がりにならないと考えられる場合もある。

1.6　供給の価格弾力性

需要の価格弾力性と同様に供給の価格弾力性を定義することができる。これはある財の価格の変化に対してその供給がどの程度変化するかを示す指標である。具体的には以下のように表される。

$$\text{供給の価格弾力性} = \frac{\text{供給の変化率}}{\text{価格の変化率}}$$

通常は価格が上昇すると供給が増えるというように供給の変化率と価格の変化率とは符号が同じなので，先頭にマイナス (–) をつけなくても弾力性の値はプラスになる。価格が 10 %高くなって供給が 20 %増えれば供給の価格弾力性は 2 であり，価格が 5 %低くなって供給が 15 %減れば供給の価格弾力性は 3 である。

需要の価格弾力性と同様に厳密には供給の価格弾力性はごくわずかな価格の変化（したがってごくわずかな供給の変化）について定義されるべきものである。大きな価格の変化を考えると，ある財の価格が 100 円から 200 円に値上がりしたときの弾力性と，逆に 200 円から 100 円に値下がりしたときの弾力性とは異なる値をとる可能性があるが，ごくわずかな価格の変化を考えた場合にはそうはならない。供給の価格弾力性を η として式で書けば次のように表される。

$$\eta = \frac{p_x}{x}\frac{dx}{dp_x} = \left(\frac{dx}{x}\right) / \left(\frac{dp_x}{p_x}\right)$$

この式は X 財の価格 p_x とその供給 x（ここでは x は供給）の関係を表すものである。

供給の価格弾力性は価格の変化に対する供給の変化を考える時間の長さによっても異なるであろう。1 日や 2 日で自動車の生産を大幅に増やすことはできないが，1 ヵ月，2 ヵ月の時間をとればかなり供給量を調整できると考えられる。このように長い時間より短い時間で考えるならば供給の価格弾力性の値は小さくなる。また財によっても産出量の調整にかかる時間の長さには違いがある。たとえば住宅に比べればアイスクリームの方がより短時間で産出量の調整ができると考えられるので，同じ時間の長さで考えるとアイスクリームの方が住宅に比べて供給の価格弾力性が大きい。

1.7　市場均衡

1.7.1　市場均衡

図 1.4 参照。市場メカニズムにおいては価格を通して需要と供給の調整が図られる。そして価格は需要と供給が一致する水準に決まるものと考えることができる。ある価格のもとで需要と供給が一致している状態を**均衡**あるいは**市場均衡**と呼ぶ。図で需要曲線と供給曲線が交わっている点を**均衡点**，そのときの価格を**均衡価格**と呼ぶ。図 1.4 の点 E が均衡点であり，そのときの価格 p^* が均衡価格である。均衡点において一致した需要と供給の値 x^* がその財の均衡における取引量となる。均衡点において需要曲線と供給曲線が交わっているということは，市場均衡においては以下の条件が満たされているということである。

1. すべての消費者はその価格のもとで需要したいと望む量を購入できる。つまり，（その価格のもとで）ちょうど欲しいだけの量を買うことができる。
2. すべての企業はその価格のもとで供給したいと考える量を生産・販売できる。つまり，（その価格のもとで）ちょうど作りたいだけの量を作り，売ることができる。
3. その価格のもとで市場の需要と供給が一致している。

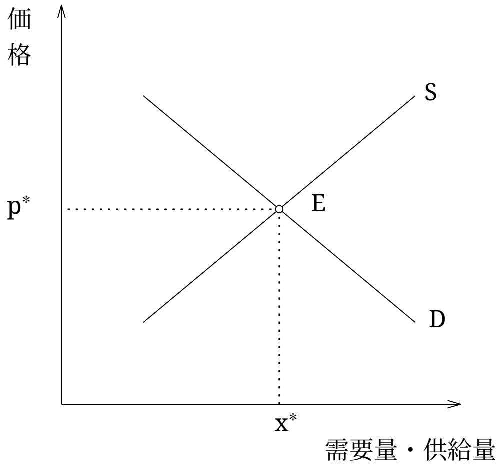


図 1.4　市場均衡

すなわち，均衡とはすべての消費者，企業がそれぞれのおかれた条件のもとで納得した行動をしており，状況に変化がない限り自分が選んだ行動を変えようとする意思（あるいは動機，インセンティブ（誘因））を持たない状態である。

市場均衡はある価格水準を前提にしているということに注意すべきである。『ワールドカップを見るのに大型 4K テレビが欲しいが高すぎて手が出ない，もっと安ければ買うのだがなあ…。』というのは需要ではないので，均衡においてもこのような消費者はたくさん存在する。

均衡価格以外の価格においては需要と供給が一致しないので，企業，消費者のいずれか，あるいは両方が自分の望む取り引きを実現できない。

1.7.2　簡単な数式モデル

簡単な数式を用いて市場均衡を求めてみよう。ある財の需要量および供給量を x で，その価格を p で表し，需要曲線が

$$p = 100 - 4x$$

供給曲線が

$$p = 2x + 16$$

のように表されるものとする。この財の均衡価格と均衡取引量は二つの式を連立方程式として解くことによって以下のように求まる[*13]。

$$x = 14,\ p = 44$$

1.8　数量の少ない財の需要・供給分析

絵画・彫刻などの美術品や有名作家の初版本，署名入りの本など数が限られている（もちろん一つしかないものもある）財の売買も需要・供給の考え方に基づいて分析できる。例として葛飾北斎のある版画がこの世に 3 枚残っていて，それぞれ異なる人が所有している場合を考える。3 枚の版画はまったく同じものでなければならない。保存状態などによって評価が異なるときは別々の財と見なす。同じ版画についても人によって評価は異なる。その人の美術・版画・北斎に対する興味・好み，また経済力によっても評価は異なるであろう。同じ人の 3 枚の版画に対する評価は同じである。1 人の所有者は 300 万円以上でなければ売らないと思い，2 人目の人は 200 万円，3 人目の人は 100 万以上であれば売ってもよいと思っているとする（それぞれの価格を留保価格 (reservation price) と呼ぶ)[*14]。そのとき供給は次の表で表される。

価格	供給量
300 万円以上	3
200 万円〜300 万円未満	2
100 万円〜200 万円未満	1
100 万円未満	0

需要は北斎のこの版画が欲しい人がいくらで買う用意があるかで決まる。例えば 350 万円以下なら 1 人，240 万円以下なら 2 人，120 万円以下なら 3 人の人が欲しがっているとする。そのとき需要は次の表で表される。

価格	需要量
350 万円超	0
240 万円超〜350 万円	1
120 万円超〜240 万円	2
120 万円以下	3

とりあえず 4 以上の需要はないとする。価格が 200 万円〜240 万円のとき需要・供給ともに 2 であり取引が成立する。実際に価格がどうなるかは売り手と買い手の交渉によるだろ

[*13] ここの例では需要曲線，供給曲線が直線（一次関数）であると仮定しているが，もちろん一般的にはそうとは限らない。

[*14] 留保価格とは売り手にとっての最低価格であるが，買い手にとっての最高価格，それ以上高いと買わないという価格も留保価格と呼ばれる。

う。図に描くと図 1.5 のようになる。太い実線が供給曲線，太い点線が需要曲線である。価格 200 万円～240 万円，需要・供給 2 の実線と点線が重なった部分が市場均衡を表す。

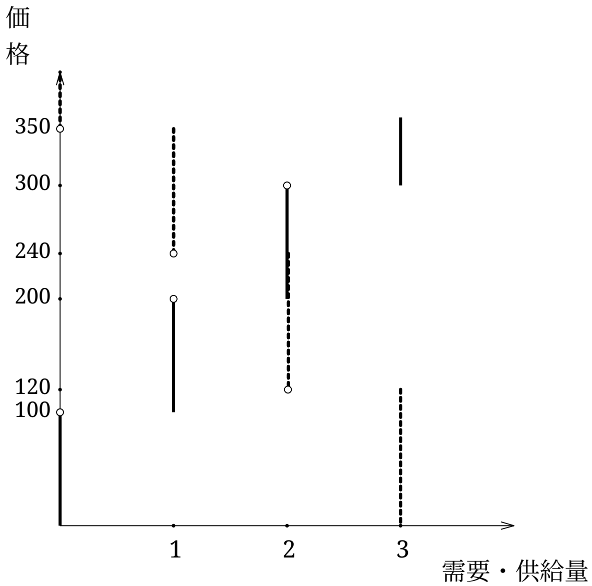


図 1.5　需要・供給曲線

北斎のこの版画が世界に 1000 枚も 2000 枚もあったとしても同じように考えることができる。その場合細かい価格の変化によって需要も供給も少しずつ変わって行くであろう。縦横 10cm くらいの図に需要・供給曲線を描けば，1000 目盛が 10cm だとすると 1 目盛が 0.1mm になり，少しずつ変化する需要・供給曲線はそれぞれ右下がり，右上がりの滑らかな曲線のようになり，その交点が均衡を表すことになる。

1.9　需要・供給曲線のシフト

ここまでは，財の需要曲線・供給曲線についてその財自身の価格との関係のみを考えてきたが，財の需要・供給は他の財の価格など外部の要因にも影響される。外部の要因が変化すれば需要曲線・供給曲線はもとの位置にとどまることができず，移動（シフト）する。

1.9.1 需要曲線のシフト

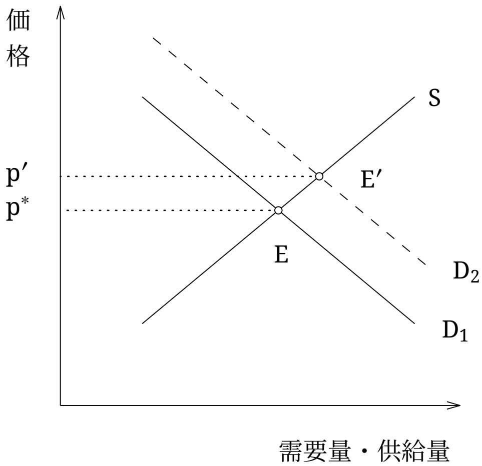


図 1.6 需要曲線のシフト

図 1.6 参照。たとえばパンの需要に影響するパンの価格以外の要因として次のようなものが考えられる。

1. 米，うどんなど代替財の価格の変化
2. ジャム，バター，マーガリンなど補完財の価格の変化
3. 消費者の所得の変化
4. 消費者の好みの変化

代替財の価格が上昇するとパンの価格は変わらなくてもパンに対する需要は増加する。パンの需要曲線は他の要因が変化しないと仮定してパンの価格とパンに対する需要との関係を描いたものであるから，パンの価格が変わらなくても需要が増加するということはパンの需要曲線そのものが変わってしまうということである。

代替財の価格が上昇した場合にはパンの価格のそれぞれの値において需要が増えるので，需要曲線は全体的に右にシフトする[*15]。そのとき均衡価格はどうなるであろうか。図 1.6 に示されているように需要曲線が右にシフトすると，変化しない供給曲線との交点は，供給曲線が右上がりであれば右上に移動する。均衡価格は高くなってパンの取り引き量は増加する。どの程度価格が上昇し，取り引き量が増えるかは供給曲線の傾きによる。供給

[*15] 以前と同じ需要をもたらす価格は高くなるので需要曲線が上にシフトするとも言える。横軸あるいは縦軸から見て平行に移動するとは限らない。

曲線の傾きが小さければ（水平に近い）価格の上昇幅は小さく，取り引き量の増加は大きい。逆に供給曲線の傾きが大きければ（垂直に近い）価格の上昇幅は大きく，取り引き量の増加は小さい。

補完財の価格が下落したり，消費者の所得が増加した場合や，消費者の好みが変わってパンを好む人が増えた場合にも同じ価格のもとでのパンの需要は増えるので需要曲線は右にシフトする。

逆に代替財の価格が低下したり，補完財の価格が上昇したり，消費者の所得が減少したり，消費者があまりパンを好まなくなった場合などは同じ価格のもとでパンに対する需要は減少し，需要曲線は左にシフトする[*16]。その結果均衡価格は下がり，取り引き量も減少する。やはりどの程度価格が下落し，取り引き量が減るかは供給曲線の傾きによる。

1.9.2　供給曲線のシフト

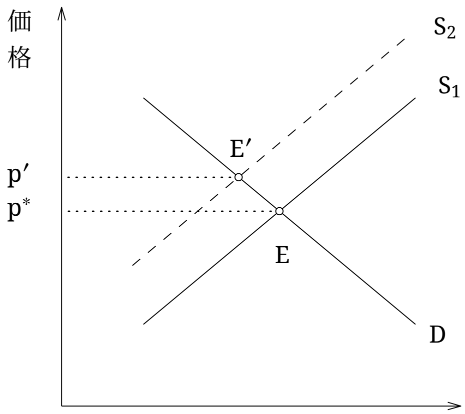


図 1.7　供給曲線のシフト

図 1.7 参照。パンの供給に影響するパンの価格以外の要因としては次のようなものが考えられる。

1. 小麦などの原材料の価格や労働賃金などの変化
2. 生産技術の変化（進歩）

パンの原材料である小麦などの価格や労働賃金が上昇すると，同じ量のパンを作るのに以

*16 以前と同じ需要をもたらす価格は低くなるので需要曲線が下にシフトするとも言える。

前よりも余計に費用がかかるようになる。すると企業としては以前と同じ価格で売っていたのでは利益が上がらない，あるいは損をすることになり，同じ量のパンを生産するのには費用の上昇分を反映したより高い価格で売らなければならなくなる。したがって供給曲線は上にシフトする*17。新しい供給曲線と変化しない需要曲線との交点は図 1.7 に示されているように左上に移動し，均衡価格は上昇して取り引き量は減少する。どの程度価格が上昇し，取り引き量が減るかは需要曲線の傾きによる。需要曲線の傾きが小さければ（水平に近い）価格の上昇幅は小さく，取り引き量の減少は大きい。逆に需要曲線の傾きが大きければ（垂直に近い）価格の上昇幅は大きく，取り引き量の減少は小さい。原材料価格や労働賃金が低下すると生産にかかる費用が低下し，供給曲線は下にシフトする*18。その結果均衡価格は低下し取り引き量は増加する。やはりどの程度価格が下落し，取り引き量が増えるかは需要曲線の傾きによる。またパンの生産技術が進歩して同じ量と質のパンをそれまでよりも安い費用で生産できるようになれば，原材料価格や労働賃金が下がったのと同じ効果をもつことになるので供給曲線は下にシフトし均衡価格が下がって取り引き量は増える。

財にかかる税金が高くなることも供給曲線が上にシフトする要因となる。例えばタバコにかかる税金が引き上げられるとタバコ企業は高くなった税金分だけ値上げしないと同じ収入が得られないので供給曲線は上にシフトする。そのとき均衡は左上に変化しタバコの販売量が減って価格は上がるが，どの程度の影響があるかは需要曲線の形による。需要の価格弾力性が大きい（需要曲線の傾きが小さい）場合は価格があまり上がらず販売量は大きく落ち込むから企業側が大きな影響を受ける。一方，需要の価格弾力性が小さい（需要曲線の傾きが大きい）場合には販売量はあまり減らず価格が上昇するから消費者が大きな影響を受ける。タバコは習慣性の強い財であり，また代替財が少ないと考えられるので需要の価格弾力性は小さいであろう。したがってあまり販売量に影響を与えずに税金を引き上げることができるから，税金をかけやすい財である。

1.9.3　物品税増税の負担

物品税が増税されると企業としては増税分を価格に上乗せして販売しないと利潤が減ってしまう。物品税は企業が政府に納めるので費用と同じである。消費税も同様。従って供給曲線は S_1 から S_2 へ増税分だけ上にシフトする。均衡は需要曲線に沿って E から E′ に変化する。図 1.8 で AE が増税幅の t，BE が価格の上昇 $p' - p$ でそれが消費者の負担，AB がその残り $t - p' + p$ で企業の負担である。その分だけ価格が上昇した以上に税を納めなければならない。

*17 以前と同じ価格であれば供給量は少なくなるので供給曲線が左にシフトするとも言える。
*18 以前と同じ価格であれば供給量は多くなるので供給曲線が右にシフトするとも言える。

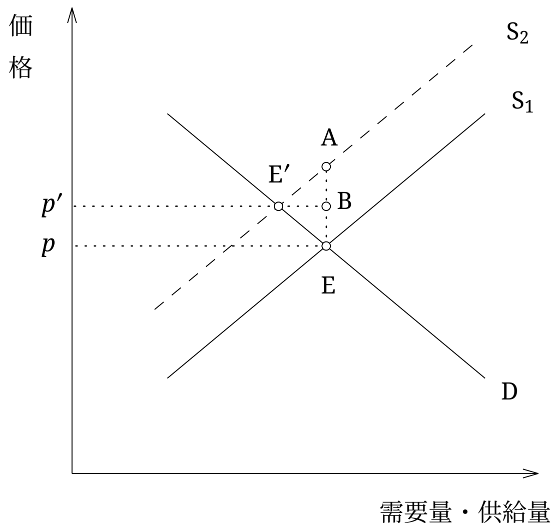


図 1.8　物品税増税の負担 1

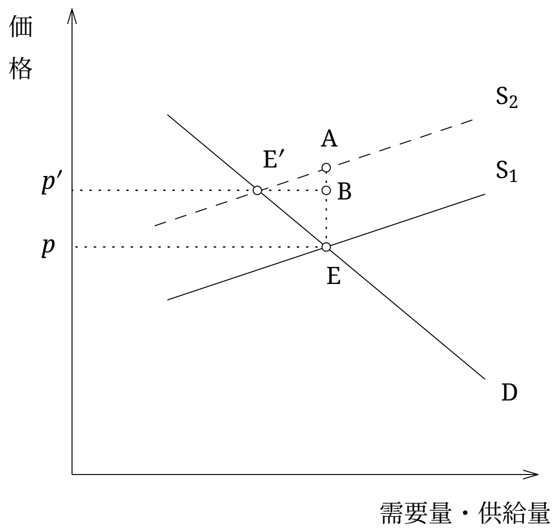


図 1.9　物品税増税の負担 2

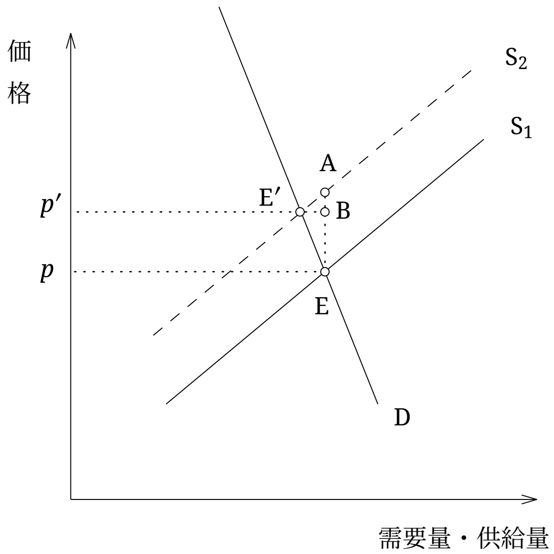


図 1.10　物品税増税の負担 3

図 1.9 には供給曲線の傾きが小さく供給の価格弾力性が大きいケースを描いている*19。この場合は企業の負担が小さく消費者の負担が大きくなる。図 1.10 には需要曲線の傾きが大きく需要の価格弾力性が小さいケースを描いている。これも同様に消費者の負担が大きい。ただし後者の場合は需要・供給量の変化は小さい。逆に供給の価格弾力性が小さいケースや需要の価格弾力性が大きいケースは図 1.11，1.12 のようになる。それらの場合は企業の負担が大きい。

*19 供給曲線や需要曲線が直線になっていて傾きが一定だからと言って供給・需要の価格弾力性が一定ではないが，傾きが小さいときには弾力性が大きく，傾きが大きいときには弾力性は小さい。

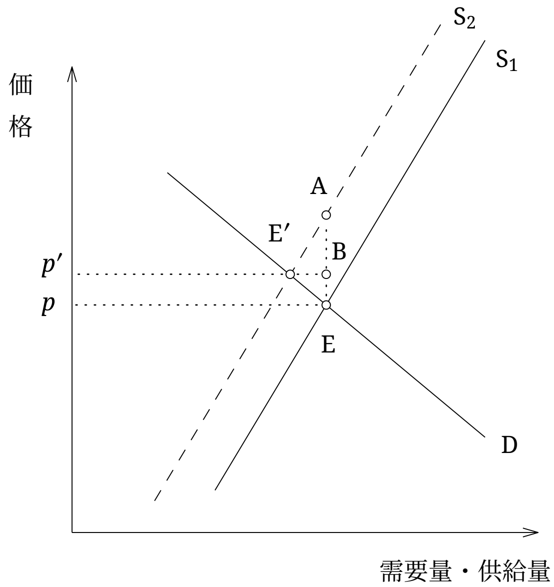


図 1.11　物品税増税の負担 4

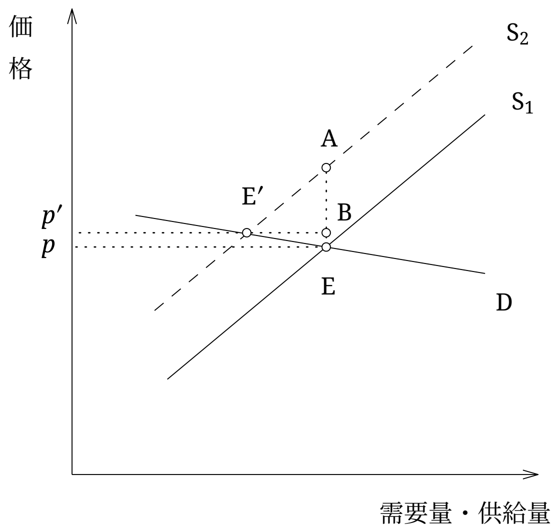


図 1.12　物品税増税の負担 5

■需要・供給の価格弾力性と物品税の負担　ある財に 1 単位当たり t の物品税がかけられ価格が p から p' に上昇し，販売量（つまり需要と供給）が x から x' に変化したとする。$p'-t<p<p'$ と仮定する。$x>x'$ である。t の税の内消費者が負担するのは価格上昇分の $p'-p$ であり，企業が負担するのはその残りの $t-p'+p$ である。その比 $\frac{p'-p}{t-p'+p}$ と需要・供給の価格弾力性との関係を考えよう。需要の価格弾力性を ε，供給の価格弾力性を η とすると

$$\varepsilon=-\frac{\frac{x'-x}{x}}{\frac{p'-p}{p}},\ \eta=\frac{\frac{x'-x}{x}}{\frac{p'-t-p}{p}}$$

となる。η と ε の比を求めると

$$\frac{\eta}{\varepsilon}=-\frac{\frac{p'-p}{p}}{\frac{p'-t-p}{p}}=\frac{p'-p}{t-p'+p}$$

が得られる。これは消費者の負担と企業の負担の比に他ならない。したがって需要の価格弾力性が小さければ消費者の負担が増え，供給の価格弾力性が小さければ企業の負担が増える。

1.10　市場均衡の安定性

　需要曲線と供給曲線との交点で均衡価格および取引量が決まるが，価格や需要・供給量が初めから均衡値になっているというわけではないであろう。もし実際の価格が均衡価格と異なっていたら，あるいは産出量が均衡における取引量と異なっていたらどのようなことが起こるであろうか。均衡とは消費者も企業もその状態に納得していて変化しない状態であるから，逆に価格が均衡価格とは異なっていれば何らかの変化が起きることになる。その変化は価格が均衡価格に近づくような変化なのか，それとも均衡価格から遠ざかるような変化なのであろうか。実はこれは価格や産出量の調整の仕方と需要曲線・供給曲線の位置関係によるのである。

1.10.1　ワルラスの調整過程（ワルラス的調整過程）

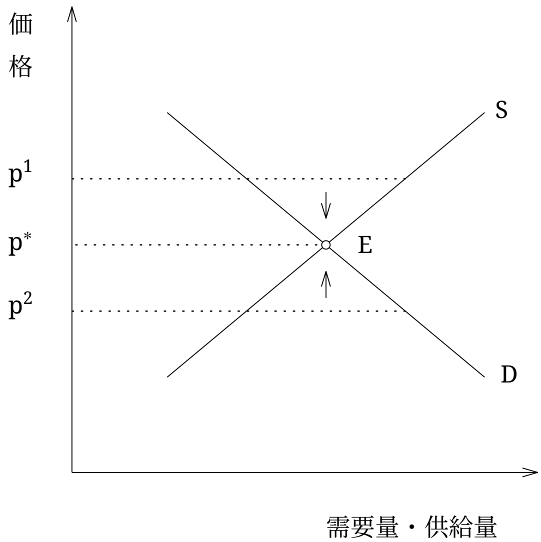


図 1.13　ワルラスの調整過程—安定的なケース

価格が均衡価格でないときに以下のような仕組みで調整されるプロセスをワルラスの調整過程と呼ぶ。

ワルラスの調整過程　均衡価格ではない価格において需要が供給を上回っていれば価格が上昇し，逆に供給が需要を上回っていれば価格が低下する。

需要が供給を上回っているときには**超過需要** (excess demand) が，逆に供給が需要を上回っているときは**超過供給** (excess supply) があると言う[*20]。需要と供給が一致しない価格においては，実際の取り引き量は需要と供給のうちの小さい方となる[*21]。需要が供給より多い場合は満たされない需要が価格を引き上げ，供給が需要より多い場合は売れ残りの存在が価格を押し下げると考えるのである。図 1.13 の p^* が均衡価格であるが，もし何らかの理由で価格が p^* より高い p^1 だったとすると，その価格では供給が需要を上回って

*20 それぞれ需要超過，供給超過の状態であるとも言う。

*21 需要が供給より多い場合，消費者がいくら欲しいと思っても供給がなければ購入することはできないから取り引き量は供給量に等しくなる。逆に供給が需要より多い場合，企業がいくら売りたいと思っても買ってくれる消費者がいなければ売ることができないので取り引き量は需要量に等しい。

いるため図の矢印に示したように価格を押し下げる力が働く。一方価格が p^* より低い p^2 であれば，需要が供給を上回っているため図の矢印に示したように価格を引き上げる力が働く。以上のようなプロセスで図 1.13 の場合には価格は均衡価格に近づいていく。このように均衡を巡る調整過程によって均衡ではない状態から均衡に近づくような動きが生じる場合，その均衡（あるいは調整過程）は**安定（的）**であるという。しかし均衡とその調整過程は安定なものばかりではない。図 1.14 の場合を考えてみよう。この場合は均衡より高い価格 p^1 では需要が供給を上回っており，均衡より低い価格 p^2 では供給が需要を上回っている。すると p^1 では価格は一層高くなり，p^2 ではさらに低くなるような調整が行われ均衡からますます遠ざかる。このような場合均衡は**不安定**であると言う。

一般にワルラスの調整過程のもとで均衡が安定になるのは需要曲線と供給曲線が以下の条件を満たしている場合である。

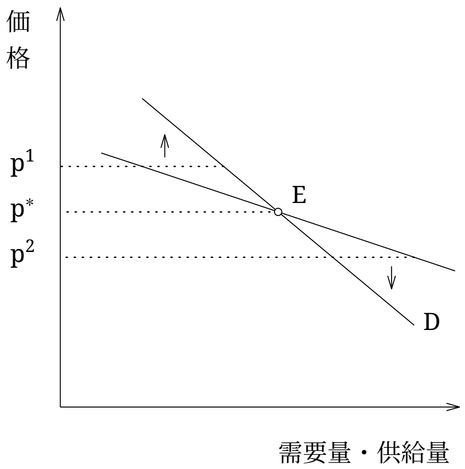


図 1.14　ワルラスの調整過程—不安定なケースの例

ワルラスの調整過程の安定条件　均衡点より上では供給曲線の方が需要曲線より右側にある。逆に均衡点より下では需要曲線の方が供給曲線より右側にある。

均衡点より上とは均衡よりも価格が高いということであるが，そのとき供給曲線の方が需要曲線より右側にあれば供給超過で価格が下がるので均衡に向って変化する。均衡点より下で需要曲線の方が供給曲線より右側にあれば需要超過で価格が上がるからやはり均衡に向って変化する。

1.10.2　マーシャルの調整過程

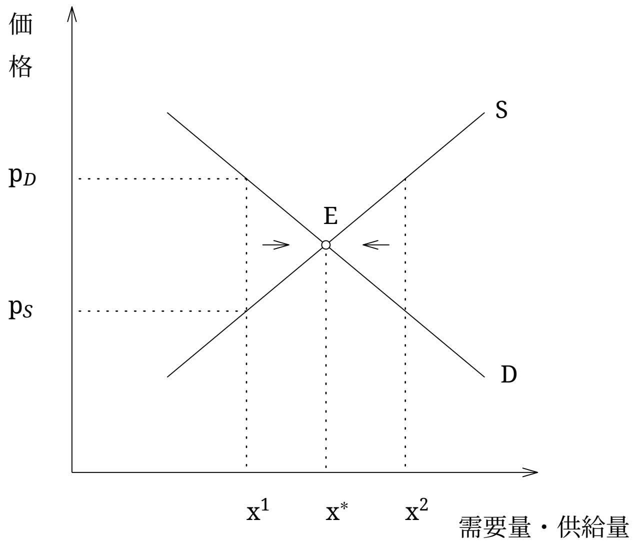


図 1.15　マーシャルの調整過程—安定的なケース

満たされない需要や売れ残りがあってもすぐには価格が変化せず，しばらくそのままの状態が続いた後，産出量が変化するという調整の仕方も考えられる。図 1.15 で産出量が均衡値より少ない x^1 であるとしよう。この産出量については消費者は p_D の価格で買ってもよいと思うのに対し，企業は p_S で売れれば十分であると考える。前者を**需要価格**，後者を**供給価格**と呼ぶ。このとき実際にどのような価格で売れるかはその財の市場の性質や企業の行動の仕方による。電化製品などで定価販売（あるいは一定率での割引販売）が行われている場合には実際の価格は p_S に近くなり満たされない需要は待たされるであろうが，魚や野菜のような市場では需要に対応した p_D に近い価格になるであろう*22。

*22 魚や野菜などの市場で，ある日の価格がどうなるかについてはその日一日の供給量に対応した垂直な供給曲線と需要曲線との交点の価格がワルラスの調整過程によって実現されると見ることもできる。

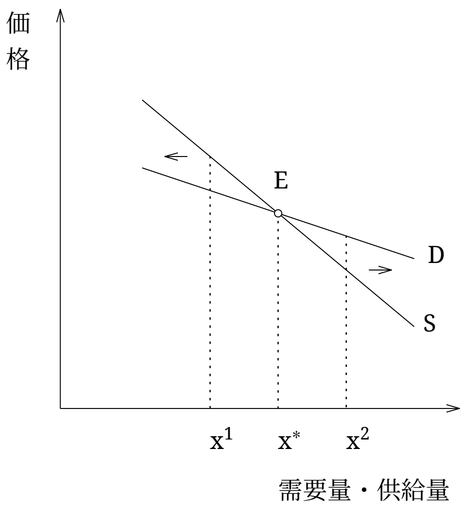


図 1.16　マーシャルの調整過程―不安定なケースの例

ここで次のようなマーシャルの調整過程を考える。

マーシャルの調整過程（マーシャル的調整過程）　需要価格が供給価格を上回っていれば企業は産出量を増やし，供給価格が需要価格を上回っている場合には産出量を減らす。

図 1.15 の x^1 では需要価格が供給価格を上回っている。需要価格が供給価格より高いときには，企業にとっては生産した財が思ったよりも早く売り切れてしまうので，産出量を増やしても採算がとれると思って増産すると考えられる。一方産出量が均衡より多い x^2 においては，供給曲線が需要曲線より上にあるので供給価格が需要価格を上回っている。このような場合企業は，自分が望む価格では売れ残ってしまうので産出量を減らす。そうすると図 1.15 の場合には矢印で示したようにどちらのケースも産出量が均衡値に近づいていくので安定である。図 1.16 の場合はどうであろうか。この図のようなケースでは，均衡より少ない産出量では供給曲線が需要曲線より上にあって供給価格が需要価格を上回っている，一方均衡より多い産出量では需要曲線が供給曲線より上にあって需要価格が供給価格を上回っている。したがって，いずれも産出量は均衡値からさらに遠ざかっていくような動きをすることになり不安定である。

一般に，マーシャルの調整過程のもとで均衡が安定になるのは需要曲線と供給曲線が以下の条件を満たしている場合である。

マーシャルの調整過程の安定条件　均衡点より右では供給曲線の方が需要曲線より上にある。逆に均衡点より左では需要曲線の方が供給曲線より上にある。

均衡点より右においては産出量が均衡より多くなっている。その状態において供給曲線の方が需要曲線より上にあれば，供給価格が需要価格を上回っているので企業は産出量を減らすことになるから均衡に近づいていく。均衡点より左では産出量が均衡より少なくなっている。その状態において需要曲線の方が供給曲線より上にあれば，需要価格が供給価格を上回っているので企業は産出量を増やすことになるからやはり均衡に近づいていく。

ワルラスの調整過程は株式市場や為替市場，魚や野菜の市場などに，マーシャルの調整過程は工業製品などに当てはまると考えられるが，（供給が変化しない）ごく短時間の調整はワルラスの調整過程によって，（供給をある程度変化させられる）いくらか長い時間の調整はマーシャルの調整過程によって表現されると考えることもできる。

1.10.3　くもの巣（蜘蛛の巣）の調整過程

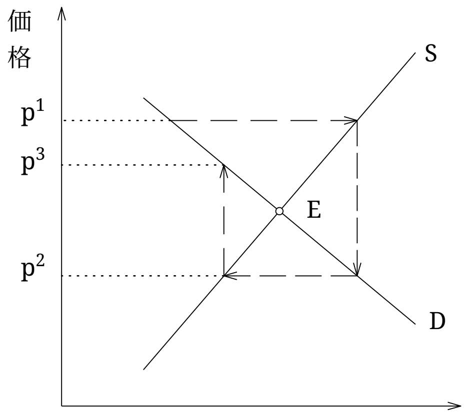


図 1.17　くもの巣の調整過程

農産物などの財は生産者による産出量の意思決定から実際に財が市場に供給されるまでの間にかなりの時間がかかる。そのような財の場合，ある期（財の生産にかかる時間を基準として考えたある時点）に価格が高ければ生産者が次の期も高い価格がつくだろうと思って生産を増やすが，実際に財が市場に供給される時には供給が多くなりすぎて価格が下がってしまう。そこで生産を減らすと次の期には供給が不足して価格が高くなる。そこでまた生産を増やすと供給が多くなって安くなってしまう，というようなことを繰り返す可能性がある。問題はこのようなプロセスを経て価格は均衡価格に接近していくのか，それとも遠ざかっていくのかということである。図 1.17 に示されているのがそのプロセスの一例である。これは価格が均衡価格に接近していくケース，すなわち安定的なケースを

示している。このような調整の仕方は調整経路の図の形にちなんで**くもの巣の調整過程**と呼ばれている。くもの巣の調整過程が安定的であるためには図 1.17 のように，**供給曲線の傾きが需要曲線の傾きに比べて相対的に大きい**，ことが必要である。

くもの巣の調整過程について簡単な数式モデルを考えてみる。需要曲線が

$$p = 36 - x$$

供給曲線が

$$p = 2x$$

であるとする。p は財の価格，x は需要または供給を表す。最初の価格を p_0 とすると次の期の産出量は $x_1 = \frac{1}{2}p_0$，その期の価格は $p_1 = 36 - x_1 = 36 - \frac{1}{2}p_0$ となる。以下同様に $p_2 = 36 - \frac{1}{2}p_1$，$p_3 = 36 - \frac{1}{2}p_2$ と推移し，一般的に $p_n = 36 - \frac{1}{2}p_{n-1}$ と表されるが，この式から

$$p_n - 24 = -\frac{1}{2}(p_{n-1} - 24)$$

が得られる。したがって $p_n - 24$ が公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列となる。$\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$ であるから $p_n - 24$ は 0 に収束し，p_n の極限は 24 であり，そのとき $x = 12$ である。

■部分均衡分析と一般均衡分析　本章での分析のように，（数ある中で）一つの財の市場だけを取り上げ，需要曲線と供給曲線を用いて分析するような手法を部分均衡分析 (partial equilibrium analysis) と呼ぶ。それに対してすべての財の市場を全体として扱う手法は一般均衡分析 (general equilibrium analysis) と呼ばれる。本書では一般均衡分析はあまり扱わないが，第 2 章，第 3 章で市場の効率性を考察する所で用いられるのは一般均衡分析である。

第 2 章

消費者の行動

■この章のキーワード　効用，無差別曲線，限界効用，無差別曲線の凸性，限界代替率，効用関数，予算制約式，予算制約線，効用最大化，下級財，代替効果，所得効果，ギッフェン財，労働サービスの供給，利子率と貯蓄，交換経済，パレート効率性，契約曲線，ラグランジュ乗数法，不確実性，期待効用定理，情報の非対称性，公共財，グローブズメカニズム，マッチング理論

この章では需要曲線を構成するもとになる消費者の合理的な行動について詳細に検討する。消費者の合理的な行動とは**予算の制約のもとで，最も効用が高くなるような消費の仕方を選ぶ**，というように表現することができる。

2.1　効用と無差別曲線

消費者は何らかの目的をもって，あるいは何らかの欲望を満たすために消費をする。食事をするのは栄養をとる，満腹になる，食物を味わうなどの目的のためであろうし，音楽を聴くのはその音楽を楽しむ，気分をリラックスさせる，その曲を憶えてカラオケで歌う，などの欲望を満たすためであろう。消費者が財の消費によって得る満足度あるいは欲望の充足度，すなわちどの程度消費の目的が達成されたかを**効用** (utility) と呼ぶ。これは主観的，抽象的な概念であるが経済学の分析に載せるためには何らかの形で数量化しなければならない。そのためにいくつかの仮定をおく。

まず初めに，消費者にとっては財の消費量は多ければ多いほどよいと仮定する。つまり消費量が多くなればなるほど効用が大きく（あるいは高く）なるということである。この仮定は**選好の単調性**と呼ばれる。**選好**とは，複数の財の消費の仕方（いくつかの財の消費量の組み合わせ）について，ある消費の仕方と別の消費の仕方とを比較してどちらがよいか，すなわち効用が大きいか，それとも両方の効用が等しいかについての消費者の考え方を表すものである。上の仮定はきわめて常識的なものであると思われるが，この仮定には**消費量がいくら多くなってももうよいということがない**という意味も含まれている。つま

り人間の欲望には限りがないということである。これは欲望の**非飽和性**の仮定と呼ばれる。また財は限りなく細分化できる，つまりいくらでも小さい単位で消費することができるものと仮定する。実際には家半分とか，車三分の一とかいう買い方はできないであろうが（複数の人が共同で買って使えばそのような消費をしていると解釈できないこともないが），単純化のためにこの仮定をおく。

まず簡単な例を使って消費者の行動を考えてみよう。

2.1.1 消費者行動理論入門 - ビールと大福の世界

2.1.1.1 効用と限界効用

ある人（消費者）が 1 週間に消費するビールと大福餅の 2 種類の財の量を考える。上で述べたようにビールを飲んだり大福を食べたりしてこの人が得られる満足の度合いが**効用**である。1 本のビールを飲んで得られる効用と比べて，2 本目のビールを飲むことによって得られる効用はいくらか小さく，3 本目・4 本目のビールから得られる効用はさらに小さくなると考えられる。1 本目のビールから得られる効用を基準にそれを 100 として 2 本目，3 本目，$\cdots$ のビールから得られる効用が表 2.1 のように表されるものとする。

> ここでは全体の効用はビールの効用と大福の効用の和であると仮定している。ビール，大福の消費量を x，y，それぞれの効用関数を $u_b(x)$，$u_d(y)$，全体の効用を $u(x,y)$ とすると
>
> $$u(x,y)=u_b(x)+u_d(y)$$
>
> と表される。このとき $u(x,y)$ 全体を 2 倍したり 3 倍したり，半分にしても消費者の行動パターンは変わらないので効用関数としては同じものであると考える。全体を 2 乗，3 乗しても同様。しかし，$u_b(x)$ を 2 倍，$u_d(y)$ を 3 倍したりすると消費者の行動が変わる可能性があり，異なる効用関数になる。このような考え方を「序数的効用」と呼ぶ[*1]。

2 本目のビールの消費から得られる効用 97 をその**限界効用** (marginal utility) と呼ぶ。これは言い換えれば，2 本ビールを飲んで得られる効用 197 から 1 本ビールを飲んで得られる効用 100 を引いたものである。1 本目に比べて 2 本目のビールから得られる効用が小さいので 2 本のビールを飲んで得られる効用は 1 本のビールの効用の 2 倍にはならない。同様に，3 本目のビールの限界効用は 94，4 本目は 91，$\cdots$ となる。限界効用とはもう 1 本ビールを飲んでどのくらい効用が大きくなるかを示すものであり，それまでに何本飲んでいたかによって異なる[*2]。

[*1] 効用関数について詳しくは 2.1.6 節を参照していただきたい。$u_b(x)$ と $u_d(y)$ の積で全体の効用を表すこともできる。もちろんその場合，和で表すのとは異なる効用関数になる。積で表す場合は $u_b(x)$ を 2 倍，$u_d(y)$ を 3 倍しても同じ効用関数である（全体が 6 倍されるだけなので）が，$u_b(x)$ を 2 乗，$u_d(y)$ を 3 乗すると異なるものになる。

[*2] 財の消費量は一定の期間で考えるが，考える期間の長さによって限界効用は異なるかもしれない。たとえば 1 日に飲む 5 本目，6 本目のビールは普通の人にとってさほどうまいものではなく，それらの限界効用はかなり小さくなるであろうが，1 ケ月で考えれば 5 本目，6 本目のビールの限界効用は 1 本目の限界効用とあまり変わらないかもしれない。

1 本目のビールの効用	100	1 本ビールを飲んで得られる効用	100
2 本目のビールの効用	97	2 本ビールを飲んで得られる効用	197
3 本目のビールの効用	94	3 本ビールを飲んで得られる効用	291
4 本目のビールの効用	91	4 本ビールを飲んで得られる効用	382
5 本目のビールの効用	88	5 本ビールを飲んで得られる効用	470
6 本目のビールの効用	85	6 本ビールを飲んで得られる効用	555
7 本目のビールの効用	82	7 本ビールを飲んで得られる効用	637
8 本目のビールの効用	79	8 本ビールを飲んで得られる効用	716
9 本目のビールの効用	76	9 本ビールを飲んで得られる効用	792
10 本目のビールの効用	73	10 本ビールを飲んで得られる効用	865
11 本目のビールの効用	70	11 本ビールを飲んで得られる効用	935
12 本目のビールの効用	67	12 本ビールを飲んで得られる効用	1002
13 本目のビールの効用	64	13 本ビールを飲んで得られる効用	1066
14 本目のビールの効用	61	14 本ビールを飲んで得られる効用	1127

表 2.1　ビールの効用と限界効用

上で述べたように，常識的に考えて一定期間（ここでは 1 週間）に消費するビールの量が増えるにつれてもう 1 本飲むことから得られる効用，すなわち限界効用は徐々に小さくなっていくであろう。これを**限界効用逓減の法則**と呼ぶ。8 本目，9 本目ならまだしも 100 本目，200 本目となると 1 週間にそんなに飲めるか，というわけで効用を得られるどころか苦痛に感じるようになり 1 本余計にビールを飲むことによってかえって効用が下がってしまうようになるかもしれない。その場合には限界効用はマイナスになる。しかしそう考えると取り扱いが面倒になるので，消費量が増えれば増えるほど効用は増えつづける，つまり限界効用はどこまで行ってもプラスであると仮定する。これは先に述べた選好の単調性あるいは欲望の非飽和性の仮定である。現実的ではないかもしれないが，限界効用がマイナスになるような大量の消費は考えないということにして上記のように仮定する。

同じようにして，1 本目のビールから得られる効用を 100 として大福の消費から得られる効用が表 2.2 のように表されるものとする。

これらの表はあくまでもある一人の消費者の例を示しているものである。大福が特に好きな人なら 1 個目の大福の効用が 49 ではなく 120 になるかもしれない。表 2.1，表 2.2 に示されたビールと大福の効用はその消費者の好み（選好 (preference)）を表している。この消費者を消費者 A と名づける。

1 個目の大福の効用	49	1 個大福を食べて得られる効用	49
2 個目の大福の効用	47	2 個大福を食べて得られる効用	96
3 個目の大福の効用	45	3 個大福を食べて得られる効用	141
4 個目の大福の効用	43	4 個大福を食べて得られる効用	184
5 個目の大福の効用	41	5 個大福を食べて得られる効用	225
6 個目の大福の効用	39	6 個大福を食べて得られる効用	264
7 個目の大福の効用	37	7 個大福を食べて得られる効用	301
8 個目の大福の効用	35	8 個大福を食べて得られる効用	336
9 個目の大福の効用	33	9 個大福を食べて得られる効用	369
10 個目の大福の効用	31	10 個大福を食べて得られる効用	400
11 個目の大福の効用	29	11 個大福を食べて得られる効用	429
12 個目の大福の効用	27	12 個大福を食べて得られる効用	456
13 個目の大福の効用	25	13 個大福を食べて得られる効用	481
14 個目の大福の効用	23	14 個大福を食べて得られる効用	504

表 2.2　大福の効用と限界効用

2.1.1.2　予算の制約と効用最大化

上で述べた消費者 A が 1 週間に 3000 円の所得を得てビールと大福を買って消費するとき，最も効用が大きくなる消費の仕方，つまりビールと大福への予算の配分について考えてみよう。今，ビール 1 本の価格が 200 円，大福 1 個の価格が 100 円であるとする。ビールの消費量を x で，大福の消費量を y で表すと次のような式が得られる。

$$200x + 100y = 3000$$

この式は**予算制約式**と呼ばれる。3000 円の範囲内でできるだけ効用を大きくしたいと考えるから予算はすべて使った方がよいので予算制約式は不等式ではなく等式になる。

ビールの消費量が 8 から 13 までのケースについて大福の消費量とこの消費者の効用を求めると表 2.3 が得られる。

これ以外のケースも同様にして求められる。この表でビールの消費量が 8 の場合の『ビールの限界効用と価格の比』とは，表 2.1 の 8 本目のビールの効用 79 をビールの価格 200 で割った値を指し，大福の消費量が 14 の場合の『大福の限界効用と価格の比』とは，表 2.2 の 14 個目の大福の効用 23 を大福の価格 100 で割った値を指している。他のケースも同様である。この表からビールが 11 本で大福が 8 個の場合が最も効用が大きいことがわかる。そのとき各財の限界効用と価格の比が以下の関係を満たしている。「価格の比」は「相対価格」とも呼ばれる。

ビールの消費量	大福の消費量	効用	ビールの限界効用と価格の比	大福の限界効用と価格の比
8	14	1220	0.395	0.23
9	12	1248	0.38	0.27
10	10	1265	0.365	0.31
11	8	1271	0.35	0.35
12	6	1266	0.335	0.39
13	4	1240	0.32	0.43

表 2.3　効用最大化

> 効用が最大となる消費量の組み合わせ（ビールの消費量と大福の消費量の組み合わせ）においては，『ビールの限界効用と価格の比』が『大福の限界効用と価格の比』に等しい。すなわち
>
> $$\frac{\text{ビールの限界効用}}{\text{ビールの価格}} = \frac{\text{大福の限界効用}}{\text{大福の価格}}$$
>
> が成り立つ。この式は
>
> $$\frac{\text{ビールの限界効用}}{\text{大福の限界効用}} = \frac{\text{ビールの価格}}{\text{大福の価格}}$$
>
> と書き直すことができるので，効用が最大となる消費量の組み合わせにおいては『ビールの限界効用と大福の限界効用の比』は『ビールの価格と大福の価格の比』に等しい。

ここで

$$\frac{\text{ビールの限界効用}}{\text{大福の限界効用}} = \text{ビールの大福に対する限界代替率}$$

と呼ぶことにすると，上の条件は

> 効用が最大となる消費量の組み合わせにおいては，ビールの大福に対する限界代替率はビールと大福の価格の比に等しい。

と表現される。

このように消費者は，各財の価格と自分の所得（あるいは予算）との関係を考えながら，各財の消費量のバランスを図って消費をしている。

上で述べた条件をちょうど満たす消費量の組み合わせが存在しなければ，その前後すなわち『ビールの限界効用と価格の比』と『大福の限界効用と価格の比』との大きさの関係が入れ替わる前後の二つの消費量の組み合わせのうちのいずれか（あるいは両方）が，効用を最大にする消費量の組み合わせになる。その例を考えてみよう。別のある消費者（消

費者 B と呼ぶ）がいて，ビールから得る効用は表 2.1 と同じであるが，大福から得る効用は表 2.2 に替えて表 2.4 のようであるとする。

1 個目の大福の効用	50	1 個大福を食べて得られる効用	50
2 個目の大福の効用	48	2 個大福を食べて得られる効用	98
3 個目の大福の効用	46	3 個大福を食べて得られる効用	144
4 個目の大福の効用	44	4 個大福を食べて得られる効用	188
5 個目の大福の効用	42	5 個大福を食べて得られる効用	230
6 個目の大福の効用	40	6 個大福を食べて得られる効用	270
7 個目の大福の効用	36	7 個大福を食べて得られる効用	306
8 個目の大福の効用	32	8 個大福を食べて得られる効用	338
9 個目の大福の効用	28	9 個大福を食べて得られる効用	366
10 個目の大福の効用	24	10 個大福を食べて得られる効用	390
11 個目の大福の効用	20	11 個大福を食べて得られる効用	410
12 個目の大福の効用	16	12 個大福を食べて得られる効用	426
13 個目の大福の効用	12	13 個大福を食べて得られる効用	438
14 個目の大福の効用	8	14 個大福を食べて得られる効用	446

表 2.4　大福の効用と限界効用（消費者 B）

この消費者 B が消費者 A と同じ予算制約式

$$200x + 100y = 3000$$

のもとで効用が最大になるようにビールの消費量 x と大福の消費量 y を決める。消費者 A の場合と同様にビールの消費量が 8 から 13 までのケースについて大福の消費量と消費者 B の効用を求めると表 2.5 が得られる。

ビールの消費量	大福の消費量	効用	ビールの限界効用と価格の比	大福の限界効用と価格の比
8	14	1162	0.395	0.08
9	12	1218	0.38	0.16
10	10	1255	0.365	0.24
11	8	1273	0.35	0.32
12	6	1272	0.335	0.4
13	4	1254	0.32	0.44

表 2.5　効用最大化（消費者 B）

この表から，消費者 A の場合と同じくビールが 11 本で大福が 8 個の場合が最も効用が大きいことがわかるが，そのときビールの限界効用と価格の比は大福の限界効用と価格の比に等しくはなく，大福の限界効用と価格の比の方が大きい。このようなケースでは，ビールの限界効用と価格の比の方が大きい最大のビール消費量 11（大福の消費量 8）の場合と，大福の限界効用と価格の比の方が大きい最大の大福消費量 6（ビールの消費量 12）の場合とのいずれか（あるいは両方）が効用が最大となる消費量の組み合わせであるが，この例ではビールが 11 本で大福が 8 個の場合の効用の方がわずかではあるが大きい。

2.1.1.3　所得の変化と消費

消費者 A の例にもどって所得が 3000 円から 3300 円に増えたと仮定し，そのときの消費の変化を考えてみよう。予算制約式は

$$200x + 100y = 3300$$

となる。ビールの消費量が 10 から 13 までのケースについて大福の消費量とこの消費者の効用を求めると表 2.6 が得られる。この表からビールの消費量が 12 で大福の消費量が 9 のときが最も効用が大きいことがわかる。所得が 3000 円の場合の表 2.3 と比べるとビール，大福ともに 1 ずつ消費量が増え効用も大きくなっている。このように所得の増加によって財の消費量が増える場合，その財は**上級財** (superior good)，あるいは**正常財** (normal good) と呼ばれる。

ビールの消費量	大福の消費量	効用	ビールの限界効用と価格の比	大福の限界効用と価格の比
10	13	1346	0.365	0.25
11	11	1364	0.35	0.29
12	9	1371	0.335	0.33
13	7	1367	0.32	0.37
14	5	1352	0.305	0.41

表 2.6　所得の増加と消費

次に消費者 B について所得が 3000 円から 3300 円に増えた場合を考えてみよう。やはりビールの消費量が 10 から 14 までのケースについて大福の消費量とこの消費者の効用を求めると表 2.7 が得られる。この表からビールの消費量が 13 で大福の消費量が 7 のときが最も効用が大きいことがわかる。所得が 3000 円の場合の表 2.5 と比べるとビールの消費量は 2 増えているが大福の消費量は逆に 8 から 7 に減ってしまう。しかし効用は大きくなっている。このケースの大福のように所得の増加によって財の消費量が減る場合，その財は**下級財**あるいは**劣等財** (inferior good) と呼ばれる。消費者 B についてもビールは上級財である。

ビールの消費量	大福の消費量	効用	ビールの限界効用と価格の比	大福の限界効用と価格の比
10	13	1303	0.365	0.12
11	11	1345	0.35	0.2
12	9	1368	0.335	0.28
13	7	1372	0.32	0.36
14	5	1357	0.305	0.42

表 2.7　所得の増加と消費（消費者 B）

2.1.2　選好順序

ここからはやや一般的な議論になる。

二つの財 X，Y があるとする。ある消費者のそれらの財の消費量を，X が 2 単位，Y が 1 単位のときは (2,1) というように (X,Y) で表す。具体的に X をパン，Y を卵としよう。そうすると (2,1) は，たとえばパン 2 枚，卵 1 個を表す*3。上で述べた選好の単調性の仮定から (2,2) と (1,1) とでは (2,2) の方が，また (3,2) と (2,2) とでは (3,2) の方がすべての消費者にとってより望ましい，すなわち効用が大きい（あるいは高い）のは明らかだが，(3,2) と (2,3) とではどちらが望ましいか，また (4,4) と (3,5) とではどちらが望ましいかは明らかではなく各消費者の好みによる。消費者によっては (3,2) の方が (2,3) より望ましいと思ったり，逆に (2,3) の方が (3,2) より望ましいと思うかもしれない。また中にはこの二つは自分にとっては同じ程度に望ましい，すなわち効用が等しいと思う消費者がいるかもしれない。そのような消費者は (3,2) と (2,3) について**無差別** (indifferent) である（あるいは，この消費者にとって (3,2) と (2,3) が無差別である）と言う。このようにしてそれぞれの消費者は 2 財，パンと卵，のあらゆる消費量の組み合わせについてどちらがよいか，または無差別かの判断ができるものとする*4。さらにその判断が合理的なものとなるよう以下のような条件を与える。

推移性の仮定　$(4,2)$ は $(2,3)$ より望ましく（望ましいかまたは無差別で），$(2,3)$ は $(1,5)$ より望ましいかまたは無差別（望ましい）ならば $(4,2)$ は $(1,5)$ より望ましい。

また，$(4,2)$ と $(2,3)$ が無差別で，$(2,3)$ と $(1,5)$ が無差別ならば $(4,2)$ と $(1,5)$ は無差別である。たとえばパンと卵の 2 財について，パン 4 枚と卵 2 個の組み合わせがパン 2 枚と卵 3 個の組み合わせより望ましく，またパン 2 枚と卵 3 個の組み合わ

*3 単位は適当にとればよいので，パン 20g に卵 100g を表すと考えてもよい。単位を変えればある数字の組み合わせが意味する各財の消費量は異なったものとなるので，以下で述べる選好順序も異なる可能性がある。

*4 この仮定は選好の完備性 (completeness) と呼ばれる。

せがパン 1 枚と卵 5 個の組み合わせより望ましいならば，パン 4 枚と卵 2 個はパン 1 枚と卵 5 個より望ましい。

$(4,2)$ や $(2,3)$ に他の数字を入れても同様である。

これは消費者の判断に矛盾がなく首尾一貫したものであるということを求める仮定である。この条件のもとで，各消費者はすべての消費量の組み合わせに順序をつけることができる。$(4,2)$ が $(2,3)$ より望ましく $(2,3)$ が $(1,5)$ より望ましい場合には,

1. (4,2)
2. (2,3)
3. (1,5)

という順序づけができる。これに他の組み合わせが加わればそれぞれの組み合わせとの関係を考えればよい。互いに無差別な組み合わせは同じ順序になる。推移性の仮定が満たされず，もし『$(4,2)$ が $(2,3)$ より望ましく，$(2,3)$ は $(1,5)$ より望ましいが，$(1,5)$ が $(4,2)$ より望ましい』というようなことになるとこの三つの組み合わせがジャンケンのグー，チョキ，パーのような関係になり順序をつけることができない。

このようにして定められる順序を**選好順序**と呼ぶ。選好順序は 2 財のケースに限らず何財あっても定義できる[*5]。

[*5] たとえばパン，卵，コーヒーの 3 財の消費量の組み合わせの比較を考えればよい。その場合消費量の組み合わせは $(1,3,2)$ のように表され，図形としては空間内の点に対応する。

2.1.3　無差別曲線

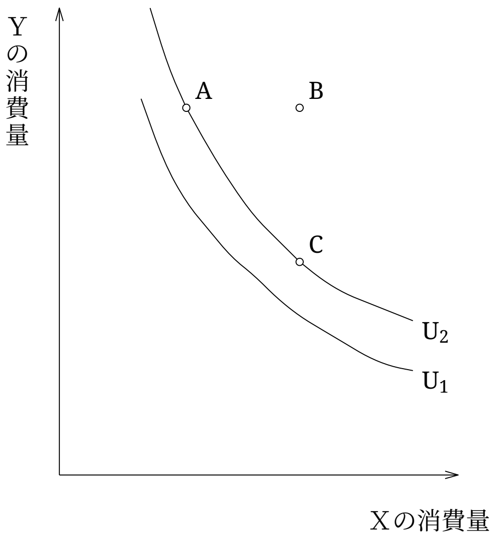


図 2.1　無差別曲線

2 種類の財を X 財と Y 財として，それらの消費量の組み合わせ (X, Y) を，横軸に X 財の消費量，縦軸に Y 財の消費量をとってグラフ上の点で表すことができる。(X, Y) はその点の座標である。

上で説明した 2 財の場合の選好順序を図に表したものが**無差別曲線** (indifference curve) である。図 2.1 に 2 財を X，Y としたときの無差別曲線が描かれている。無差別曲線とは，ある消費量の組み合わせと，それと効用が等しい（無差別な）すべての組み合わせとを曲線で結んで描かれたものである。(3,2) と (2,3) が無差別であると思う消費者の無差別曲線はその両点を通る。(3,2) の方が (2,3) より望ましいと思う消費者については，その消費者が Y（先の例では卵）をあまり好まない消費者であっても，Y の量が多ければ，(2,10) ならば (3,2) より望ましいというような組み合わせがあるであろう。とすれば，(2,3) と (2,10) との間に (3,2) と無差別な点（組み合わせ）を見つけられるはずであり，その消費者の無差別曲線は (3,2) とその点を通る。(2,3) を (3,2) より好む消費者については，X（先の例ではパン）をあまり好まないとしても，それが生活に欠かせないものであれば，X の量が少なくなると，(0.1,3) ならば (3,2) の方がより望ましいという点があるであろう。そうすると (2,3) と (0.1,3) の間に (3,2) と無差別な点を見つけて無差別曲線を描くことができる。(3,2) に限らず消費量の組み合わせを表すあらゆる点について，それと無差別な点を結ぶ無差別曲線を描くことができる。

図では点 A（または C）と無差別な点が無差別曲線 U$_2$ によって表されている。

無差別曲線は次のような性質をもつ。

1. 無差別曲線は右下がりである。
   図 2.1 の点 B は点 A より X の量が多く Y の量は A と等しい消費の組み合わせを示しているから，明らかに点 B の方が点 A より効用が高い。したがって点 A と等しい効用を与え，X の消費量が点 B と等しいような組み合わせは，Y の消費量が点 A よりも少ない点 C のような組み合わせでなければならない。すなわち，点 A と無差別な点 C は A よりも右下に位置しなければならないので無差別曲線は右下がりとなる。
2. 無差別曲線には幅がない。
   図 2.1 の点 A よりほんの少し右側の点が表す組み合わせも，ほんの少し上の点が表す組み合わせも点 A よりわずかではあっても明らかに大きな効用を与えるものでなければならない。したがってそれらの点は点 A と同じ無差別曲線上にあることはできないので，無差別曲線は幅のない曲線である。
   以上は選好の単調性から導かれる性質であるが，さらに選好順序の推移性の仮定によって無差別曲線は次の性質をもつ。
3. 2 本の無差別曲線は互いに交わらない。

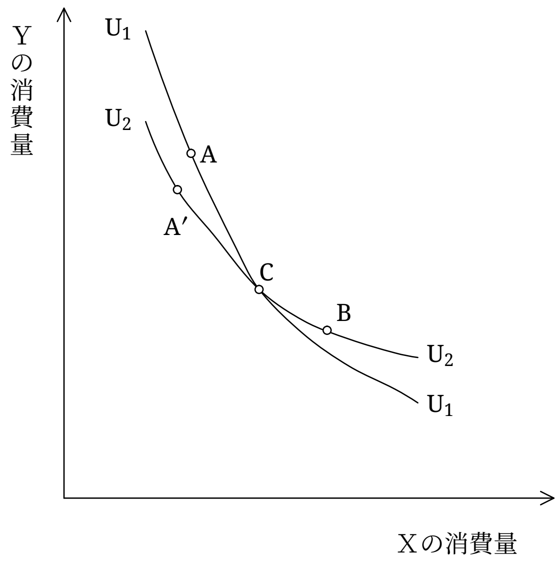


図 2.2　互いに交わる無差別曲線

もし交わったらどうなるかを考えてみよう。図 2.2 において，点 A と点 C が無差別で点 C と点 B が無差別であるから，推移性の仮定により点 A と点 B も無差別でなければならない。一方点 A′ と点 B は同じ無差別曲線上にあるので無差別であるから，やはり推移性の仮定により点 A と点 A′ が無差別ということになってしまう。

しかし，点 A′ は点 A の左下にあるから X の消費量も Y の消費量も A より少なく，したがって効用が低いから矛盾する。このようなことになったのは二つの無差別曲線が交わっていたからである。

無差別曲線は X-Y 平面上のある点を通る曲線として，いくつも，正確には無数に描くことができる。より右上に位置する無差別曲線は左下の無差別曲線よりも大きい効用水準に対応している。

無差別曲線は地図に描かれている等高線（標高が等しい地点を結んだ線）と似ている。というより無差別曲線は（標高の代わりに）二つの財の消費量の組み合わせから得られる効用の大きさが等しい点を結んだ等高線に他ならない。山の頂上（頂点）の回りに円を描くように閉じた曲線になっている地図上の等高線と違って，（単調性の仮定によって）消費量が多ければ多いほど効用が大きくなるので無差別曲線には頂点がなく，また常に右下がりになっているので閉じてはいない。

2.1.4　無差別曲線の凸性

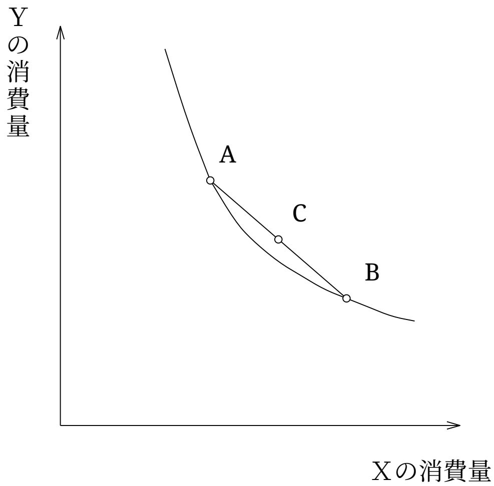


図 2.3　無差別曲線の凸性

もう一つ通常仮定される無差別曲線の性質がある。図 2.1 や図 2.3 に描かれている無差別曲線は原点に向かって出っ張っているような形をしている。このような形を**原点に対して凸（とつ）**(convex) であると言い，この性質を**無差別曲線の凸性**と言う。無差別曲線の凸性が意味することは，**消費者は 2 財のどちらかに偏った組み合わせより両方バランスのとれた組み合わせの方を好む**，ということである。図 2.3 で点 A と点 B は無差別であるがその中間にある点 C は点 A と点 B を通る無差別曲線より上にあるから両点より効用が大

きい，すなわち消費者は点 A や点 B よりも点 C の方を好むということを意味している。

朝食にパンを食べてコーヒーを飲むとして，今日はパン 2 枚だけ食べ，明日はパンは食べずにコーヒーを 2 杯飲むよりも，二日ともパンを食べながらコーヒーを飲む方がよいというようなものである。だが，この凸性が満たされないと考えられるケースもある。日本酒とウィスキーを飲むのに，一度に両方を飲むより日本酒だけとかウィスキーだけを飲んだ方がよいと思う人は多いであろう。しかしこの場合にも 1 日の消費量ではなく 1 週間とか 1 ヶ月の消費量で考えると，両方消費した方がよいということになるかもしれない。凸性が満たされない場合には 2 財のうちの 1 財だけを消費することが消費者にとって望ましいことになるので財の消費量の選択が問題にならない。以下の議論では凸性を仮定して分析を進める。

なお無差別曲線は個々の消費者の選好順序すなわち好みを表現したものであるから，その形は消費者一人一人異なっている。

2.1.5　限界代替率

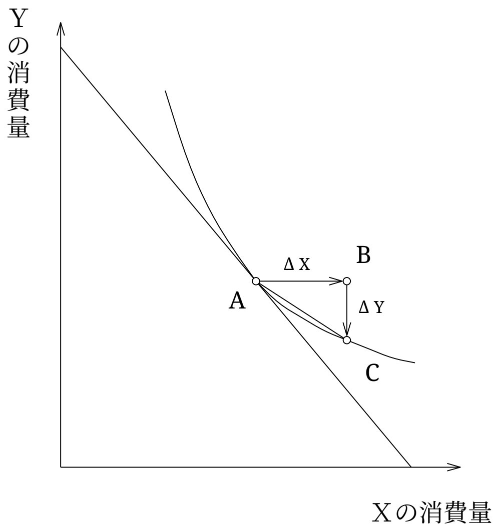


図 2.4　限界代替率

無差別曲線の凸性に関連した概念として**限界代替率** (marginal rate of substitution) がある。図 2.4 で Δ X（デルタ X と読む）と Δ Y はそれぞれ A と B，B と C を結ぶ線分の長さであり，Δ X は点 A と C との X 財の消費量の差を，Δ Y は点 A と C との Y 財の消費量の差を表している。無差別曲線上の 2 点 A と C を結ぶ線分の傾きの大きさは

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} \tag{2.1}$$

で表される。点 C は A と同じ無差別曲線上にあるので効用が等しいが，C は A に比べて X がより多く Y が少ない消費の組み合わせになっている。A より Δ X だけ X が多い点 B の組み合わせは A より高い効用を与える組み合わせであるが，B から Y を Δ Y だけ少なくすると A と効用が等しい点 C に至る。したがって，A，C の 2 点間では『Δ X だけの X の増加による効用の上昇』と，『Δ Y だけの Y の減少による効用の低下』が等しくなっている。(2.1) を点 AC 間での限界代替率と呼ぶ。これはこの無差別曲線を持つ消費者にとっての，**追加的な X 財 1 単位の追加的な Y 財に対する相対的な価値**，を表していると見ることができる。点 C を A に近づけていくと限界代替率は点 A における無差別曲線の接線の傾き（の大きさ）に近づいていく。この点 A における無差別曲線の接線の傾き（の大きさ）を**点 A における限界代替率**と呼ぶ。無差別曲線が原点に向かって凸である場合，X の増加に伴って，すなわち無差別曲線上を右下に向かって移動すると接線の傾きは小さくなる。したがって X の増加に伴って限界代替率は小さくなる。このことを**限界代替率逓減の法則**と呼ぶ。これは X の消費量が増えると Y に対する X の希少性が薄れ，消費者にとって X の Y に対する相対的な価値が低下するということであり，現実にかなった仮定であろう。このように限界代替率逓減の法則は無差別曲線の凸性と同じ条件である。

2.1.6　効用関数

各無差別曲線に対応する効用に数値を割り当てて関数化したものが**効用関数** (utility function) である。より上の無差別曲線にはより大きな効用の値を割り当てる。X，Y の 2 財があり，それぞれの消費量を x, y で表すと効用関数は

$$U = u(x, y)$$

のように表現される。具体的な効用関数の作り方には以下のような方法がある。X 財，Y 財の消費量を示すある点を通る無差別曲線を考える。その無差別曲線が傾き 1 の直線と交わる点（その点においては X 財と Y 財の消費量が等しい）をとり，原点とその点との距離（あるいはその距離の何倍か，何乗かの値）をその無差別曲線の各点が示す消費が与える効用の大きさとする。

無差別曲線は効用が等しい点を結んだものであるからその方程式は

$$u(x, y) = \bar{U},\ \ \bar{U}\text{は定数}$$

で表される。消費者の選好は順序関係だけを問題にしているので効用に数値を割り当てるとは言ってもその大きさそのものには意味がなく，さまざまな消費量の組み合わせについてどれがどれより効用が大きいか小さいかという相対的な関係だけを表している。ある組み合わせの効用が別の組み合わせの効用よりどの程度あるいは何倍大きいか小さいかということは問題にならない。

$$xy = a,\ \ a\text{ は定数}$$

という方程式で表される無差別曲線を考えると，それに対応する効用関数は $U = xy$ でも $U = 3xy$ でも $U = x^2y^2$ でもよい。すべて同じ無差別曲線を与えるものであり同一の選好順序を表す。このように選好順序だけを問題にする効用の考え方を**序数的効用**と呼ぶ。一方効用の大きさも問題にするような効用の考え方は**基数的効用**と呼ばれるが，現在では序数的効用の考え方が主流である。

2.2　効用最大化

2.2.1　予算制約式・予算制約線

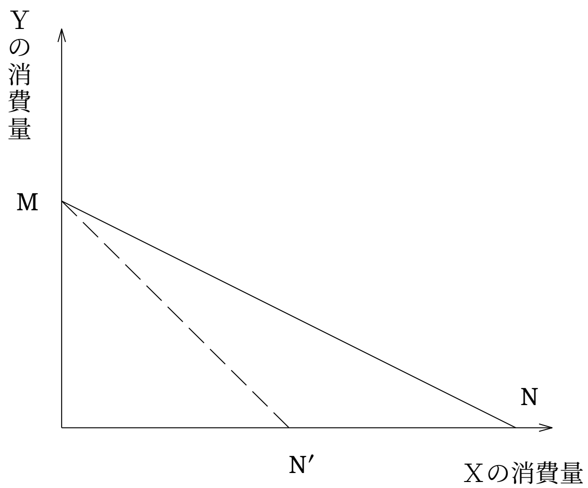


図 2.5　予算制約線

消費者は自らの予算の制約のもとで行動を決めなければならない。予算の制約は式と図で表される。1 万円の所得を得て 1 単位の価格 100 円の X 財と価格 200 円の Y 財を購入するとすると，予算の制約を表す式は

$$100x + 200y = 10000$$

となる。この式を**予算制約式**と呼ぶ。X と Y の消費量はそれぞれ x, y で表されている。予算を全部使う必要はないので予算制約式は厳密には不等式で表されるべきであるが，1 回限りの消費を考えると選好の単調性の仮定から予算を残すよりも全部使って消費量を増やした方がよいので等式になる。一般的には所得を m，X と Y の価格を p_x, p_y で表すと，予算制約式は

$$p_x x + p_y y = m$$

と書き表される。これを図に描いたのが図 2.5 の直線 MN である。この直線を**予算制約線**と呼ぶ。N の座標は $(m/p_x, 0)$（上の例では (100,0)），M の座標は $(0, m/p_y)$（上の例では (0,50)）である。点 M は所得全額を Y に使った場合にいくら買えるかを，点 N は所得全額を X に使った場合にいくら買えるかを表している。予算制約線の直線としての傾きは $-p_x/p_y$ であるが，その大きさは『X 財の Y 財に対する相対価格』に等しい。X 財の Y 財に対する相対価格とは，X 財 1 単位と交換に Y 財を何単位手に入れることができるかを意味する。

X 財の価格 p_x が高くなると予算制約線は図の MN′ のように変化する。予算制約線が内側に回転するのは X 財の価格が高くなることによって同じ予算で買える X の量が少なくなるからである。

2.2.2　消費者の選択・効用最大化

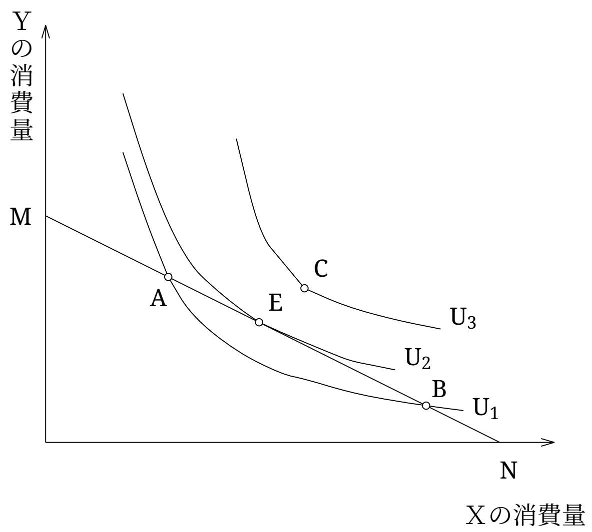


図 2.6　消費者の選択

消費者は予算制約のもとで効用が最大となるように財の消費量の組み合わせを選択するのであるが，その選択を無差別曲線と予算制約線とを用いて図で表すことができる。消費者は予算制約線 MN 上の点が示す消費量の組み合わせしか選択できない。その中で最も効用が高いものあるいは最も選好順序が上位にある組み合わせを選択する。たとえば図 2.6 の点 A，B は選択可能な消費量の組み合わせの例を示しているが，これらは最大の効用を与える点ではない。なぜならば予算制約線上で点 A より少し右下の点（図には描いていないが）を考えるとそれは点 A と点 B を通る無差別曲線より上にあるので点 A より大きい効用を与える，同様に点 B より少し左上の点も点 A と点 B を通る無差別曲線より上

にあり，点 B よりも，また点 A よりも大きい効用を与える。このように考えると予算制約線上で最も大きい効用を与える点は，予算制約線の上でその点の右下の点も左上の点もその点を通る無差別曲線より下にある点ということになる。それは予算制約線と無差別曲線とが接する点 E である。点 E より右下の点も左上の点も，点 E を通る無差別曲線より下にあり効用は小さい。またこの点より効用が大きい点，図の点 C などは予算制約線よりも上にあり実現不可能な（この消費者の所得では買えない）消費の組み合わせである*6。

先に述べたように無差別曲線の接線の傾きは消費者にとっての X と Y との相対的な価値を表し限界代替率と呼ばれる*7。一方予算制約線の傾きは X 財の Y 財に対する相対価格である。したがって効用最大化が予算制約線と無差別曲線が接する点で達成されるということは，その点において

$$\text{限界代替率} = \text{相対価格} \tag{2.2}$$

という関係が成り立っていることになる。これは効用最大化の条件が，**消費者の 2 財に対する評価と市場の評価（相対価格）が一致することである**，ということを意味している。これらはたまたま一致するのではない。もし

$$\text{限界代替率} > \text{相対価格}$$

であれば（これは図 2.6 の点 A の状況である），X の消費量が少なすぎることを意味しているので，（X の消費量の増加とともに限界代替率は小さくなるから）X を増やして Y を減らすことによって限界代替率が引き下げられる（A から E へ向かっての変化）。逆に

$$\text{限界代替率} < \text{相対価格}$$

の場合には（これは図 2.6 の点 B の状況である），X の消費量が多すぎるので X を減らして Y を増やすことによって限界代替率が引き上げられる（B から E へ向かっての変化）。

---

*6 無差別曲線を地図の等高線，予算制約線を山の中腹を通る一本の道になぞらえて考えれば，ある道に沿って山を登って行ったときにその道の中で最も高い地点を求めることと同じ論理である。道と 1 つの等高線が交わっていれば道はその等高線よりも高く上って行くが，道と等高線が接している場合にはどちら向きに歩いても下がって行くのでその接点が最も高い地点である。

*7 限界代替率は無差別曲線の接線の傾きであるとともに限界効用の比にも等しい。簡単な計算で確認すると，効用関数 $u(x, y) = \text{定数}$ として x，y の変化の関係を考えると

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = 0$$

となる。$\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$ はそれぞれ限界効用を表す。この式から

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}}$$

が得られる。$\frac{dy}{dx}$ は無差別曲線の接線の傾きであるから，その大きさが限界効用の比に等しいことがわかる。

このようにして

$$限界代替率 = 相対価格$$

の関係が実現される。

2.3　所得の変化と消費

2.3.1　所得変化の効果

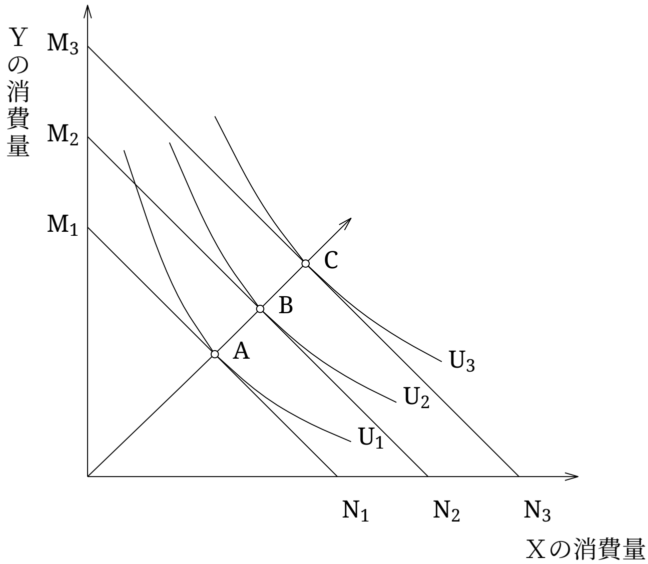


図 2.7　所得の変化と消費

図 2.7 参照。所得が変化すると消費量の選択はどのような影響を受けるだろうか。各財の価格が変化せず所得だけが増加すると，購入可能な財の量が増えるので予算制約線は（傾きは変わらず）上に向かって平行に移動する。図の M_1N_1，M_2N_2，M_3N_3 は上にいくほどより大きな所得に対応している。それぞれの予算制約線は点 A，B，C で無差別曲線 U_1，U_2，U_3 に接しているが，各点はそれぞれの所得のときの最適な消費量の組み合わせを示している。点 A，B，C を結ぶ曲線は**所得消費曲線**と呼ばれる。この図では所得消費曲線は右上がりになっている。これは所得の増加とともに X 財の消費量も，Y 財の消費量もともに増加するということである。このような場合 X 財，Y 財は**上級財**（あるいは正常財）と呼ばれる。

2.3.2 下級財のケース

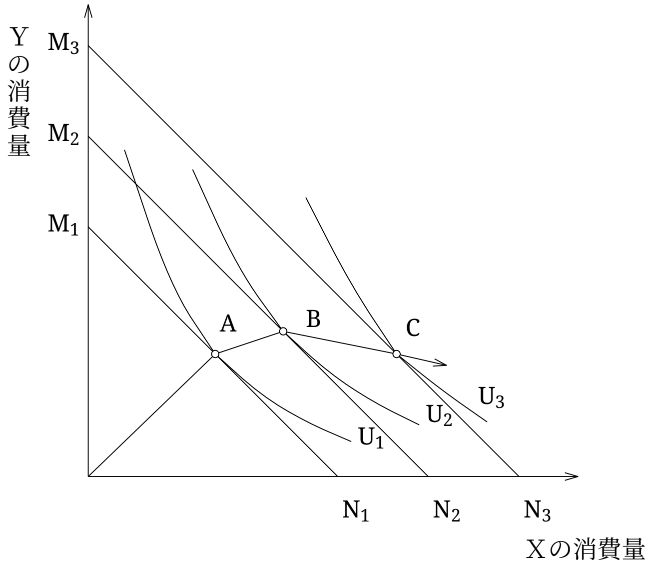


図 2.8 所得の変化と消費——下級財

所得が増加した場合にすべての財の消費量が減ることはありえない（そうすると予算が余ってしまう）が，すべての財の消費量が増えるとは限らない。財によっては所得の増加に伴って消費量が減少することも起こりうる。図 2.8 のようなケースでは所得が M_1N_1 から M_2N_2 に増加するときには X 財，Y 財ともに消費量が増えているが，M_2N_2 から M_3N_3 に増加するときには X の消費量は増えるが，Y の消費量は減少している。このケースの Y 財のように所得の増加によって消費量が減少する財は**下級財**（あるいは劣等財）と呼ばれる。下級財の例としてはマーガリンがよく取り上げられる。所得が少ない間は安いマーガリンを買うが，所得が多くなるとバターを買うようになりマーガリンの消費が減るというわけである。複数の財があって，それらは同様の目的に使われるが価格や品質に差のある場合，価格・品質の低い方の財が下級財になる可能性がある。

2.3.3 需要の所得弾力性

所得の変化に対して財の需要がどのように反応するかを表す指標が**需要の所得弾力性**である。式で表現すると以下のようになる。

$$\text{需要の所得弾力性} = \frac{\text{需要の変化率}}{\text{所得の変化率}}$$

先頭にマイナスはつけない。所得が 10 %増えて需要が 20 %増えれば需要の所得弾力性は 2 になり，所得が 5 %減って需要が 15 %減れば需要の所得弾力性は 3 である。需要の所得弾力性は上級財についてはプラス，下級財の場合はマイナスの値をとる*8。主食や電気・ガス・水道など生活必需品は所得が少なくてもある程度消費しなければならないが，所得が増えても消費量がさほど多くならないと考えられるので需要の所得弾力性は小さくなる，具体的には 1 より小さいプラスの値になると考えられる。一方，教養，娯楽関係への支出など生活にゆとりをもたらすような消費項目については需要の所得弾力性は 1 より大きくなるものと考えられる。

2.4　価格の変化と消費

2.4.1　価格変化の効果 - 右下がりの需要曲線

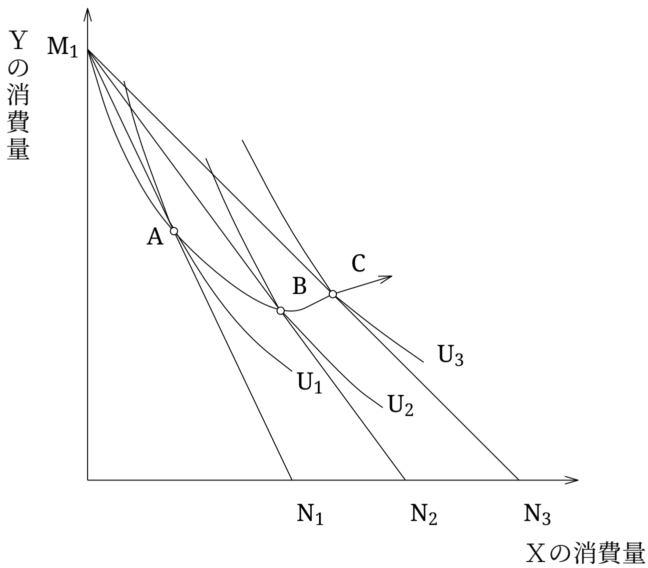


図 2.9　価格の変化と消費

図 2.9 参照。次に所得は変化しないと仮定して，2 財のうちの一つの財の価格の変化が消費に与える効果を考えてみよう。所得と Y 財の価格を一定として X 財の価格が変化したときに消費量はどのような影響を受けるだろうか。X の価格が低下すると予算制約線の Y 軸の切片は変化せずに傾きは小さくなり，図の M_1N_1 から M_1N_2 へ，さらに M_1N_3 へというように M_1 を支点として回転するように変化する。それにつれて消費者が選択する消

*8 と言うより需要の所得弾力性がプラスの財が上級財でマイナスの財が下級財である。

費量の組み合わせは A → B → C というように変化する。点 A，B，C を通る曲線は**価格消費曲線**と呼ばれる。図で三つの無差別曲線 U_1，U_2，U_3 の関係を見ると，U_1 よりも U_2 が，U_2 よりも U_3 が上に位置している。これは X の価格の低下によって消費者の効用が大きくなっていくことを意味している。図で A から B への変化では Y の消費量は減少しているのに対して，B から C への変化では Y の消費量は増加している。いずれの場合も X の消費量は増加している。このようにある財の価格の低下によって一般にその財の消費量は増加する（後で説明するギッフェン財のケースを除いて），逆に C → B → A への変化をみれば，X の価格の上昇によってその消費量が減少することがわかる。このことが第 1 章で見た右下がりの需要曲線の根拠になる。もう一方の財（今の場合は Y）の消費量が増えるか減るかは一概には言えない。

2.4.2　代替効果と所得効果

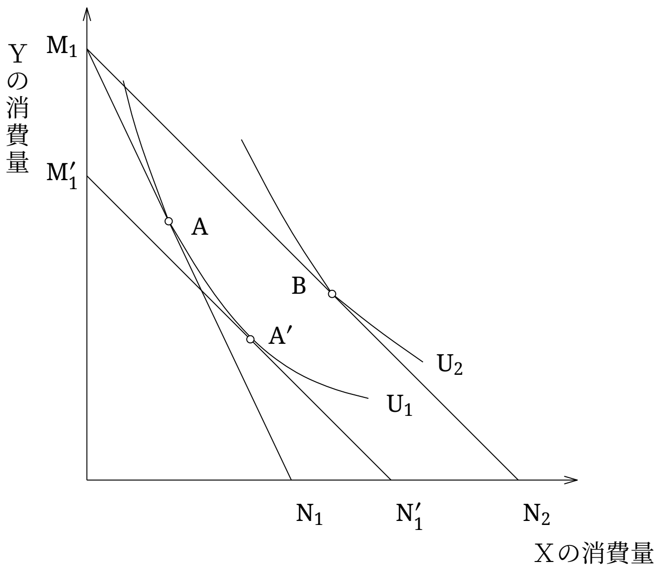


図 2.10　代替効果と所得効果

上で述べたように，所得が一定のとき一つの財の価格が低下すれば消費者の効用が大きくなることがわかった。しかしこれは 2 財の相対価格の変化によってもたらされたものではなく，一方の財の価格の低下が消費者の実質所得（所得の実質的な価値）を高めたために起きたことであると考えられる。そこで価格の低下が財の消費量におよぼす効果を，相対価格の変化によるものと実質所得の変化によるものに分けて考えてみよう。図 2.10 に描かれているように X 財の価格が低下して予算制約線が M_1N_1 から M_1N_2 に移ると，消費者にとって最適な（最大の効用を達成する）消費量の組み合わせは A から B へ移る。もし

		代替効果	所得効果	合計
X の消費に対する効果	上級財の場合	増加	増加	増加
	下級財の場合	増加	減少	?
Y の消費に対する効果	上級財の場合	減少	増加	?
	下級財の場合	減少	減少	減少

表 2.8　X の価格低下の効果

X 財と Y 財の相対価格と消費者の所得が，消費者の効用が変わらないように変化したとすると，予算制約線は図の $M_1'N_1'$ のようになる。すなわち，新しい予算制約線 M_1N_2 と平行で，もとの無差別曲線 U_1 に接するような直線である。図の A′ はその予算制約線のもとでの最適な消費の組み合わせを示している。この図によって X の価格の低下が X，Y の消費に及ぼす効果を以下のように 2 段階に分けて考えることができる。

1. A から A′ への変化
   これは効用一定のもとでの相対価格の変化による消費量の変化であり，**代替効果**と呼ばれる。無差別曲線が右下がりであるから，代替効果においては必ず相対的に安くなった財（今の例では X）の消費が増え，高くなった財（今の例では Y）の消費が減る。
2. A′ から B への変化
   この関係は先に説明した価格一定のもとでの所得の増加による消費の変化と同じ形になっている。つまり，X の価格の低下に伴う実質所得の増加の効果を表すものである。この効果を**所得効果**と呼ぶ。上級財の場合は所得効果によって消費が増え，下級財の場合は減る。図 2.10 に示されているのは上級財の場合である。

代替効果と所得効果を整理すると表 2.8 のようになる。? で示したところは代替効果と所得効果の合計がどのようになるか一概には言えないケースである。X が下級財の場合，それ自身の価格の低下によって消費量が増えるかもしれないし減るかもしれない。減る場合，その財は以下で説明するギッフェン財と呼ばれる。Y が上級財の場合，X の価格の低下によって Y の消費量は増える場合もあるし減る場合もある。これは図 2.9 に表されているとおりである。

2.4.3　ギッフェン財

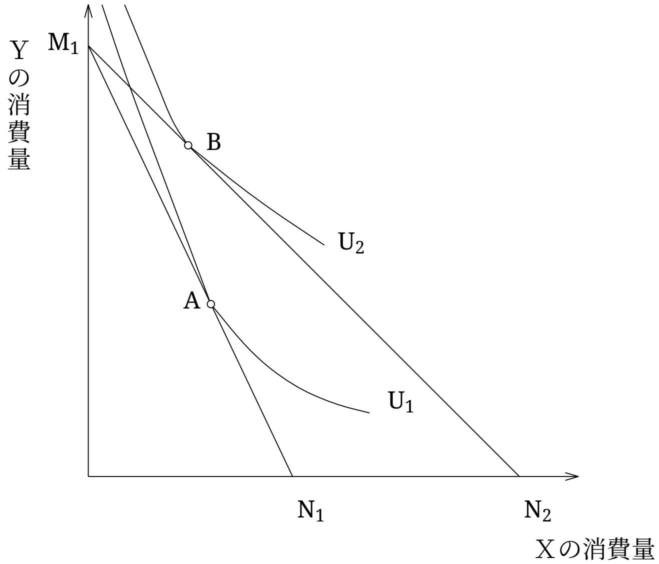


図 2.11　ギッフェン財

価格の変化が財の消費に及ぼす効果を分析することによって右下がりの需要曲線が導かれたが，場合によっては需要曲線が右下がりにならないこともあるかもしれない。需要曲線が右下がりにならないとは価格の低下によってかえってその消費が減少する（価格の上昇によって消費が増加する）財があるということである。表 2.8 よりそのようなケースは下級財でありかつ『マイナスの所得効果の大きさがプラスの代替効果を上回る』場合に起こりうることがわかる。例が図 2.11 に示されている。図で X の価格が低下したとき予算制約線は M_1N_1 から M_1N_2 に移り最適な消費の組み合わせは A から B に移っている。そして，B が A より左側にあるので B における X の消費量は A におけるよりも少なくなっており，X はその価格の低下によってかえって消費量が減っている。このような財はその存在（の可能性）を初めて指摘した人物の名にちなんで**ギッフェン財**と呼ばれる。

2.5　労働サービスの供給

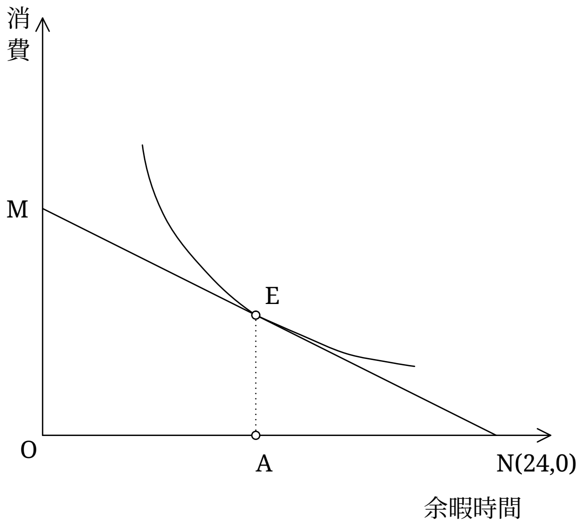


図 2.12　労働サービスの供給

消費者は一方で労働者でもあり，企業に対して労働サービスを供給している。この労働サービスの供給もこれまで見てきた財の消費量の選択と同じ形で考えることができる。企業に就職した場合などに実際はなかなかそうもいかないかもしれないが，消費者すなわち労働者は労働する時間の長さを自分で決められるものとする。消費者の効用は財の消費量（ここでは財を X，Y というように区別しない）と余暇時間（労働していない時間，自由時間）によって決まると考えられる。余暇は自由に使える時間であり財の消費量が同じでも余暇が長いほど効用が高くなる。逆に言えば，労働時間が長いほど苦痛が増し効用が下がると考えるのである。したがって財の消費量と余暇時間をそれぞれ縦軸・横軸にとって消費者の無差別曲線を描くことができる。財の消費量は，財の価格を一定とすると所得によって決まるが，その所得は賃金率（一定時間当たりの賃金）と労働時間とによって決まる。

1 日を単位として消費者の行動を考えてみよう。まず財の価格を 1 とし（あるいは財の価格を基準として賃金率を測る），財の消費量を x で，賃金率を w (wage) で，余暇時間を l (leisure) で表すと消費者の予算制約式は

$$x = w(24 - l) \tag{2.3}$$

で表される。左辺の x は財の消費量であり，右辺は 1 日のうちの働いている時間，$24 - l$, に賃金率をかけたものであるから 1 日の所得を表す。したがってこの式は財の消費量が所

得に等しいという関係を意味しているから予算制約式になっている。これを

$$\frac{1}{w}x + l = 24 \tag{2.4}$$

と書き直すこともできる。このように書くと消費 1 単位当りの費用（価格）は $\frac{1}{w}$，余暇 1 単位当りの費用は 1 であって予算が 24 であると読める。この式は 1 日 24 時間を消費と余暇にどのように配分するかを表している。消費 1 単位とは 1 円の消費であるから $\frac{1}{w}$ は 1 円の所得を得るのに要する労働時間を意味する。またこの式は

$$x + wl = 24w$$

とも書ける。余暇を 1 時間取ることによってその間働けば得られたであろう w の所得，したがってそれによる w 単位の消費が失われる。これが余暇の費用 w である。このように別のことに時間やお金を使えば得られたであろう所得が得られなかったことを費用と考えるような見方を「機会費用」と言う。

(2.3) を図に描くと図 2.12 の MN のような予算制約線が得られる。この予算制約線の傾きは賃金率である。この図の予算制約のもとでの消費者の労働時間選択のモデルが示されている。消費者は無差別曲線と予算制約線が接するところで余暇時間と財の消費量を決める。OA の長さが消費者が選ぶ余暇時間であり，AN が労働時間である。24 から余暇時間を引いた値がこの消費者の労働供給となる。もし賃金以外にも利子所得などの所得があれば，余暇時間 24 時間のところで切れたまま予算制約線が（傾きは一定のまま）上にシフトする。余暇時間を 24 時間より多くはできない，言い換えれば労働時間をマイナスにはできないので，その場合労働時間ゼロでも利子所得だけの所得があることになるからである。

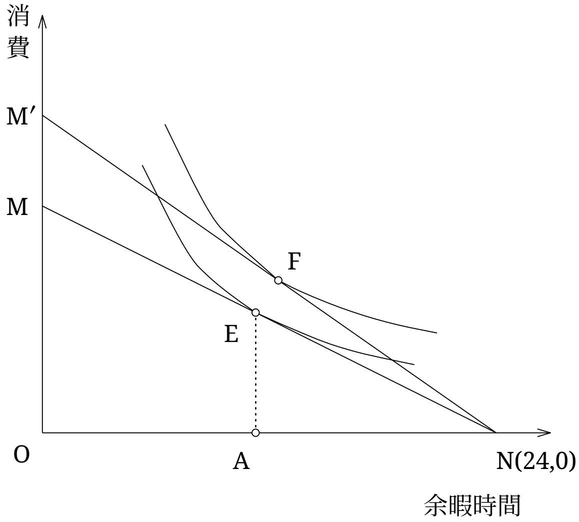


図 2.13　労働サービスの供給 - 賃金率の変化

賃金率が高くなると予算制約線は点 N を支点として回転する。図 2.13 に賃金率の変化と労働供給の関係を図示してある。図で E から F への変化が賃金率の上昇に伴う労働供給の変化を表している。この図では賃金率の上昇によって余暇時間が増加し労働供給が減少するケースが描かれているが，F を通る無差別曲線がもう少し左上にあれば労働供給が増える可能性もある。

賃金率の上昇についても代替効果と所得効果を考えることができる。

1. 代替効果
   賃金率の上昇によって余暇のコスト（余暇によって失われる所得）が増大するため余暇時間が減って労働供給が増え，財の消費も増える。時間のコストを基準に考えると消費 1 円当たりに要する労働時間が少なくなるので消費が余暇に比べて（時間を基準として）安くなると見ることもできる。(2.4) を見れば賃金率の逆数が 1 円当たりの消費の，時間を基準とした価格になっている。
2. 所得効果
   賃金率の上昇は実質所得の上昇をもたらすので，余暇も消費も上級財であるとすれば労働時間が減って余暇が増え財の消費も増える。

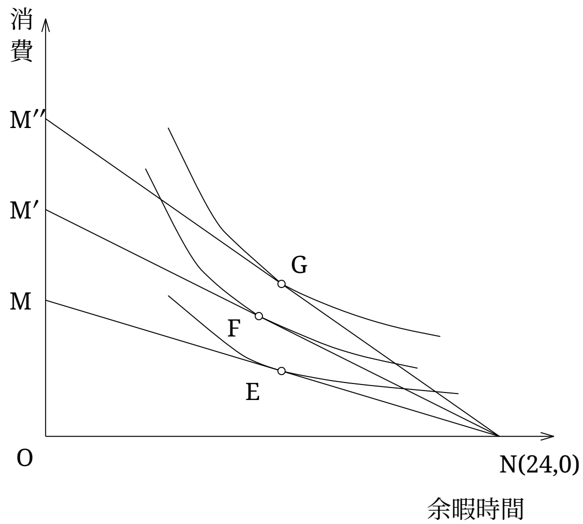


図 2.14　労働サービスの供給 - 賃金率と労働供給の関係

財の消費については代替効果と所得効果が同じ方向に働く，つまり X 財が上級財であるとして賃金率が上がれば，代替効果によっても所得効果によってもその消費が増えるが，余暇については代替効果と所得効果が逆方向に働くため，賃金率の上昇が労働供給を増やすか減らすかは一概には言えない。言い換えれば正常な条件のもとでも労働の供給曲線は

右上がりにも右下がりにもなりうるのである。通常は賃金率が低いときは賃金率の上昇によって労働供給が増え，賃金率が高いときには賃金率の上昇によって労働供給が減ると考えられている。図 2.14 参照。賃金率の上昇によって点 E から F へ向けては労働供給が増えているが F から G へ向けては減っている。すなおな無差別曲線を描けばこのようになると考えられる。このとき賃金率を縦軸に，労働供給を横軸にとって労働の供給曲線を描くと賃金率が低い間は右上がりで，賃金率が高くなると右下がりになるような後ろ向きに曲がった (backward bending) 供給曲線が得られるであろう（図 2.15 参照）。

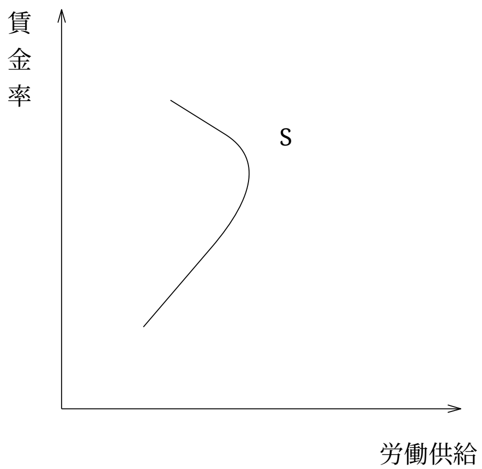


図 2.15　後ろ向きに曲がった労働供給曲線

■賃金上昇・下落の代替効果と所得効果 (図 2.16，2.17 参照)　賃金の上昇は図 2.16 に描かれている。

1. E→A：代替効果
   w から w' への賃金の上昇は余暇をとるためのコストを大きくするので代替効果においては余暇が減り（労働時間が増え），消費が増える。
2. A→F：所得効果
   賃金の上昇によって同じ時間働いたときの所得が増えるので正の所得効果が働き，余暇，消費ともに増える。結果として賃金の上昇が余暇を増やすか減らすか，労働時間を増やすか減らすかはわからない。

$\mathrm{M}_1'\mathrm{N}_1'$ は $\mathrm{M}_2\mathrm{N}$ と平行で無差別曲線 U_1 と接する直線であり，変化した後の賃金水準で効用が変わらない状態を表している。この図はそのままで X 財，Y 財を消費するケースで Y 財の価格が下落したときの代替効果と所得効果を表す図として用いることができる。代替

効果によって X の消費が減って Y の消費が増え，所得効果によって両方の消費が増える。横軸を X，縦軸を Y として考えてみてほしい。またこの図は利子率が上がったときの現在の消費と将来の消費の変化を分析する図と同じ図である。

賃金の下落は図 2.17 に描かれている。

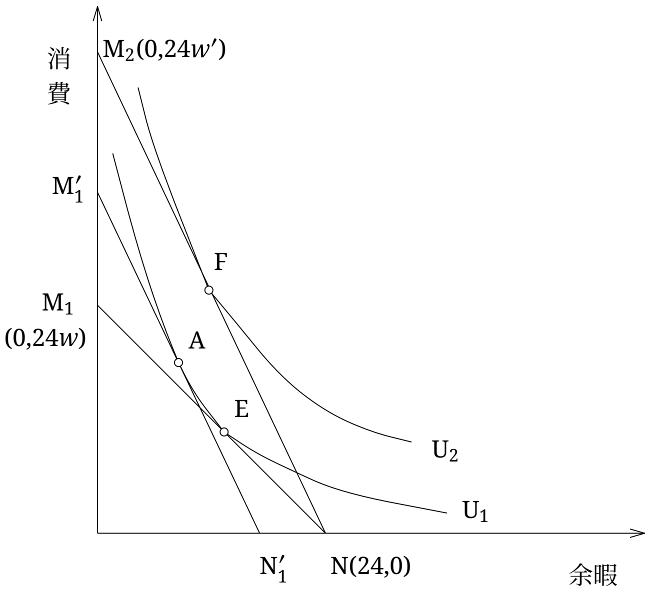


図 2.16　賃金上昇の代替効果と所得効果

1. E→A：代替効果
   w から w' への賃金の下落は余暇をとるためのコストを小さくするので代替効果においては余暇が増え（労働時間が減り），消費が減る。
2. A→F：所得効果
   賃金の下落によって同じ時間働いたときの所得が減るので負の所得効果が働き，余暇，消費ともに減る。結果として賃金の下落が余暇を増やすか減らすか，労働時間を増やすか減らすかはわからない。

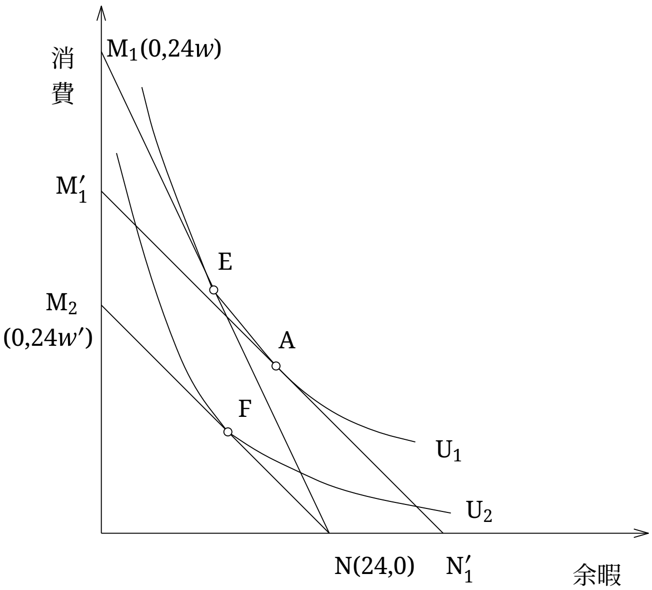


図 2.17　賃金下落の代替効果と所得効果

前の図と同様に $M_1'N_1'$ は M_2N と平行で無差別曲線 U_1 と接する直線であり，変化した後の賃金水準で効用が変わらない状態を表している。この図もそのままで X 財，Y 財を消費するケースで Y 財の価格が上昇したときの代替効果と所得効果を表す図として用いることができる。代替効果によって X の消費が増えて Y の消費が減り，所得効果によって両方の消費が減る。やはり横軸を X，縦軸を Y として考えてみてほしい。また利子率が下がったときの現在の消費と将来の消費の変化の分析にも用いることができる（将来の所得をゼロとして）。利子率の下落によって現在の消費が増えて将来の消費が減り，所得効果によって両方減る。結果として現在の消費・貯蓄が増えるか減るかはわからない。横軸を現在，縦軸を将来として考えてみてほしい。

X 財価格の上昇の効果を分析する図だけが描かれていないことになるが考えればわかるであろう。

2.6　利子率と貯蓄

ここまでの分析では（暗黙のうちに）消費者はただ 1 回だけ消費の意思決定をすると仮定してきた。言わば 1 期間のモデルを考えてきたわけである。しかし，現実の我々の生活は 1 回限りのものではなく，過去・現在・未来という時間の流れの中で営まれている。今日稼いだ所得を今日すべて使ってしまわずに将来のために残しておくかもしれないし，逆

に将来の所得をあてにして今日は稼いだ以上に消費に支出するかもしれない。この節ではこのような時間の流れを考慮に入れた消費について考察する。

2.6.1　現在の消費と将来の消費

具体的に，**現在**と**将来**の 2 期間にわたる消費を考える。消費者は現在・将来それぞれにおいて労働をして所得を得，消費をする。現在の所得が現在の消費を上回っていればその差額分だけ貯蓄をし，逆に現在の消費が現在の所得を上回っていればその不足分だけ借り入れをすることになる。貯蓄をすると将来においてはその貯蓄した所得だけではなく，貯蓄から生まれる利子も消費に使うことができる。一方借り入れに対しては利子を支払わなければならないので，将来の消費は借り入れの額に加えて利子の分だけ少なくなる。消費者の効用は現在の消費量と将来の消費量によって決まる。

資産のある人は子孫に遺産を残そうとするかもしれないが，それを経済学的に分析するには遺産を残す行為そのものから効用が生まれると考えるか，それとも子孫がその遺産を使って行う消費から得られる効用が，遺産を残す人自身の効用にもなるというような形でモデルの中に記述しなければならない。ここでは遺産は残さないものとする，したがって消費者は所得をすべて現在と将来で使い切ってしまう。

現在の所得を m_1，将来の所得を m_2，現在の消費を c_1，将来の消費を c_2 で表す。これまでのように X，Y の 2 財を区別するのではなく，現在の消費と将来の消費とを二つの財と考える。現在・将来の消費量は，消費する財の購入に支出される金額で表される。将来の所得は現在の時点における予想ということになるが，不確実性はなく確実に m_2 の所得が得られると期待できるものとする。以上の仮定のもとで消費者の予算制約式は次のように表される。

$$c_2 - m_2 = m_1 - c_1 + r(m_1 - c_1) \tag{2.5}$$

r は利子率である[*9]。左辺は将来の消費が将来の所得を上回る部分を，右辺は現在の貯蓄 $m_1 - c_1$ に利子 $r(m_1 - c_1)$ を加えたものを表す。したがって (2.5) は先に述べた，**将来の消費は将来の所得に現在の貯蓄とそこから生まれる利子を加えたものに等しい**，という関係を示している。もし現在において借り入れをするならば，(2.5) の両辺は負（マイナス）になり，$-r(m_1 - c_1)$ が借り入れに対して支払う利息を表す。ここでは貯蓄が生み出す利子率と借り入れにかかる利子率は等しいものとする。

これを少し変形すると

$$(1+r)c_1 + c_2 = (1+r)m_1 + m_2$$

が得られる。両辺を $1+r$ で割ると

$$c_1 + \frac{1}{1+r}c_2 = m_1 + \frac{1}{1+r}m_2 \tag{2.6}$$

[*9] 利子率は，10 %ならば 0.1，5 %ならば 0.05 のように表される。

となる。この式は将来の消費に要する予算と将来の所得を現在に割り引いた形で表されている[*10]。通常 2 期間モデルでは (2.6) が予算制約式として用いられる。

消費者は (2.6) によって表される予算制約のもとで効用が最大となるように現在の消費と将来の消費とを決める。現在の消費と将来の消費に対する消費者の選好を効用関数の形で表すと，たとえば

$$u(c_1) + \frac{1}{1+\delta}u(c_2)$$

のように表される。$u(\cdot)$ はある金額の消費から得られる効用である。δ は，それが正（プラス）の場合，将来の消費から得られる効用が現在の消費から得られる効用と比べて現在の消費者にとってどの程度価値が低いかを表すもので**割引率**と呼ばれる。通常 $\delta > 0$ である。これは現在の消費者にとっては将来の消費は実感が薄く，同じだけの消費量であれば将来の消費よりも現在の消費から得られる効用の方が大きいという性質をもつということを示すものである。そのような性質は**時間選好**と呼ばれる[*11]。

現在の消費と将来の消費に対する消費者の選好を，X・Y 2 財の場合と同様に無差別曲線を用いて図示することができる。時間選好が強い消費者，すなわち δ が大きい消費者の場合は将来の消費よりも現在の消費を好む傾向が強いので時間選好が弱い消費者と比べて，同一の無差別曲線上で，ある量の現在の消費量の減少を補って効用を一定に保つのにより大きい将来の消費量の増加が必要になるから，限界代替率，したがって無差別曲線の傾きは大きい。また，消費者は現在あるいは将来に偏った消費の仕方は好まないであろうから，無差別曲線は原点に向かって凸であると考えられる。

一方，(2.6) で表される消費者の予算制約式は図には予算制約線として描かれる。(2.6) において $1/(1+r)$ は将来の消費の，現在の消費に対する相対価格になっている。横軸に現在の消費量，縦軸に将来の消費量をとると予算制約線の傾きは $-(1+r)$ である。利子率が高くなると現在の消費を我慢して得られる将来の消費が大きくなるので将来の消費の相対価格は小さくなり予算制約線の傾きは大きくなる。

[*10] 利子率が r のとき，現在いくらかの金額を残しそれが将来において 10000 円になるようにしたいとすると，現在必要な金額は $\frac{10000}{1+r}$ 円 となる。したがって将来の 10000 円と現在の $\frac{10000}{1+r}$ 円 とは等しい価値を持っていると考えることができる。この $\frac{10000}{1+r}$ 円 が将来の 10000 円を現在に割り引いたたものであり，割り引き現在価値と呼ばれる。

[*11] これは 1 単位の現在の消費の増加から得られる効用の増加が，1 単位の将来の消費の増加から得られる効用の増加よりも常に大きいことを意味するものではない。『同じ量』の現在の消費と将来の消費とを考えれば現在の消費から得られる効用の方が大きいということである。現在の消費が多くなるとその相対的な価値が下がり限界代替率が小さくなっていく。ここでの限界代替率とは，1 単位の現在の消費の減少による効用の低下を補うのに必要な将来の消費の増加量である。後で見るように，その限界代替率が (1+ 利子率) と等しくなるように現在・将来の消費量が選ばれる。

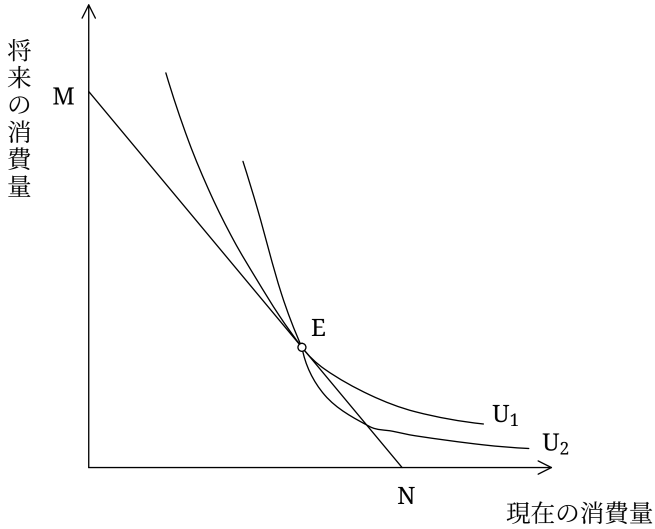


図 2.18　現在・将来の消費の選択

図 2.18 の U_1 がある消費者の無差別曲線であり，MN が予算制約線である。この消費者は予算制約線と無差別曲線が接する点 E の消費量を選択する。より時間選好が強い消費者の無差別曲線を U_2 として描いてある。この消費者の場合，点 E における無差別曲線の傾きは U_1 よりも大きくなるので，点 E においては予算制約線と無差別曲線が，無差別曲線が予算制約線を左上から切る形で交わっている。この消費者が予算制約線 MN 上で選ぶ点は U_2 よりも上にある無差別曲線が MN と接する点で求められるので点 E よりも右下になり，現在の消費量がより大きく将来の消費量は小さくなる。

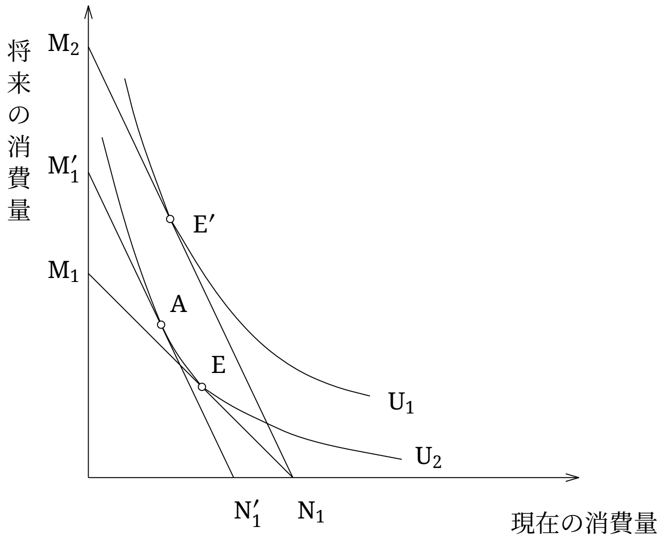


図 2.19　利子率の変化と消費・貯蓄

2.6.2　利子率の変化と消費・貯蓄

利子率が上昇した場合の消費・貯蓄の変化を考えてみよう。ここでは $m_2 = 0$ と仮定する。すなわち，消費者は現在においてだけ労働をして所得を得，将来は引退して貯蓄をもとに消費をすると考える。図 2.19 の $\mathrm{M_1N_1}$ が利子率上昇前の，$\mathrm{M_2N_1}$ が利子率が上昇した後の予算制約線を表している。現在と将来の消費は点 E から点 E′ に変化する。この変化は X・Y 2 財のケースと同様に代替効果と所得効果に分けることができる。それぞれの意味は以下のとおりである。

代替効果　点 E から点 A への変化であり，利子率の上昇によって相対的に将来の消費が現在の消費と比べて安くなることによって将来の消費が増え，現在の消費が減る。

所得効果　点 A から点 E′ への変化であり，利子率の上昇によって貯蓄から生み出される利子が増え，現在と将来において使える所得の合計が増える。したがって現在の消費，将来の消費のそれぞれが下級財でなければ利子率の上昇によってどちらも増える。

現在の消費，将来の消費がともに下級財ではないとすると，代替効果・所得効果ともに将来の消費には正の効果を与えこれを増やすように働くが，現在の消費に対しては代替効果が負の効果，所得効果が正の効果を与えるので，そのどちらが強いかによって現在の消費は増える場合もあり減る場合もある。代替効果が強ければ現在の消費は減り所得効果が

強ければ増える。現在の貯蓄は，現在の所得から消費を引いたものであるから，代替効果が強い場合には利子率の上昇によって貯蓄は増え，所得効果が強い場合には利子率の上昇によって貯蓄は減る。図 2.19 では現在の消費が減り貯蓄が増えるケースが描かれている。

なお消費者が行う貯蓄は資本の供給を構成し，その供給と企業の（第 3 章で検討する）産出量の選択にもとづく資本需要とを均衡させる価格として利子率が決まるものと考えることができる[*12]。

2.6.3　貯蓄と借り入れで利子率が異なるときの利子率と消費・貯蓄の関係について

現在，将来 2 期間の消費を考える。現在の消費を C_1，将来の消費を C_2，貯蓄に対する利子率を r_1，借り入れに対する利子率を $r_2(r_2 > r_1)$，現在の所得を m_1，将来の（確実に予測できる）所得を m_2 とする。

1. 予算制約式は以下のようになる。
   (i) $C_1 \leq m_1$ のときは貯蓄をする（またはどちらもしない）ので，
   $$(1+r_1)C_1 + C_2 = (1+r_1)m_1 + m_2.$$
   (ii) $C_1 > m_1$ のときは借り入れをするので，
   $$(1+r_2)C_1 + C_2 = (1+r_2)m_1 + m_2.$$
2. 効用関数が $u = C_1^3 C_2^2$ であるとき，効用を最大にする C_1，C_2 を m_1，m_2，r_1，r_2 で表わすと以下のようになる。
   (i) $m_2 \leq \frac{2}{3}(1+r_1)m_1$ のときは貯蓄をするので
   $$C_1 = \frac{3(1+r_1)m_1 + 3m_2}{5(1+r_1)},\ C_2 = \frac{2(1+r_1)m_1 + 2m_2}{5}.$$
   (ii) $\frac{2}{3}(1+r_1)m_1 < m_2 \leq \frac{2}{3}(1+r_2)m_1$ のときは貯蓄も借り入れもせず，
   $$C_1 = m_1,\ C_2 = m_2.$$
   (iii) $m_2 > \frac{2}{3}(1+r_2)m_1$ のときは借り入れをして，
   $$C_1 = \frac{3(1+r_2)m_1 + 3m_2}{5(1+r_2)},\ C_2 = \frac{2(1+r_2)m_1 + 2m_2}{5}.$$
3. 効用関数を $u = C_1^3 C_2^2$ として，$r_1 = 0.1$，$r_2 = 0.3$，$m_1 = 120$ のときの m_2 と C_1，C_2 の関係を求めると以下のようになる。

[*12] 債券や貨幣など複数の貯蓄手段がある場合の利子率の理論については金融論やマクロ経済学で学んでいただきたい。

(i) $m_2 \leq 88$ のとき

$$C_1 = 72 + \frac{3m_2}{5.5},\ C_2 = 52.8 + \frac{2m_2}{5}.$$

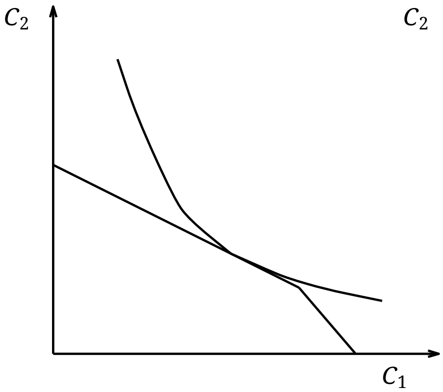
(ii) $88 < m_2 \leq 104$ のとき

$$C_1 = 120,\ C_2 = m_2.$$

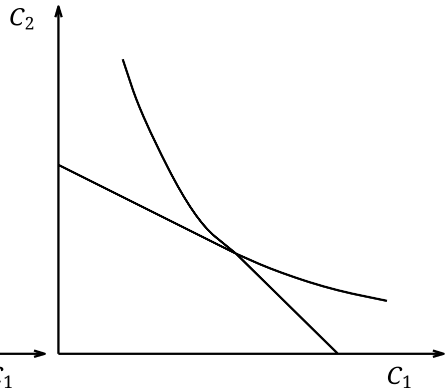
(iii) $m_2 > 104$ のとき

$$C_1 = 72 + \frac{3m_2}{6.5},\ C_2 = 62.4 + \frac{2m_2}{5}.$$

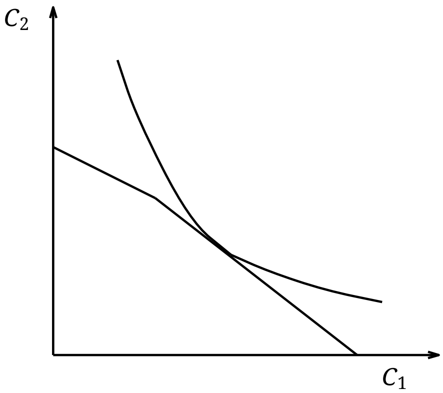
4. 各ケースを図示すると,



貯蓄する場合



貯蓄も借り入れもしない場合



借り入れをする場合

2.7　交換経済とパレート効率性

2.7.1　交換経済

ここまでは一人の消費者による財の消費量の選択，すなわち需要を考えてきた。しかし消費者がある財を消費したいと思ってもその財の供給がなければ需要は満たされない。供給は本来企業による生産によってもたらされるものであるが，生産の分析の前に各消費者が予め持っている財の交換によって，需要と供給の調整が行われる経済を考えることにしよう。そのような経済は**交換経済** (exchange economy) と呼ばれる。最も簡単なケースとして二人の消費者と二つの財からなる経済を想定する。それぞれの消費者を消費者 A，消費者 B，二つの財を X，Y とする。交換の前に消費者 A は X を $\bar{x}_A$，Y を $\bar{y}_A$ だけ持っているものとし，消費者 B は X を $\bar{x}_B$，Y を $\bar{y}_B$ だけ持っていると仮定する。これらは**初期保有量** (initial endowment) と呼ばれる。また，消費者 A の X，Y の消費量を x_A， y_A で，消費者 B の消費量を x_B， y_B で表す。消費者 A は $x_A - \bar{x}_A$ だけの X を購入することになるから，それが消費者 A の X 財に対する需要である。$x_A - \bar{x}_A < 0$ のときは逆に $\bar{x}_A - x_A$ だけの X を供給する。同様に消費者 A による Y 財の供給は $\bar{y}_A - y_A$ で表される。$\bar{y}_A - y_A < 0$ の場合には $y_A - \bar{y}_A$ が需要になる。消費者 A が Y を供給して X を需要すると仮定すると，Y を売って得た収入で X を購入することになるので，X の価格を p_x，Y の価格を p_y で表わせば消費者 A の予算制約式は

$$p_x(x_A - \bar{x}_A) = p_y(\bar{y}_A - y_A) \tag{2.7}$$

のように表される。左辺は X を購入するのに必要な予算を，右辺は Y を売却して得られる収入を表す。(2.7) を少し変形すると

$$\frac{x_A - \bar{x}_A}{\bar{y}_A - y_A} = \frac{p_y}{p_x} \tag{2.8}$$

が得られる。左辺は Y を 1 単位売って買える X の量を表し，右辺は X と Y の相対価格である。これは X と Y とを物々交換する場合の交換条件を表すものと見ることもできる。

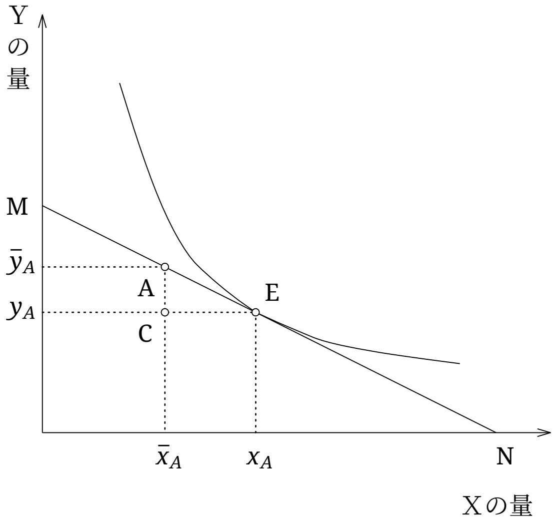


図 2.20　消費者 A の選択

また，(2.7) より次の式が得られる。

$$p_x x_A + p_y y_A = p_x \bar{x}_A + p_y \bar{y}_A \tag{2.9}$$

右辺は消費者 A が手持ちの X と Y とをすべて売却して得られる収入を，左辺はあらためて X と Y とを購入するのに必要な予算を表すものと見ることができる。右辺の各項はすべて予め与えられたものであるから定数である。

(2.9)（したがって (2.7)，(2.8) も）を X - Y 平面上に図示すると点 $(\bar{x}_A, \bar{y}_A)$ を通り，傾き $-p_x/p_y$ の直線が得られる。それが消費者 A の予算制約線である。消費者 A はこの予算制約線の上で効用が最大となる消費量 x_A，y_A を選ぶ。図 2.20 にその様子が描かれている。図の MN が予算制約線である。点 A は消費者 A の X と Y の初期保有量を，点 E は X と Y の消費量を表す。直角三角形 ACE の底辺 CE は消費者 A の X に対する需要を，高さ AC は Y の供給を表している。消費者 A がどちらの財を需要し供給するかはその選好，手持ちの X と Y の量（初期保有量），そして価格によって決まる。初期保有量を表す点 A が E より左上にある場合には消費者 A は Y を供給して X を需要し，逆に点 A が E より右下にあれば X を供給し Y を需要する。

消費者 B についても同様に予算制約式は

$$p_x x_B + p_y y_B = p_x \bar{x}_B + p_y \bar{y}_B \tag{2.10}$$

のように表される。消費者 B が A とは逆に X を供給して Y を需要するとすると，その選択は図 2.21 にように描かれる。図の点 B は消費者 B の X，Y の初期保有量を，点 E′ は消

費量を表す。また直角三角形 E′DB の底辺 DB は X の供給を，高さ E′D は Y に対する需要を表す。

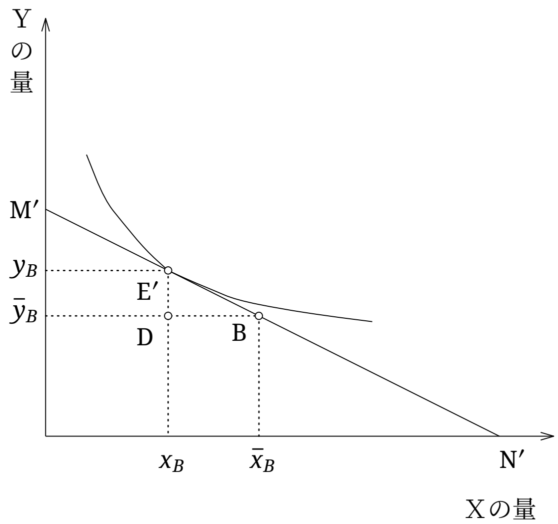


図 2.21　消費者 B の選択

もし A の X に対する需要と B による X の供給，A による Y の供給と B の Y に対する需要がそれぞれ一致すれば，つまり $CE = DB$，$AC = E'D$ が満たされれば，取り引きは成立しそのときの価格が均衡価格になる。ただし，X，Y のいずれかの需要と供給が一致すればもう一方は自動的に満たされることがわかる[*13]。しかしそれらが一致しない場合には均衡は実現しない。第 1 章で見たように財の需要と供給が一致しなければ何かが変化する。ここではワルラス的な調整過程によって価格が変化するものと考える。消費者 A の X に対する需要が消費者 B による X の供給を上回っている場合には X に超過需要が存在し，X の価格は相対的に上昇して Y の価格は下落する。逆に消費者 B による X の供給が消費者 A の X に対する需要を上回っている場合には X に超過供給が存在することになり，X の価格は相対的に下落し Y の価格は上昇する。

X の価格が上昇した（正確には X の Y に対する相対価格が上昇した）ときの消費者 A の消費量の変化を考えてみよう。以前の節で考えたように所得が一定で X の価格が上昇すると予算制約線は Y 軸上の切片，点 M を不変として傾きが大きくなるが，ここでは変わ

[*13] 図 2.20 の直角三角形 ACE と図 2.21 の直角三角形 E′DB において，消費者 A と B にとって価格が同じであるから，$\angle AEC = \angle E'BD$ となりこれら二つの三角形は相似である。さらに $CE = DB$ であれば二つの三角形は合同になり，$AC = E'D$ も成り立つ。逆に，$AC = E'D$ であっても合同になり $CE = DB$ が得られる。$CE = DB$ が X の，$AC = E'D$ が Y の需要と供給が一致するための条件である。このことは『ワルラスの法則』と呼ばれている。一般的に表現すれば「n 個の財が存在する場合には $n-1$ 個の財の市場が均衡すれば残りの 1 つも均衡する」となる。

らないのは点 M ではなく消費者 A の初期保有量を示す点 A である。したがって予算制約線は**点 A を支点として回転するように**変化する。図 2.22 の M′N′ が X の価格が上昇した後の予算制約線であり，点 E は価格上昇前の消費，点 E′ は価格上昇後の消費を表す。X の価格の上昇は代替効果によって X の消費を減少させるとともに，Y を自分の消費量以上に多く保有する消費者 A にとって，X の価格の上昇は実質所得の減少につながるから，X が上級財ならば所得効果によっても消費が減る[*14]。Y の消費は代替効果によるプラスの効果と所得効果によるマイナスの効果のいずれが大きいかによって決まるが，この図では所得効果の方が大きく，Y の消費も減少するケースが描かれている。消費者 A の無差別曲線が M′N′ と，点 E より左上の位置で接している場合には X 財価格の上昇によって Y の消費量が増加する。

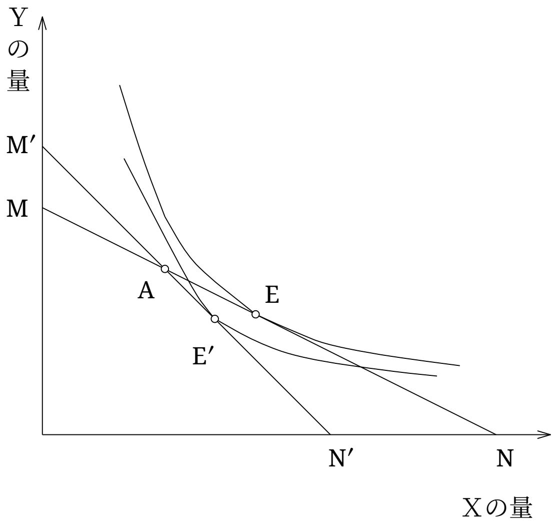


図 2.22　価格変化と消費 - 消費者 A のケース

予算制約線が逆に M′N′ から MN に変化したと考えると，それは Y 財の価格が上昇した場合を表すものと見ることができる。消費は E′ から E へ変化する。X の消費量はプラスの代替効果と，保有する Y の価格上昇による実質所得の増加がもたらすプラスの所得効果が相まって増加するが，Y の消費量はマイナスの代替効果とプラスの所得効果のいずれが大きいかで決まる。

[*14] 消費者 A の無差別曲線が M′N′ と，点 E より右下の位置で接している場合には X の消費量が増加するが，その場合 X 財は下級財である。

2.7.2　交換経済の均衡とパレート効率性

先に述べたように消費者 A の X に対する需要と B による X の供給，A による Y の供給と B の Y に対する需要がそれぞれ一致すれば，この二人からなる交換経済の均衡が得られる。均衡の様子が図 2.23 に描かれている。この図は図 2.20 と図 2.21 を，ある価格のもとで二人の消費者の需要と供給が一致するという前提で組み合わせたものである。具体的には，図 2.21 を 180 度回転させ，点 E′ と図 2.20 の点 E が一点に重ね合されるように描かれている。点 E の O を原点とする座標，すなわち OC，OB の長さががそれぞれ消費者 A の X，Y の消費量であり，同じく点 E の O′ を原点とする座標，O′F，O′D の長さがそれぞれ消費者 B の X，Y の消費量を表している。図の長方形の横の長さは OC+O′F に等しく，二人合わせた X の消費量，したがって初期保有量になっており，縦の長さは OB+O′D に等しく，二人合わせた Y の消費量，初期保有量を表す。図には書かれていないが，点 A の O を原点とする座標が消費者 A の初期保有量，O′ を原点とする座標が消費者 B の初期保有量に等しい。この図の点 E においては，消費者 A の無差別曲線，消費者 B の無差別曲線および予算制約線 MN の三つが互いに接している。言い換えれば，MN が二つの無差別曲線の共通接線になっている。$\angle ENR$ と $\angle AMQ$ とはいわゆる平行線の錯角で等しいが，$\angle ENR$ は図 2.20 の MN の傾きに等しく，また $\angle AMQ$ は図 2.21 における MN の傾きに等しい。これらが等しいということは，図 2.23 において消費者 A は点 O を，消費者 B は点 O′ を原点として同じ価格のもとで消費量を決めているということを意味する。したがって，点 E は点 A を初期保有量として予算制約線 MN のもとで消費者 A，B それぞれが最適な消費量を選択している状態を表している[*15]。

[*15] このような図はそれを発案した人の名をとってエッジワース・ボックス (Edgeworth box) と呼ばれる。本書に出てくる様々な名称，ロイの恒等式，スルツキー方程式，パレート効率性，ラグランジュ乗数法などもそれらを研究した経済学者や数学者の名前をとったものであるが，どのような人物か興味のある人は各自調べていただきたい。

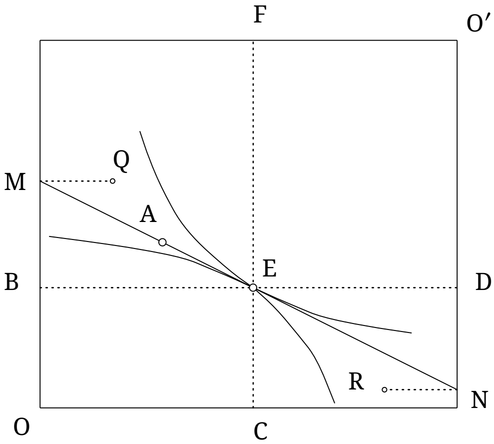


図 2.23　交換経済の均衡とパレート効率性

点 E より右上の点は，消費者 A にとって原点から見て点 E より遠くにありより効用が大きい望ましい点であるが，消費者 B にとってはより原点 O′ に近いので効用が小さい点である。同様に，点 E より左下の点は消費者 B にとってはより効用が大きい点であるが，消費者 A にとっては効用が小さい点になり，両者の無差別曲線の間にある右下，左上の点は両方の消費者にとってより効用が小さい点になる。したがって点 E における二人の消費者への財の配分を変化させると，必ずどちらかの消費者の効用が下がる，言い換えれば点 E から両方の消費者の効用を高めるように配分を変更することはできない。このような状態を**パレート効率的** (Pareto efficient)（またはパレート最適 (Pareto optimal)）であると言い，経済状態や政策の望ましさの判断規準の一つになっている。

厳密に言えば，一方の効用を下げずにもう一方の効用を上げることができないという状態が**パレート効率的**である。もしパレート効率的な状態において，消費者に対する財の配分を変更しても 2 人の消費者（一般的にはすべての消費者）の効用が変らない場合は変化前，変化後ともにパレート効率的である。一般的にはそうであるが 2 人の消費者の無差別曲線が凸であれば均衡から財の配分を変えると必ずどちらかの消費者の効用が下がる。ある状態がパレート効率的でなければ一方の効用を下げずにもう一方の効用を上げることができる別の配分がある。次の項の代数的証明を参照。

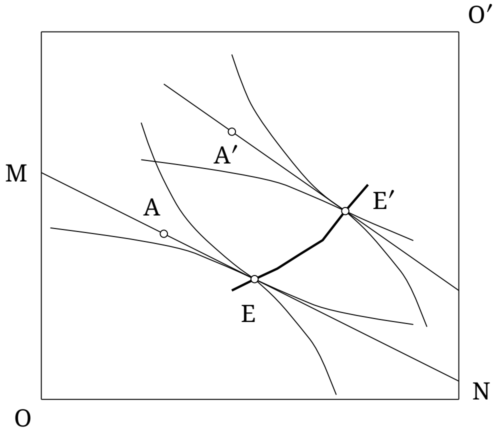


図 2.24　契約曲線

各消費者の無差別曲線はその効用水準に応じて無数に描くことができるから，二人の無差別曲線が接する点も無数にある。その点で互いの無差別曲線に接する共通の接線を引き，その接線上に適当に一点をとれば，その点を各消費者の初期保有量とし共通接線を均衡価格とする別の均衡を求めることができる。図 2.24 参照。このようにして求められた均衡点を結んだ曲線は**契約曲線** (contract curve) と呼ばれる。図の E と E′ を通る太い線が契約曲線である。契約曲線は二人の消費者についてパレート効率的な点（の集合）を表している。以上のことから次のことが言える。

1. 交換経済の均衡はパレート効率的である。（厚生経済学の第一定理）
2. あるパレート効率的な点は初期保有量を適当にとることによって交換経済の均衡となるようにすることができる。（厚生経済学の第二定理）

『初期保有量を適当にとる』とは，各消費者が持っている財を再配分配することと解釈できる。

図 2.24 からわかるように，初期保有量が異なれば均衡も異なる。特に二人の消費者の初期保有量に大きな格差（あるいは不平等）があれば，均衡における財の消費量についても格差が生じる。図 2.24 の点 E と点 E′ とを比べると，点 E′ の方が消費者 A にとって，点 E の方が消費者 B にとって有利な状態である。

したがって，パレート効率性という規準は，出発点をそのままにして**効率的**な調整を考えるということであり，社会的公正とか平等というような概念は含まれていない。パレート効率性を維持しながらより平等な状態を実現しようとすれば上で述べたように初期保有量を再分配する必要がある。

この節で述べた議論は消費者の数が多い場合にも一般的に当てはまる。

2.7.3　交換経済の均衡がパレート効率的であることの代数的証明

多少の数学を使って交換経済の均衡がパレート効率的であることを証明しよう。数学とは言っても微分や積分は使わない。効用関数は使うが代数的な計算だけである。均衡における消費者 A，B の X 財，Y 財の消費量を x_A^*，x_B^*，y_A^*，y_B^* とする。これがパレート効率的でなければ他の消費量の配分 x_A，x_B，y_A，y_B があって 2 人の効用が

$$u_A(x_A, y_A) > u_A(x_A^*, y_A^*),\ u_B(x_B, y_B) \geqq u_A(x_B^*, y_B^*)$$

または

$$u_A(x_A, y_A) \geqq u_A(x_A^*, y_A^*),\ u_B(x_B, y_B) > u_B(x_B^*, y_B^*)$$

となっている（どちらかの効用がより大きく，他方は少なくとも変らない）。上の場合を取り上げる（下の場合を仮定するのならば A と B を入れ替えればよい）。u_A，u_B はそれぞれ消費者 A，B の効用関数である。人々は実現可能な（予算制約を満たす）消費量の組の内で最も効用が大きい消費量の組を選んでいるはずであるから x_A，y_A は A にとって実現できない消費量である。したがって p_x，p_y を X 財，Y 財の価格として次の式が成り立つ。

$$p_x x_A + p_y y_A > p_x \bar{x}_A + p_y \bar{y}_A$$

$$p_x x_B + p_y y_B \geqq p_x \bar{x}_B + p_y \bar{y}_B$$

消費者 B も均衡消費量において効用を最大化している。$\bar{x}_A$，$\bar{y}_A$，$\bar{x}_B$，$\bar{y}_B$ はそれぞれ初期保有量である。この 2 つの式を足し合わせると

$$p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B) > p_x(\bar{x}_A + \bar{x}_B) + p_y(\bar{y}_A + \bar{y}_B) \tag{2.11}$$

が得られる。一方 x_A，x_B，y_A，y_B の各財についての合計は初期保有量の合計に等しくなければいけないので

$$x_A + x_B = \bar{x}_A + \bar{x}_B$$

$$y_A + y_B = \bar{y}_A + \bar{y}_B$$

が成り立っていなければならない。これらの式を (2.11) の左辺に代入すると

$$p_x(\bar{x}_A + \bar{x}_B) + p_y(\bar{y}_A + \bar{y}_B) > p_x(\bar{x}_A + \bar{x}_B) + p_y(\bar{y}_A + \bar{y}_B)$$

となる。しかし，この式の左辺と右辺は同じものであるから等しくなければならない。したがって交換経済の均衡はパレート効率的でなければならないことが言える。

この議論は財がいくつあっても，人数が 3 人以上であっても同じように展開できる。

■パレート効率性の条件　交換経済におけるパレート効率性の条件を微分を用いた計算によって確認してみよう[*16]。二人の消費者の効用の加重和（比重をつけた和）を最大にすることを考える。それが最大化されていれば一方の効用を下げないともう一方の効用を上げることはできずパレート効率的である。消費者 A，B の効用の加重和は $0 < \alpha < 1$ として

$$U = \alpha u_A(x_A, y_A) + (1-\alpha)u_B(x_B, y_B)$$

と表される。効用関数は序数的効用関数であるが，同じ選好を表すならば関数を変換しても条件は変わらない。

$$x_A + x_B = \bar{x}_A + \bar{x}_B,\ y_A + y_B = \bar{y}_A + \bar{y}_B$$

より

$$U = \alpha u_A(x_A, y_A) + (1-\alpha)u_B(\bar{x}_A + \bar{x}_B - x_A, \bar{y}_A + \bar{y}_B - y_A)$$

となる。これを x_A，y_A で微分して 0 とおくと

$$\alpha\frac{\partial u_A}{\partial x_A} - (1-\alpha)\frac{\partial u_B}{\partial x_B} = 0$$

$$\alpha\frac{\partial u_A}{\partial y_A} - (1-\alpha)\frac{\partial u_B}{\partial y_B} = 0$$

が得られる。この両式から

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}} = \frac{\frac{\partial u_A}{\partial y_A}}{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}} = \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

となるが，これは次のように書き直される。

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}{\frac{\partial u_A}{\partial y_A}} = \frac{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}}$$

この式は消費者 A と B の限界代替率が互いに等しいことを意味する。図で言えば互いの無差別曲線が接するという条件と同じである[*17]。

2.8　効用最大化の数学的分析

2.8.1　ラグランジュ乗数法 - -制約つき最適化問題の解法

　ラグランジュ乗数法は与えられた制約条件のもとで，ある関数の最大値または最小値を求めるための手法である。

[*16] この議論では次の節で説明する数学的分析を少し先取りしている。
[*17] 限界代替率は無差別曲線の接線の傾きであった。

■例　次の関数 (2.12) の制約条件 (2.13) のもとでの最小値を求める。

$$z = x^2 + y^2 \tag{2.12}$$

$$x + 2y = 5 \tag{2.13}$$

(2.12) と (2.13) とから**ラグランジュ関数**と呼ばれる次のような式を作る。ここで λ（ラムダ）は定数である（この λ が『ラグランジュ乗数』と呼ばれる）。

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + \lambda(x + 2y - 5) \tag{2.14}$$

(2.14) は関数 (2.12) に，(2.13) を $x + 2y - 5 = 0$ のように変形した式を λ 倍したものを加えた形になっている。(2.14) を x および y で（偏）微分すると

$$2x + \lambda = 0$$

$$2y + 2\lambda = 0$$

が得られる。この 2 式から $x = -\frac{1}{2}\lambda$ と $y = -\lambda$ が求まり，これらを (2.13) に代入すると $\lambda = -2$ が得られる。したがって，$x = 1$ および $y = 2$ となり，(2.12) の最小値 5 が求まる。

この例は，xy 平面上の原点を中心とし直線 $x + 2y = 5$ と交わる円のうちで，半径が最も小さいものを求めるという問題，あるいは直線 $x + 2y = 5$ 上の点で原点に最も近い点の距離を求めるという問題になっている。ラグランジュ乗数法ではなく，(2.13) を (2.12) に代入してから微分する，あるいは二次方程式の判別式を使うという方法でも解くことができる。同じ答になることを確認していただきたい。この例は最小値を求める問題であったが，ある制約条件のもとで最大値をを求める問題にもラグランジュ乗数法が用いられる。

x，y の関数 $z = f(x, y)$ の最大値を求めるということが山の頂上を求める問題であるとするならば，ラグランジュ乗数法は山の中腹を通る道（頂上を通ってもかまわない）に沿って最も高い所を見つけるという問題の解法であると考えられる。その道が制約条件である。

なぜこのような方法が可能であるのかをごく一般的なケースについて解説してみる。

> $g(x, y) = 0$ という制約条件のもとで $f(x, y)$ を最大化（または最小化）する問題を考える。

x と y は独立して変化することはできず $g(x, y) = 0$ を満たすように変わらなければならないので x の値に対応して y の値が決まることになる。すなわち y は x の関数となる[*18]。$g(x, y) = 0$ において x の変化とそれに対応した y の変化を考えると

$$g_x + g_y \frac{dy}{dx} = 0$$

[*18] $g(x, y) = 0$ のような形に表される関数を陰関数と呼ぶ。ただし 1 つの x に対して $g(x, y) = 0$ を満たす y がただ 1 つ存在するものとする。

が得られる。g_x，g_y はそれぞれ g の x，y による偏微分であり x だけの変化による g の変化，y だけの変化による g の変化を表す。また $\frac{dy}{dx}$ は x の変化とそれに対応した（$g(x, y) = 0$ を維持するような）y の変化との関係を表す。したがって $g_y \frac{dy}{dx}$ は x の変化に対応した y の変化による g の変化を表している。$g(x, y)$ の値が 0 で一定であるから g の変化の合計は 0 に等しい。この式から $\frac{dy}{dx} = -\frac{g_x}{g_y}$ が得られる。ここで x の変化による $f(x, y)$ の変化を考えると

$$f_x + f_y \frac{dy}{dx}$$

が得られる。f_x，f_y はそれぞれ f の x，y による偏微分であり x だけの変化による f の変化，y だけの変化による f の変化を表す。また $f_y \frac{dy}{dx}$ は x の変化に対応した y の変化による f の変化を表している。f が最大化されるための条件は $f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0$ であり，これから

$$f_x - f_y \frac{g_x}{g_y} = 0$$

となり，さらに

$$\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$$

を得る。

一方この最大化（最小化）問題のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

と表される。偏微分によって

$$f_x + \lambda g_x = 0$$

$$f_y + \lambda g_y = 0$$

が得られ，これらから上記と同じ条件 $\frac{f_x}{g_x} = \frac{f_y}{g_y}$ が導かれる。したがってラグランジュ乗数法を用いて制約条件つき最大化（最小化）問題を解くことができることがわかる。

最大と最小の区別については初級の範囲を超えるので経済数学の書物などを参照していただきたい。

2.8.2　効用最大化問題の解法：間接効用関数，ロイの恒等式

消費者は予算制約式という制約条件のもとで効用を最大化するので，上で述べたラグランジュ乗数法を用いて分析することができる。

■効用最大化　2 財 X，Y を消費する消費者の効用関数は

$$u = u(x, y)$$

予算制約式は

$$p_x x + p_y y = m \tag{2.15}$$

と表される。x，y は X 財，Y 財の消費量を，p_x，p_y はそれぞれの価格を表し，m はこの消費者の所得である。ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = u(x, y) + \lambda(p_x x + p_y y - m) \tag{2.16}$$

となる。(2.16) を x，y で（偏）微分すると

$$u_x + p_x\lambda = 0 \tag{2.17}$$
$$u_y + p_y\lambda = 0 \tag{2.18}$$

が得られる。u_x, u_y は u の x，y についての偏微分であり，限界効用を表す。(2.17), (2.18) より

$$\frac{u_x}{p_x} = \frac{u_y}{p_y} = -\lambda \tag{2.19}$$

が導かれる。これを変形すると

$$\frac{u_x}{u_y} = \frac{p_x}{p_y} \tag{2.20}$$

が得られる。この式の左辺は消費者の限界代替率 (MRS，marginal rate of substitution), すなわち効用を一定に保つような X と Y の消費量の変化の比を表していて，c を定数として $u(x, y) = c$ を x，y で微分することによって

$$u_x dx + u_y dy = 0$$

より

$$\mathrm{MRS} = -\frac{dy}{dx} = \frac{u_x}{u_y} \tag{2.21}$$

のように求められる。(2.20) と (2.21) より消費者の効用最大化の条件として

$$限界代替率 = 相対価格 \tag{2.22}$$

の関係が導かれる。(2.19) の意味を考えてみよう。$\frac{u_x}{p_x}$ は X 財の限界効用を価格で割った値なので 1 円当たりの X 財の限界効用を表すものと見ることができる。同様に $\frac{u_y}{p_y}$ は 1 円当たりの Y 財の限界効用を表す。このように消費者の効用最大化問題におけるラグランジュ乗数（の符号を変えたもの）は各財の 1 円当たりの限界効用に相当する[*19]。

[*19] これは貨幣（あるいは所得）の限界効用と呼ばれることもある。1 円の貨幣あるいは所得の増加によって得られる効用の増加を表しているという意味である。しかし序数的効用の立場に立てば用いる効用関数によって貨幣の限界効用の大きさは異なる。

■例：効用最大化の具体例　具体的に次のような効用関数を仮定する。

$$u = x^2 y \tag{2.23}$$

(2.23) で表される効用を上の (2.15) の予算制約式のもとで最大化する問題を考える。ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = x^2 y + \lambda(p_x x + p_y y - m)$$

となり，これを x，y で微分すると

$$2xy + p_x \lambda = 0 \tag{2.24}$$

$$x^2 + p_y \lambda = 0 \tag{2.25}$$

が導かれる。この両式から λ を消去すると，$p_x x = 2p_y y$ が得られ，これを (2.15) に代入すると

$$x = \frac{2m}{3p_x}$$

$$y = \frac{m}{3p_y}$$

が求まる。これらの式は，この消費者は所得のうち 2/3 を X 財の購入に，1/3 を Y 財の購入に当てることを意味する。このタイプの効用関数は「コブ・ダグラス型効用関数」と呼ばれる[*20]。これらを効用関数に代入すると

$$v = \left(\frac{2m}{3p_x}\right)^2 \left(\frac{m}{3p_y}\right) = \frac{4m^3}{27p_x^2 p_y}$$

が得られる。この v は**間接効用関数** (indirect utility function) と呼ばれる。与えられた価格と所得のもとで効用最大化を実現した結果，間接的に得られる効用関数という意味である。これを p_x，p_y，m でそれぞれ微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial p_x} = -\frac{8m^3}{27p_x^3 p_y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial p_y} = -\frac{4m^3}{27p_x^2 p_y^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{4m^2}{9p_x^2 p_y}$$

となり

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial p_x}\right) \Big/ \left(\frac{\partial v}{\partial m}\right) = \frac{2m}{3p_x} = x$$

---

*20 次の章でコブ・ダグラス型生産関数というのを紹介する。元来「コブ・ダグラス型」というのは生産関数を指す言葉であった。

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial p_y}\right)\Big/\left(\frac{\partial v}{\partial m}\right)=\frac{m}{3p_y}=y$$

を得る。これらを**ロイの恒等式**と呼ぶ。

ここで $p_x x+p_y y=m$ を満たすわずかな x と y の変化をそれぞれ Δx，Δy とすると $\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{p_x}{p_y}$ が得られる。その変化に対する u の変化は（$\frac{\partial u}{\partial x}=2xy$，$\frac{\partial u}{\partial y}=x^2$ より）

$$\Delta u=(2xy-\frac{p_x}{p_y}x^2)\Delta x=x(2y-\frac{p_x}{p_y}x)\Delta x$$

と表される。$x<(>)\frac{2m}{3p_x}$ のとき $y>(<)\frac{m}{3p_y}$ であり，したがって $2y>(<)\frac{p_x}{p_y}x$ であるから，$x<(>)\frac{2m}{3p_x}$ のとき $\frac{\Delta u}{\Delta x}>(<)0$ である。これは x が小さいときはその増加に伴って u が増加し，大きいときは x の増加によって u が減少することを意味するから，$x=\frac{2m}{3p_x}$ のとき u は最大値をとる。

■一般的なコブ・ダグラス型効用関数　効用関数を $u=x^\alpha y^\beta$ として予算制約 $p_x x+p_y y=m$ のもとで効用最大化を考えてみよう。ラグランジュ乗数法を用いると効用最大化の条件は

$$\alpha x^{\alpha-1}y^\beta+\lambda p_x=0,\ \beta x^\alpha y^{\beta-1}+\lambda p_y=0$$

となり，これと予算制約式から

$$x=\frac{\alpha m}{(\alpha+\beta)p_x},\ y=\frac{\beta m}{(\alpha+\beta)p_y}$$

となる。

■「ラグランジュ乗数法の直感的？ 説明」　（ちょっと説明がしつこいかもしれない）ある山がある。基準となる地点から東西方向に測った距離を x，南北方向に測った距離を y として各地点の高さが $f(x,y)$ という関数で表されるとする。直角の壁やそれ以上の斜面，洞窟，尖った所などがなければ f は連続でなめらか（微分可能）である[*21]。$f(x,y)$ の偏微分の意味を考えてみよう。f を x で微分する際 y の値は一定であるとする。したがって f_x は基準地点から南北方向に一定の距離で引いた直線（東西方向に伸びる直線）に沿った高さの変化を表す（それ自身 x，y の関数）。一定とする y の値によって f_x は異なる（高さを測る場所が異なる）。$f_x=0$ とおくと x と y の関係が得られるが，これは南北方向に一定の距離の所で山を東西方向に切った断面の中で最も高い地点を表す。y の値によって最高点の x の値は異なるかもしれない。同様に f_y は基準地点から東西方向に一定の距離で引いた直線（南北方向に伸びる直線）に沿った高さの変化を表す（やはりそれ自身 x，y の関数）。一定とする x の値によって f_y は異なる。$f_y=0$ とおいて得られる x と y の関係は東西方向に一定の距離の所で山を南北方向に切った断面の中で最も高い地点を

[*21] 直角の壁，それ以上の斜面，洞窟などがあると関数にはならない。1 地点の高さが 1 つではなくなる。最も高い所の高さだけをとれば連続にはならない。尖った所があれば連続であってもいくつも接線が引けるのでなめらか（微分可能）ではない。

表す。x の値によって最高点の x の値は異なるかもしれない。$f_x = 0$ と $f_y = 0$ の両方を満たす地点が山全体の最高点（頂上）である。

ここで，山の中腹を通る（頂上を通ってもよいが）道があるとし，その道に沿って山を登って行くことを考えてみよう。道は x と y の方程式で表される。それを $g(x, y) = 0$ とする。例えば $2x + y = 6$ の場合 $g(x, y) = 2x + y - 6$ である。この道に沿ってわずかに東西方向に移動した場合 $g(x, y) = 0$ を満たすように南北方向にも移動しなければならない。東西方向の移動距離を Δx，南北方向の移動距離を Δy とする。東西方向に Δx だけ移動したときの高さの変化は $f_x \Delta x$ に等しい（f_x は x がわずかに変化したときの高さ (f) の変化を表す，Δx が小さければ変化の過程で f_x は一定であると見なしてよい）。さらに南北方向に Δy だけ移動したときの高さの変化は $f_y \Delta y$ に等しいから，全体で高さは $f_x \Delta x + f_y \Delta y$ だけ変化する。x と y は自由に変化するわけではなく $g(x, y) = 0$ を満たすような変化でなければならない。f の変化と同じように考えると x，y の変化による g の変化は $g_x \Delta x + g_y \Delta y$ と表されるが $g(x, y) = 0$（一定）を満たすためには g の変化は 0 でなければならない。すなわち $g_x \Delta x + g_y \Delta y = 0$。この式から

$$\Delta y = -\frac{g_x}{g_y}\Delta x$$

が得られる。これを $f_x \Delta x + f_y \Delta y$ に代入すると

$$\left(f_x - \frac{g_x}{g_y} f_y\right)\Delta x$$

を得る。これが $g(x, y) = 0$ によって表される道に沿った変化による f の変化である。道に沿って最も高い所ではこの変化がゼロになっていなければならないので[*22]

$$\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}$$

が得られる。ラグランジュ乗数法によっても同じ結果が得られることを確認してみよう。ラグランジュ乗数を λ としてラグランジュ関数

$\mathcal{L} = f(x, y) - \lambda g(x, y)$（$-$をつけないこともある，その場合$\lambda$の意味は符号を逆にして考える）

を作る。これを x，y で微分すると

$$f_x - \lambda g_x = 0,\ \ f_y - \lambda g_y = 0$$

となる。左の式から $\lambda = \frac{f_x}{g_x}$ が得られ，それを右の式に代入して少し変形すると $\frac{f_x}{f_y} = \frac{g_x}{g_y}$ が導かれる。

ラグランジュ乗数 λ（またはそれに負号をつけた $-\lambda$）は最大化（または最小化）された解における $g(x, y)$ の値の変化と $f(x, y)$ の値の変化との関係を表す。消費者の効用最大

[*22] 正ならば右（東）に移動するほど高さが高くなり，負ならば左（西）に移動すると高くなる。

化問題であれば $g(x, y) = 0$ は（日本円なら 1 円を単位とした）予算制約，$f(x, y)$ は効用関数なので λ は 1 円当たりの限界効用を表す。また（すぐ次の項目にある）支出最小化問題ならば $g(x, y)$ は効用関数，$f(x, y)$ は支出なので λ は効用 1 単位を得るのに必要な支出を表すから，その逆数 $\frac{1}{\lambda}$ が 1 円当たりの限界効用である。（第 3 章で取り上げる）企業の費用最小化問題の場合は $g(x, y)$ は生産関数，$f(x, y)$ は費用を表すので λ は産出量 1 単位当たりの限界費用である。

2.8.3　支出最小化

以上，一定の予算（所得）のもとでの効用最大化問題を考えたが，逆に一定の効用を実現するための支出を最小化するという問題を考えてみよう。上の例と同じ効用関数 $u = x^2 y$ を仮定し，消費者の効用水準は $\bar{u}$ で一定であるとする。そうすると支出最小化は $x^2 y = \bar{u}$ という制約条件のもとで

$$m = p_x x + p_y y$$

を最小化する問題として表すことができる。ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = p_x x + p_y y + \lambda(x^2 y - \bar{u})$$

となり，これを x，y で微分すると

$$\begin{aligned} p_x + 2\lambda x y &= 0 \\ p_y + \lambda x^2 &= 0 \end{aligned}$$

が導かれる。一般的には

$$\begin{aligned} p_x + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \\ p_y + \lambda \frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

と表される。これらの式から λ を消去すると上の例と同じ $p_x x = 2 p_y y$ という関係が得られ[*23]，$x^2 y = \bar{u}$ から

$$x = \sqrt[3]{\frac{2 p_y \bar{u}}{p_x}}$$

$$y = \sqrt[3]{\frac{p_x^2 \bar{u}}{4 p_y^2}}$$

が求まる。これらは**補償需要関数** (compensated demand function) と呼ばれる。補償とは効用が一定になるように価格の変化などが所得の調整によって補償されていると

[*23] 一般的には $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) / \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{p_x}{p_y}$ という関係が得られる。この式の左辺は限界代替率を表すから限界代替率 = 相対価格 という効用最大化と同じ条件が導かれる。

いう意味である。したがって代替効果による需要の変化のみを表す。補償需要関数を $\tilde{x}=\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$, $\tilde{y}=\sqrt[3]{\frac{p_x^2\bar{u}}{4p_y^2}}$ と表すことにする[*24]。

なお $p_x x=2p_y y$ と $m=p_x x+p_y y$ とから上の例と同じ $x=\frac{2m}{3p_x}$, $y=\frac{m}{3p_y}$ が得られるが，ここでは m は定数ではなく $\bar{u}$ が定数である，

この問題を図で表現すれば，ある効用水準に対応した 1 つの無差別曲線と交わる予算制約線のうちで最も低いものを選ぶという問題になり，無差別曲線が凸であれば効用最大化と同じように無差別曲線と予算制約線が接する点が支出最小化を実現する。図は演習問題とする。

2.8.4　価格の変化と消費：スルツキー方程式，マッケンジーの補題

効用関数を $u=x^2y$ とした例を用いて価格の変化と消費の関係を考えてみよう。p_y は一定で p_x のみが変化するものとする。所得が一定の場合 $x=\frac{2m}{3p_x}$, $y=\frac{m}{3p_y}$ より

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}=-\frac{2m}{3p_x^2}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_x}=0$$

が得られる。また，所得 m の変化による消費の変化は次のようになる。

$$\frac{\partial x}{\partial m}=\frac{2}{3p_x}$$

$$\frac{\partial y}{\partial m}=\frac{1}{3p_y}$$

一方効用が一定の場合は $\tilde{x}=\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$, $\tilde{y}=\sqrt[3]{\frac{p_x^2\bar{u}}{4p_y^2}}$ から

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x}=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x^4}}$$

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x}=\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{\bar{u}}{4p_xp_y^2}}=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2\bar{u}}{p_xp_y^2}}$$

となる。$\bar{u}$ が一定で p_x が変化したときの m の変化は

$$\frac{\partial m}{\partial p_x}=\tilde{x}+p_x\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x}+p_y\frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x}=\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}-\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}=\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

[*24] 補償需要関数はヒックス (Hicks) 型需要関数とも呼ばれる。それに対して（所得効果を含む）通常の需要関数はマーシャル型需要関数と呼ぶ。

と表される。またこのとき m は

$$m = p_x\tilde{x} + p_y\tilde{y} = \sqrt[3]{2p_x^2 p_y\bar{u}} + \sqrt[3]{\frac{p_x^2 p_y\bar{u}}{4}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2p_x^2 p_y\bar{u}}$$

と表される。これは効用を一定に保つのに必要な所得を p_x，p_y，$\bar{u}$ の関数として表すもので**支出関数** (expenditure function) と呼び，$m(p_x, p_y, \bar{u})$ と書くことにする。この関係を使えば $\frac{\partial x}{\partial p_x}$ は

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x^4}}$$

と書き換えることができる。以上により

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}$$

が得られる。右辺第 1 項は所得一定のもとでの p_x の変化による X の消費の変化を，第 2 項は効用を一定に保つような所得の変化に対する X の消費の変化を表している。この式は次のようにも表せる。

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}$$

この式の右辺第 1 項は効用一定のもとでの X の消費の変化すなわち代替効果を表しており，第 2 項は p_x の変化による効用の変化を相殺する所得の変化による X の消費の変化を差し引く形になっている。この部分が所得効果である。

同様にして

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x} - \frac{\partial y}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}$$

が得られる。このケースでは代替効果と所得効果が打ち消しあって $\frac{\partial y}{\partial p_x} = 0$ となっている (一般的な効用関数ならそうなるとは限らない)。これらは**スルツキー方程式**と呼ばれるものの例である。

なお上記の支出関数 m を p_x，p_y で微分すると

$$\frac{\partial m}{\partial p_x} = \sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}} = \tilde{x}$$

$$\frac{\partial m}{\partial p_y} = \sqrt[3]{\frac{p_x^2\bar{u}}{4p_y^2}} = \tilde{y}$$

となる。これらは**マッケンジーの補題**と呼ばれるものの例である[*25]。マッケンジーの補題は支出関数の微分が補償需要に等しいことを意味する[*26]。

[*25] シェパードの補題とも呼ばれる。企業の費用最小化に関する同様の命題がシェパードの補題であるが，数学的には同じものである。

[*26] 本書ではロイの恒等式・マッケンジーの補題・スルツキー方程式の例を示しているだけだが，

2.8.5　間接効用関数と支出関数の性質

1. 間接効用関数
   (i) 所得が一定で一部またはすべての財の価格が高くなれば（すべての財を購入しているとすると）間接効用関数の値は小さくなる。
   もとの所得のままでは価格が変化する前の消費は実現できない，もし他の消費の組み合わせでもとの状態と同じ効用を達成できるものがあるとすると，価格が上がる前には（価格が低く予算が余るので）さらに大きな効用が達成できていたはずであるが，それは価格が上がる前の効用最大化と矛盾する。したがって価格が上がった後は効用が下がっていなければならない。
   (ii) 価格が一定で所得が増えれば間接効用関数の値は大きくなる。
   もとの状態と同じ消費を続ければ予算が余る。それで財を買えば効用が大きくなる。
   (iii) すべての財の価格と所得が同じ割合で大きくまたは小さくなっても間接効用関数の値は変わらない（ゼロ次同次性)。
   予算制約式を書いて両辺をその共通の割合で割るともとの予算制約式が得られるから消費者の行動は変化しない。
   (iv) 価格（ベクトル）について準凸関数 (quasi-convex function) である。
   （ちょっと計算する，ここは飛ばしてもよい）まず準凸関数の意味を述べる。価格（ベクトル）を p，所得を m，間接効用関数を $v(p,m)$ とする。任意の価格と所得の組を (p^*,m^*) として，集合 $\{(p,m)|v(p,w) \leqq v(p^*,m^*)\}$（効用の大きさが (p^*,m^*) における効用よりも大きくないような価格と所得の組の集合）が凸集合であるとき $v(p,m)$ が準凸関数であると言う。凸集合であることを示すにはこの集合に含まれる任意の 2 つの価格と所得の組を結ぶ線分上のすべての価格と所得の組がこの集合に含まれる（集合が出っ張っている，あるいは膨らんでいる感じ）ことを示せばよい。それらの価格と所得の組を (p,m)，(p',m') とする。価格と所得の組 $(\alpha p+(1-\alpha)p', \alpha m+(1-\alpha)m')$（$0 \leqq \alpha \leqq 1$）のときに効用を最大化する消費を y とするとこれは予算制約を満たしているので

$$(\alpha p+(1-\alpha)p')y = \alpha py+(1-\alpha)p'y \leqq \alpha m+(1-\alpha)m'$$

   が成り立つ。したがって $py \leqq m, p'y \leqq m'$ のいずれかが成り立つ。ここで py などは各成分の積の和（ベクトルの内積）である。つまり y は (p,m)，(p',m') のいずれかのときに予算制約を満たしているから y の効用は $v(p,m), v(p',m')$

同志社大学オープンコースウェアに載せた版にはこれらの一般的証明や，補償変分・等価変分（ともに消費者余剰に関連する概念）などの解説を含めてあるので参考にしていただきたい。

の両方を上回ることはない（それぞれそのときの最大の効用である）。したがって y の効用は $v(p^*, m^*)$ より大きくはないので $(\alpha p+(1-\alpha)p', \alpha m+(1-\alpha)m')$ は上の集合に含まれる。

通常の効用関数は準凹関数 (quasi-convex function function) であると仮定される。財を X，Y，効用関数を $u(x, y)$，任意の消費量の組を (x^*, y^*) として，集合 $\{(x, y)|u(x, y) \geqq u(x^*, y^*)\}$（効用の大きさが (x^*, y^*) における効用よりも小さくないような消費量の組の集合）が凸集合であるとき $u(x, y)$ が準凹関数であると言う。不等号の向きが逆であることに注意されたい。この性質は無差別曲線が原点に向かって凸であるという性質と同じである。

2. 支出関数

(i) 一定の効用水準が変わらず一部またはすべての財の価格が高くなれば（すべての財を購入しているとすると）支出関数の値は大きくなる。

価格が上がるので同じ予算ではもとの消費は実現できない。別の消費の組み合わせで同じ予算で同じ効用を達成できるものがあるとすると価格が上がる前にはより少ない予算で同じ効用を達成できていたことになるから支出最小化と矛盾する。したがって支出を増やさなければもとの効用水準を達成することはできない。

(ii) 価格が変わらず一定の効用水準が大きくなると支出関数の値は大きくなる。

もとの消費では大きくなった効用水準を達成することはできない。別の消費の組み合わせで同じ支出でより大きい効用を達成できるものがあるとすると，もとの効用水準をより少ない支出で達成できていたことになるので支出最小化と矛盾する。

(iii) 一定の効用水準が変わらずすべての財の価格が同じ割合で高くなれば支出関数も同じ割合で大きくなる（一次同次性）。

予算を価格と同じ割合で増やせば同じ効用が達成できる。そこから予算を少しでも減らせば効用は下がってしまう。したがって支出関数の値は価格と同じ割合で変化する。

(iv) 価格（ベクトル）について凹関数 (concave function) である。

（ちょっと計算する，凹関数の意味も含め証明を述べる）一定の効用水準を $\bar{u}$，価格（ベクトル）を p として支出関数を $e(p, \bar{u})$ とする。効用が $\bar{u}$ 以上であるという条件のもとでの価格 p における消費を x，p' における消費を x'，価格 $\alpha p+(1-\alpha)p'$ における消費を y とする（$0 \leqq \alpha \leqq 1$）。y の効用は $\bar{u}$ より小さくはないので p において y を購入するのに要する予算は $e(p, \bar{u})$ より小さくはない。p' についても同じことが言える。したがって次の式を得る

$$e(\alpha p+(1-\alpha)p', \bar{u}) = (\alpha p+(1-\alpha)p')y = \alpha p y+(1-\alpha)p' y \geqq \alpha e(p, \bar{u})+(1-\alpha)e(p', \bar{u})$$

やはり py などは各成分の積の和（ベクトルの内積）である。この式に表され

ている

$$e(\alpha p + (1-\alpha)p', \bar{u}) \geqq \alpha e(p, \bar{u}) + (1-\alpha)e(p', \bar{u})$$

が凹関数の意味である。1 変数の場合に図に描くと「上に凸」になる。
なお，企業の費用関数を求める費用最小化は「ある生産関数のもとで一定の産出量を生産できる生産方法（資本，労働投入量の組み合わせ）の中で最も費用が少ない方法を見つける」問題であるから，効用を産出量，効用関数を生産関数，財の消費量を生産要素の投入量，支出を費用と読み替えれば支出関数とまったく同じ議論が当てはまる。

2.8.6　支出関数と効用関数

効用関数を $u = x^2(y+2)$ として支出関数などを考えてみる。記号は説明しないが標準的なものである。予算制約を

$$p_x x + p_y y = m$$

として効用最大化条件を求めると

$$2x(y+2) - \lambda p_x = 0,\ x^2 - \lambda p_y = 0$$

となり $p_x x = 2p_y(y+2)$ から需要関数が

$$x = \frac{2m+4p_y}{3p_x},\ y = \frac{m-4p_y}{3p_y} = \frac{m}{3p_y} - \frac{4}{3},$$

と求まる。$y < 0$ となるときには $y = 0$ とする。$y \geq 0$ となる条件は $m \geq 4p_y$ である。これらを効用関数に代入すれば間接効用関数は

$$v = \frac{4(m+2p_y)^3}{27p_x^2 p_y}$$

となる。

一方 $p_x x = 2p_y(y+2)$ と効用関数から補償需要関数が

$$\tilde{x} = \sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}},\ \tilde{y} = \sqrt[3]{\frac{p_x^2\bar{u}}{4p_y^2}} - 2$$

と求まる。やはり $\tilde{y} < 0$ となるときには $\tilde{y} = 0$ とする。$\tilde{y} \geq 0$ となる条件は $\bar{u} \geq \frac{32p_y^2}{p_x^2}$ である。これを支出関数に入れると $m = 4p_y$ となる。$\bar{u}$ は一定とされる効用の値である。これらを予算制約に代入すると

$$m = \sqrt[3]{2p_x^2 p_y \bar{u}} + \sqrt[3]{\frac{p_x^2 p_y \bar{u}}{4}} - 2p_y = 3\sqrt[3]{\frac{p_x^2 p_y \bar{u}}{4}} - 2p_y$$

を得る。これが支出関数である（m を e と書くこともある)。これを $\bar{u}$ について解き，$\bar{u}$ を v と書くと

$$v=\frac{(m+2p_y)^3}{27p_x^2p_y}$$

が得られる。これは上で求めた間接効用関数である。逆に間接効用関数を m について解くと支出関数が得られる。すなわち間接効用関数と支出関数は互いに逆関数になっている。一定の予算のもとで達成できる最大の効用が間接効用関数によって表されているが，支出関数はその効用を実現できる最小の予算を表すものであるからもとの一定の予算に等しい。

スルツキー方程式を確認しよう。p_x の変化が X 財の需要に与える効果を考える。他も同様である。まず

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}=-\frac{2m+4p_y}{3p_x^2},\ \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x}=-\frac{1}{3p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

左が p_x の変化の全体的な効果，右が代替効果である。左の式に支出関数を代入すると

$$\frac{\partial x}{\partial p_x}=-\frac{1}{p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

となる。所得効果は（マッケンジーの補題を使って）

$$-\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}=-\tilde{x}\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}=-\frac{2}{3p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

であるから代替効果と所得効果を加えると

$$-\frac{1}{3p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}-\frac{2}{3p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}=-\frac{1}{p_x}\sqrt[3]{\frac{2p_y\bar{u}}{p_x}}$$

となり，スルツキー方程式が確認された。

次に上の支出関数から効用関数を復元することを考えてみる。支出関数から間接効用関数が得られ，ロイの恒等式を用いて各財の需要関数が次のように求まる。

$$x=-\frac{\frac{\partial v}{\partial p_x}}{\frac{\partial v}{\partial m}}=\frac{\frac{2(m+2p_y)^3}{3p_x^3p_y}}{\frac{(m+2p_y)^2}{p_x^2p_y}}=\frac{2m+4p_y}{3p_x}$$

$$y=-\frac{\frac{\partial v}{\partial p_y}}{\frac{\partial v}{\partial m}}=\frac{\frac{4(m+2p_y)^3}{27p_x^2p_y^2}-\frac{8(m+2p_y)^2}{9p_x^2p_y}}{\frac{4(m+2p_y)^2}{9p_x^2p_y}}=\frac{m}{3p_y}-\frac{4}{3}$$

y の需要関数から $\frac{m+2p_y}{3p_y}=y+2$ となるが，これと $2\frac{(m+2p_y)}{3p_x}=x$ を間接効用関数に代入すると元の効用関数

$$u=x^2(y+2)$$

が得られる。別のルートとして補償需要関数を使う方法を考えてみよう。マッケンジーの補題によって支出関数から上で求めた補償需要関数 $\tilde{x}$，$\tilde{y}$ が得られる。それぞれを x，y とし，$\bar{u}$ を u と書いて（u を一定とは考えないので）

$$x^2 = \left(\sqrt[3]{\frac{2p_y u}{p_x}}\right)^2 = \sqrt[3]{\frac{4p_y^2 u^2}{p_x^2}} \text{ と}$$

$$y + 2 = \sqrt[3]{\frac{p_x^2 u}{4p_y^2}}$$

を掛け合わせると

$$u = x^2(y+2)$$

が得られる。

2.9　例を少し

1. 次の効用関数を持つ消費者の需要関数を求めよ。記号，予算制約式は標準的なものを用いる。
   (i) $u = \sqrt{x} + y$
   (ii) $u = x^2 + y^2$
   (iii) $u = 3x + y$
   (iv) $u = \min(x, y)$（x，y の小さい方）

   ■解

   (i) ラグランジュ関数を作ると

$$\mathcal{L} = \sqrt{x} + y + \lambda(p_x x + p_y y - m)$$

   x，y で微分してゼロとおくと

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \lambda p_x = 0,\ 1 + \lambda p_y = 0$$

   これらから $\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{p_x}{p_y} = 0$ が得られ，X の需要関数が次のように求まる。

$$x = \frac{p_y^2}{4p_x^2}$$

   予算制約から Y の需要関数は次のようになる。

$$y = \frac{m}{p_y} - \frac{p_y}{4p_x}$$

   m が小さいと y が負になる可能性もあるが，そのときは $y = 0$ とする。

(ii) この問題をラグランジュ乗数法で解くと効用最小化になってしまう。予算制約式から $y=\frac{m}{p_y}-\frac{p_x x}{p_y}$ として効用関数に代入すると

$$u=x^2+\left(\frac{m}{p_y}-\frac{p_x x}{p_y}\right)^2$$

となる。これは x の二次関数であるがいわゆる下に凸の二次関数（最小値を持つ二次関数）なので微分を用いるとやはり効用最小化になる。このときには可能な x の範囲の両端のいずれかまたは両方において最大値が実現する。$0\leqq x\leqq\frac{m}{p_x}$ であり $x=0$ のとき $u=\left(\frac{m}{p_y}\right)^2$，$x=\frac{m}{p_x}$ のとき $u=\left(\frac{m}{p_x}\right)^2$ なので $p_x>p_y$ のときは $x=0,\ y=\frac{m}{p_y}$，$p_x<p_y$ のときは $x=\frac{m}{p_x},\ y=0$ であり，$p_x=p_y$ のときはこれらのいずれもが需要関数となる。

(iii) 限界代替率（限界効用の比）は $\frac{u_x}{u_y}=2$ で一定であるから，相対価格 $\left(\frac{p_x}{p_y}\right)$ が 2 より大きければ $y=\frac{m}{p_y},\ x=0$，2 より小さければ $x=\frac{m}{p_y},\ x=0$ となる。相対価格が 2 に等しければ $2x+y=m$ を満たす非負の x，y のすべてが需要となり得る。

(iv) この場合常に $x=y$ でなければいけないので需要関数は

$$x=y=\frac{m}{p_x+p_y}$$

である。

2. X, Y の 2 財，A, B2 人の消費者からなる交換経済を考える。それぞれの効用関数は $u_A=x^2y,\ u_B=xy$ である。また初期保有量は A が $(6,2)$，B が $(2,8)$ である（左が X，右が Y）。このとき各消費者の需要関数と競争均衡における各財の価格を求めよ。

■解　X，Y の価格を p_x，p_y とすると A のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}=x^2y+\lambda(p_x x+p_y y-6p_x-2p_y)$$

と表される。x，y で微分してゼロとおくと

$$2xy+\lambda p_x=0,\ x^2+\lambda p_y=0$$

と予算制約式 $p_x x+p_y y=6p_x+2p_y$ より

$$x=\frac{2(6p_x+2p_y)}{3p_x},\ y=\frac{6p_x+2p_y}{3p_y}$$

が得られる。これらが需要関数である。同様にして B については

$$x=\frac{2p_x+8p_y}{2p_x},\ y=\frac{2p_x+8p_y}{2p_y}$$

となる。超過需要は A については

$$x-6=\frac{2(2p_y-3p_x)}{3p_x},\ y-2=\frac{2(3p_x-2p_y)}{3p_y}$$

B については

$$x-2=\frac{8p_y-2p_x}{2p_x},\ y-8=\frac{2p_x-8p_y}{2p_y}$$

となる。均衡においては各財の超過需要の和が 0 であるが，X の需給が均衡すれば Y の需給も均衡する（ワルラスの法則）ので

$$\frac{32p_y-18p_x}{6p_x}=0$$

より均衡相対価格は $\frac{p_x}{p_y}=\frac{16}{9}$ となる。A の需要は $(x,y)=(\frac{19}{4},\frac{38}{9})$，B の需要は $(x,y)=(\frac{13}{4},\frac{52}{9})$ である。

3. 現在，将来の消費を c_1,c_2，所得をそれぞれ m_1,m_2，利子率を r，消費者の効用関数を $u=c_1c_2$ として借入制約がある（現在において借入ができない）ときの消費を求めよ。

■解　借入制約がないときの予算制約式は

$$c_1+\frac{c_2}{1+r}=m_1+\frac{m_2}{1+r}$$

であり，現在と将来の消費を求めると

$$c_1=\frac{1}{2}(m_1+\frac{m_2}{1+r}),\ c_2=\frac{1}{2}[(1+r)m_1+m_2]$$

となる。借入制約があると c_1 は m_1 を超えることができない。$c_1\le m_1$ が成り立つ条件は

$$m_1\ge\frac{m_2}{1+r}$$

であり，$m_1=\frac{m_2}{1+r}$ のときは $c_1=m_1$ となる。$m_1<\frac{m_2}{1+r}$ のときは $c_1\le m_1$ の範囲内で効用が最大となる消費量を求めることになる。c_1 と c_2 の限界代替率は $\frac{\partial u}{\partial c_1}=c_2$，$\frac{\partial u}{\partial c_2}=c_1$ より $\frac{c_2}{c_1}$ なので $\frac{c_2}{c_1}\ge 1+r$ である限り c_1 をできるだけ大きくする方がよい。$c_1\le m_1$ ならば予算制約式より $c_2\ge m_2$ であり，$m_1<\frac{m_2}{1+r}$ のとき $c_1<\frac{c_2}{1+r}$ が成り立つ。そのとき $\frac{c_2}{c_1}>1+r$ であるから $c_1=m_1$，$c_2=m_2$ となる。
図で表現すると，c_1 が m_1 より大きくはならないので予算制約線は $c_1=m_1$，$c_2=m_2$ の点より右には存在しない。したがって $c_1=0$ から $c_1=m_1$ までの部分と無差別曲線が接する点が効用を最大にする点である。$c_1=0$ から $c_1=m_1$ までの部分で予算制約線と無差別曲線が接していればその点が消費者によって選ばれるが，借入制約がないときに $c_1=m_1$ となる点よりも右側で両者が接するような場合は，借入制約のあるときには $c_1=m_1$ となる点がコーナー（角の点）となって無差別曲

線が予算制約線と接する形となり，その点が消費者によって選ばれる点である。図 2.25 参照。

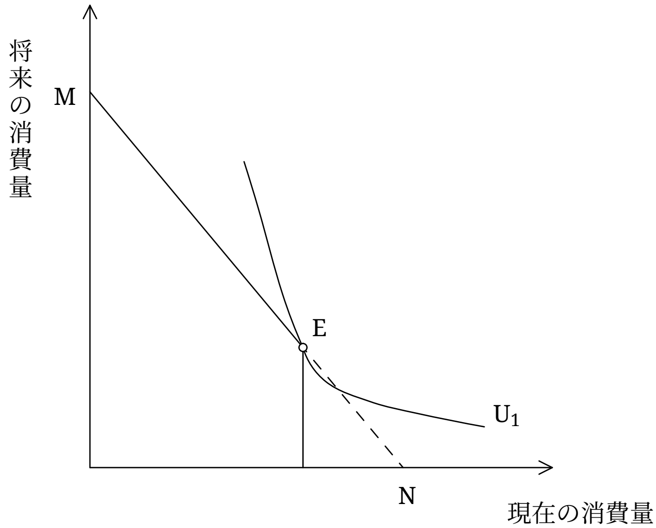


図 2.25　予算制約がある場合の現在と将来の消費

2.10　不確実性と期待効用

この節では不確実性下の人々の行動に関する経済学的理論のごく基礎的な部分を紹介する。不確実性とは将来どうなるかわからないということであるが，まったくわからないのではなく，どのようになる可能性があるかはわかっており，またそれらが起きる確率について何らかの推測を人々が抱いているものとする。そうでなければ意思決定はできない。

2.10.1　確率と期待値

確率とはある事柄（事象）が起きるか起きないかがはっきりしないときにどの程度起きやすいかを表す数である。起きる可能性のあるすべての事柄の確率を合わせて 1 になっていなければいけない。確率には客観的な確率と主観的な確率がある。客観的な確率とはその事象のメカニズムや過去のデータなどから多くの人々が同意している確率であるが，主観的な確率は個人的に知っている事実などにもとづいて決まる。いずれにしても人々が持っている情報にもとづいて確率は決められる。たとえばサイコロを 1 つころがして 1 から 6 まで各々の目が出る確率は，そのサイコロが正しく作られていれば 1/6 である。一方 2 つのサイコロをころがして出た目の和が 4 になる確率は，全体で 36 通りあるそれぞれの場合が起きる確率が等しい（「同様に確からしい」と言う）という前提で考えると，和が 4 になるのは 3 通り（1 と 3，2 と 2，3 と 1）であるからその確率は 1/12 になる。これ

らは客観的な確率である。

「期待値 (expected value)」とは平均値とよく似た意味であるが，平均値が過去に起きた事柄について計算されるのに対して，期待値はこれから起きる事柄についてそれらが起きる確率にもとづいて計算される。2 つのサイコロをころがして出る目の和の期待値は次のようにして求められる。

$$\frac{2+3\times2+4\times3+5\times4+6\times5+7\times6+8\times5+9\times4+10\times3+11\times2+12}{36}=7$$

次のような籤（くじ）あるいは証券を考える。

翌日確率 $\frac{1}{2}$ で 2000 円が受け取れ，確率 $\frac{1}{2}$ で 0 円になる

このくじが 800 円で売られているとして買うだろうか？ このくじの平均的な収益は 1000 円であるが，2000 円になることがある一方で 0 円になってしまうこともある。このような場合リスク（危険）があると言う。これをどのような価格で買うか買わないかはその人がリスクに対してどのように考えるかにより，900 円では買わないが 800 円なら買う人，1000 円で買う（1000 円を越えると買わない）人，中には 1200 円でも買う人がいるかもしれない。最初のタイプの人を「危険回避的」，2 番目の人を「危険中立的」，最後のタイプの人を「危険愛好的」と言う。危険中立的とは平均の収益だけで判断しリスクを気にしないことを意味する。危険回避的，危険愛好的はそれぞれリスクを嫌うこと，リスクを好むことを意味する。一般的に人々は危険回避的であると考えられるがその程度は人によって異なるであろう。すなわち上記のくじを 800 円以下なら買う人もいれば，500 円以下でなければ買わない人もいるだろう。このような不確実性のもとでの人々の行動を効用関数を使って分析することを考える。人々のくじに対する選好が次の条件を満たすものとする。

1. 『（連続性） 3 つのくじ L_1，L_2，L_3 があり，ある個人が L_3 より L_1 を，L_2 より L_3 を好むとき，L_1 と L_2 をある比（1 より小さい正の数）で組み合わせたくじで L_3 と無差別になるようなものがある。』
   ここで 2 つのくじを組み合わせるとは以下のようなことを意味する。
   L_1: 翌日確率 $\frac{1}{2}$ で 2000 円が受け取れ，確率 $\frac{1}{2}$ で 0 円になる
   L_2: 翌日確率 $\frac{1}{2}$ で 1500 円が受け取れ，確率 $\frac{1}{2}$ で 300 円が受け取れる
   が 2 つのくじであるとしてこれらを $p:1-p(0\leqq p\leqq 1)$ の比で組み合わせると次のようなくじになる。
   $pL_1+(1-p)L_2$: 翌日確率 $\frac{1}{2}p$ で 2000 円が，確率 $\frac{1}{2}(1-p)$ で 1500 円が，確率 $\frac{1}{2}(1-p)$ で 300 円が受け取れ，確率 $\frac{1}{2}p$ で 0 円になる
   この条件は好きなくじと嫌いなくじ，およびその中間的なくじがあったとき，好きなくじと嫌いなくじを適当に組み合わせたもので中間的なものと無差別（効用が等

しい）になるものがあるということである。p を大きくすれば組み合わせたくじは L_1 に近づき，小さくすれば L_2 に近づくので妥当な条件だと思われる。

2. 『（独立性） 上記の条件における L_1 と L_2 を組み合わせたくじと L_3 はそれらについて無差別な個人にとっては同等のものであると見なし，さらに別のくじとの組み合わせにおいてこれらを置き換えても個人の選好に変化はない。』
   この条件はいくつかのくじを組み合わせたくじにおいてその中の 1 つ（それ自体が複数のくじを組み合わせたものである場合も含めて）をそれと無差別な別のくじと置き換えたものはもとの組み合わせと無差別であることを求めるものであり，くじに関する人々の選好の合理性を要求する条件である。

これらの条件のもとで人々の効用を比較的簡単な形で表すことができる。なお以前に説明した推移性はここでも仮定する（すでに第 1 の条件において L_1，L_2，L_3 に関する選好の部分で推移性を用いている）。

定理 2.10.1 (期待効用定理)**.** 上の条件のもとで

L: 確率 p で x 円，確率 $1-p$ で y 円受け取れる

というくじ L に対するある個人の効用は，$u(x)$，$u(y)$ をそれぞれ確実に x，y が得られるときの効用の適当な表現として，それらの期待値

$$u(L) = pu(x) + (1-p)u(y)$$

で表される。

このとき効用関数 u を $u' = au + b$（$a(>0)$，b は定数）で置き換えると

$$u'(L) = pu'(x) + (1-p)u'(y) = pau(x) + pb + (1-p)au(y) + (1-p)b = au(L) + b$$

となり，2 つのくじ L_1 と L_2 について $u(L_1) \geqq u(L_2)$ のときには $u'(L_1) \geqq u'(L_2)$ が成り立つので u と u' とは同一の選好を表す。

証明. $x > y$ と仮定する。実現可能な最大の収益，最小の収益をそれぞれ h，l で表す。条件 1（連続性）によりある確率 r_x で h，$1-r_x$ で l が実現するというくじと，確実に x が得られるというくじ（くじではないが一応これもくじに含める）とが無差別になるような $r_x(0 < r_x < 1)$ が存在する。ただし $x = h$ のときは $r_x = 1$，$x = l$ のときは $r_x = 0$ である。同様にある確率 r_y で h，$1-r_y$ で l が実現するというくじと，確実に y が得られるというくじとが無差別になるような r_y が存在する。そこで x，y の効用を $u(x) = r_x$，$u(y) = r_y$ で表すことにする。したがって $u(h) = 1$，$u(l) = 0$ である。a，b を定数として $u(x) = ar_x + b$，$u(y) = ar_y + b$ と表してもよい。

x，y をそれぞれ上記のくじと同等のものと見なせば，条件 2（独立性）によりくじ L は

確率 $pr_x + (1-p)r_y$ で h 円，確率 $p(1-r_x) + (1-p)(1-r_y)$ で l 円受け取れる

というくじと同等のもであると見なすことができる。したがってくじ L の効用は $pr_x+(1-p)r_y$ で表されるが，これは $pu(x)+(1-p)u(y)$ に等しい。x，y の効用を $u(x)=ar_x+b$，$u(y)=ar_y+b$ と表す場合には L の効用は $a[pr_x+(1-p)r_y]+b=p(ar_x+b)+(1-p)(ar_y+b)$ と表され，やはり $pu(x)+(1-p)u(y)$ に等しい。 □

この定理は，あるくじに対する人々の効用はそのくじに含まれるそれぞれの場合の効用の期待値に等しくなるように表すことができるということを意味する。このようにして表現された効用は期待効用 (expected utility) と呼ばれ，L の期待効用を $E(L)$ と表すこともある（E は Expected value の E)。1 つ例を考えてみよう。くじの結果得られる収益を x として 2 人の人，個人 1 および 2 の効用関数が次のようであるとする。

$$u_1(x)=6800x-x^2$$

$$u_2(x)=8200x-2x^2$$

上記のくじ L_1 から得られる期待効用はそれぞれ $E_1(L_1)=\frac{1}{2}(6800\times 2000-2000^2+0)=4800000$，$E_2(L_1)=\frac{1}{2}(8200\times 2000-2\times 2000^2+0)=4200000$ となるが，個人 1 はこのくじと確実に 800 円が得られるくじについて無差別となるのに対して，個人 2 はこのくじと確実に 600 円が得られるくじについて無差別であるから，個人 2 の方がより危険回避的であると言える。a，b を定数として u_1 を

$$u_1'=a(6800x-x^2)+b$$

のように書き直しても今の計算には変化がない（u_2 についても同様)。序数的な効用の場合にはある効用関数 u に対して $u'=au+b$ とするだけではなく $u'=u^2$ や $u'=u^3$ としても同じ選好すなわち同じ無差別曲線を表すことになるが，期待効用の場合は $u'=au+b$ のときだけ同一の効用関数と見なされ，$u'=u^2$ や $u'=u^3$ の場合は u と u' は異なる効用関数と考えなければならない。

この期待効用理論にもとづいて保険や金融など不確実性に直面する人々の様々な行動が分析される。また，後の章で解説するゲーム理論では人々（プレイヤーと呼ぶ）の効用はこの期待効用の意味で表されている。「期待効用定理」の条件を満たす効用関数を，最初にその研究をした人々の名をとってフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン (von Neumann-Morgenstern) 型効用関数と呼ぶ。

われわれが保険会社の人件費その他の経費支払いや株主への利益分配に回される保険料を支払ってでも火災保険や地震保険，自動車の任意保険などに入るのは，災害に会ったり事故を起こしたりして大きな負担を背負うリスクがあるからであり，株式投資においていくつかの企業の株に分散投資するのもやはりリスクに対応するためである。また犯罪に対する刑罰を重くするのは，罪を犯して逮捕されたときのリスクを高めることによって（合

理的判断にもとづく）犯罪を犯す誘因（インセンティブ）を小さくしようとするものであると考えることができる[*27]。

■保険の例　利益や損失など金額で表される結果についてのある人の効用関数が次のようであるとする。

$$u(x) = 300 + 140x - x^2$$

x は金額を表す。地震保険に入るかどうかを考える。地震が起きないときの経済的な利益を $x = 30$（たとえば 100 万円を 1 単位とすると 3000 万円），地震が起きたときは $x = 0$ であるとする（地震の損害は 30 である）。この地震が起きたときにその損害を完全に埋め合わせてくれる保険があるとしていくらまでなら保険料を支払ってもよいだろうか。ある期間に地震が起きる確率は $\frac{1}{10}$ であるとする（保険料もその期間の保険料である）。期待効用は次のように計算される。

$$E(u) = 3600 \times \frac{9}{10} + 300 \times \frac{1}{10} = 3270$$

保険料を払えば地震が起きても損害を被らないので不確実性はなくこの人の効用は保険料を y とすれば

$$u(30 - y) = 300 + 140(30 - y) - (30 - y)^2 = 3600 - 80y - y^2$$

と表される。$3600 - 80y - y^2 = 3270$ より $y^2 + 80y - 330 = 0$ が得られ

$$y = -40 + \sqrt{1930} \approx 3.9$$

が求まる。地震による損害そのものの期待値は -3 であるから危険中立的ならば 3 の保険料しか払わないはずであるが危険回避的な行動により 3.9 までの保険料を支払う可能性がある。

■アレのパラドックス　ノーベル賞受賞者アレによる期待効用理論に対する反例。期待効用理論はたいへん便利であるが実際の人間の行動と合わない面もある。次のようなくじを考える。

1. 1 回目

   オプション A：確実に 1000 円がもらえる。

   オプション B：10% の確率で 2500 円がもらえて，89% で 1000 円，そして 1% は賞金なし。

[*27] しかし同じわれわれが（筆者は買わないが）宝くじを買ったり，馬券を買うのはなぜであろうか（競馬はスポーツでもあるが）。これについては，危険回避的な人も生活に響かない程度のちょっとしたリスクに対しては正の効用を感じると考えるべきであろう。中にはギャンブルや株式投資にはまって身を持ち崩す人もいる。そのような人は危険愛好的になっていると考えられるが，危険愛好的というのは人間として正常ではなく病的な状態であると思われる。詳しくは心理学が対象とすべき問題である。

2. 2 回目

　オプション A：11% の確率で 1000 円がもらえて，89% は賞金なし。

　オプション B：10% で 2500 円もらえて，90% は賞金なし。

それぞれのくじでどちらのオプションを選択するかをアンケートしてみるとほとんどの人は 1 回目は A を，2 回目は B を選ぶ。しかし，期待効用理論に基づいて 1000 円，2500 円の効用を u_1，u_2 とすると（0 の効用は 0）1 回目は

$$u_1 > 0.1u_2 + 0.89u_1$$

より

$$0.11u_1 > 0.1u_2$$

を意味するのに対して，2 回目は

$$0.11u_1 < 0.1u_2$$

を意味するので矛盾する。1 回目は 10% で 2500 円もらえるということより 1% で何もなしという方を重視するから A を選び，2 回目は 1000 円と 2500 円の確率の差がわずか（とは言え 1 回目の B で何も得られない確率と同じであるが）なので 2500 円もらえる可能性のある B を選ぶと考えられる。このような矛盾点もあるが期待効用理論は非常に扱いやすいのでゲーム理論を含め経済学で広く用いられている。一方で心理面も考慮に入れて人間の経済行動を研究する行動経済学も発展してきている。

2.10.2　危険回避的，危険中立的，危険愛好的な効用関数について

不確実性を含む問題と通常の消費問題との違い　不確実性を含まない通常の消費の場合，財の種類（余暇も含めて）が 1 種類であれば持っている予算をすべて使ってその財を買うしかない。したがって少なくとも 2 つ以上の財がなければ消費の選択が問題にはならない。一方不確実性を含む場合は財の種類が 1 種類であっても「くじ」（不確実性を含む資産）の選択が意味のある問題になる。以下そのような設定で考える。

基数的効用と序数的効用　通常の消費の場合，無差別曲線（財の種類が 2 つの場合）が同じであれば効用関数の形が異なっていても消費者の行動は同じである[*28]。したがって効用関数全体に定数を加えたり，定数倍したりするだけではなく，2 乗したり 3 乗したり，指数関数にしたり対数をとったり，あるいはそれ以外の操作を行っ

[*28] 財の種類が 3 つ以上の場合は無差別曲線ではなく無差別曲面（4 次元以上の場合も曲面と呼ぶがイメージはできない）になるが基本的な論理は同じである。効用が一定となるような各財の消費量の組を表す点の集合が無差別曲面であり，適当な条件が成り立てば予算制約式のもとで効用を最大化する消費量の組が求まる。

ても，効用の大きさの順序に変化がなければ消費者の行動は変わらず同一の効用関数と見なされる。しかし不確実性を含む問題の場合（「期待効用定理」のもとで）くじを構成するそれぞれの場合の効用の期待値をとってくじを比較するので，効用の値に定数を加えるのと，定数倍する以外の操作（2 乗，3 乗するなど）を行うとくじの選択が変わってきてしまうからそのようにして作った効用関数は異なる効用関数と見なさなければならない。期待効用定理を満たす効用関数がフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数であり，このタイプの効用関数については定数を加えることと定数倍する操作だけが許される。

危険回避的，危険中立的または危険愛好的な効用関数についてごく簡単な例を紹介する。あるリスクのある資産（危険資産）への投資を行って得られる収益を x とし，それぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で $x=100$，$x=0$ であるとする。また他にリスクのない安全な資産があり，確実に $y=50$ の収益が得られるものとする。すなわち平均の収益は等しい。投資家が次の 3 つの効用関数を持つ場合をそれぞれ考えてみよう。

1. $u=x$（あるいは $a>0$，b を定数として $u=ax+b$）
危険資産への投資から得られる期待効用は $E[u(x)]=\frac{100+0}{2}=50$ であり，安全資産への投資から得られる期待効用も $E[u(y)]=50$ であるから，この投資家はどちらへの投資からも同じ期待効用を得る。このような投資家は危険中立的 (risk neutral) であると言われ，リスクを気にせず平均の収益だけで投資先を選ぶ。
2. $u=x^2$（あるいは $u=ax^2+b$）
危険資産への投資から得られる期待効用は $E[u(x)]=\frac{100^2+0^2}{2}=5000$ であり，安全資産への投資から得られる期待効用は $E[u(y)]=50^2=2500$ であるから，この投資家は危険資産への投資の方を選ぶ。このような投資家は危険愛好的 (risk loving) であると言われ，平均の収益が等しければリスクが大きい方の投資先を選ぶ。正常な人間であれば危険愛好的にはならない。
3. $u=\sqrt{x}$（あるいは $u=a\sqrt{x}+b$）
危険資産への投資から得られる期待効用は $E[u(x)]=\frac{\sqrt{100}+0}{2}=5$ であり，安全資産への投資から得られる期待効用は $E[u(y)]=\sqrt{50}=5\sqrt{2}\approx 7.1$ であるから，この投資家は安全資産への投資の方を選ぶ。このような投資家は危険回避的 (risk averse) であると言われ，平均の収益が等しければリスクが小さい方の投資先を選ぶ。正常な人間であれば危険回避的である。
危険中立的な人もいないと考えられるが，負に相関するものも含め様々な投資先があって充分にリスクを分散させられるならば，危険回避的な人も危険中立的な人と同じような行動をとるかもしれない。

以上の効用関数を簡単に図解してみよう。図 2.26 のように，危険回避的な効用関数は下に凹 (concave)（上に凸），危険愛好的な効用関数は下に凸 (convex)，危険中立的な効

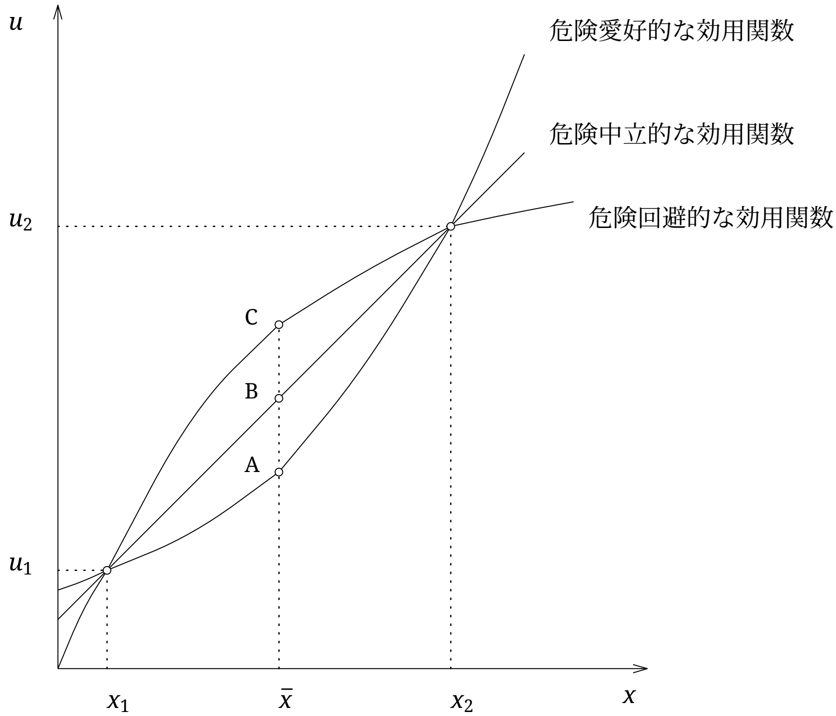


図 2.26　危険中立的・回避的・愛好的な効用関数のグラフ

用関数は線形 (linear) のグラフで描かれる。$\bar{x} = \frac{x_1+x_2}{2}$ である。x_1 と x_2 において 3 つの効用関数の値が等しいと仮定すると，その中間の $\bar{x}$ に対する危険中立的な人の効用の値は点 B における $\bar{u} = \frac{u_1+u_2}{2}$ に等しいが，危険回避的な人の効用は（点 A）$\bar{u}$ より小さく，危険愛好的な人の効用（点 C）は $\bar{u}$ より大きい。確率 $\frac{1}{2}$ ずつで x_1，x_2 を手にするくじの期待効用はすべての人にとって $\bar{u}$ に等しいので，危険回避的な人はそのようなくじよりも確実に $\bar{x}$ が得られる場合を好み，逆に危険愛好的な人はくじの方を好む。また危険中立的な人にとってはどちらも等しい効用を与える（無差別）。

■保険の例 2　x を所得として 3 人の人の効用関数が次のようであるとする。

$$u_1 = 20x - x^2,\ u_2 = 20x,\ u_3 = 20x + x^2$$

確率的に起きる事故によって -4 の損害を被る可能性に備えて保険に加入する。事故が起きたときは $x = 0$，起きないときは $x = 4$ であり，事故が起きる確率は $\frac{1}{2}$ であるとする。保険によって損害は全額が保障される。すると保険料を y とすれば，保険に加入したときには事故が起きても起きなくても $x = 4 - y$ である。このとき効用関数 u_1 の人は約 2.25 までの保険料を払う。

$$20(4-y)-(4-y)^2=32$$

より

$$y^2+12y-32=0$$

となり，$y=-6+2\sqrt{17}\approx 2.25$ を得る。

同様にして効用関数 u_2 の人は 2 までの，効用関数 u_3 の人は約 1.83 までの保険料を払う。

$$20(4-y)+(4-y)^2=48$$

より

$$y^2-28y+48=0$$

となり，$y=14-2\sqrt{37}\approx 1.83$ を得る。

効用関数 u_1 の人は危険回避的，効用関数 u_2 の人は危険中立的，効用関数 u_3 の人は危険愛好的である。

2.11　情報の非対称性の問題 - 中古車の売買，保険

2.11.1　中古車市場

詳しくは次の章で説明するが，市場経済を分析する際に通常は財の売り手と買い手は十分に情報を持っている，あるいは情報を手に入れるのに費用はかからないものと仮定する。しかし現実の経済においてはそうではないかもしれない。ここでは売り手と買い手が異なる情報を持っているときに市場がうまく機能しなくなる可能性があるという問題について簡単に触れてみたい。

中古車を持っていて売りたいと思っている人（売り手）が何人か，買いたいと思っている人（買い手）が何人かいるとする。売り手には 2 種類ありそれらを A，B とする。A の車は品質のよいものでこれを 200 万円で売りたいと思っている。一方 B の車は品質がよくなく 100 万円で売りたいと思っているとする。一方すべての買い手はよい車ならば 240 万円，よくない車ならば 120 万で買う用意があるものとする。車の品質が買い手にわかっているのならば何の問題もない。よい車は 200 万～240 万円，よくない車は 100 万円～120 万円で売れるであろう。しかし，買い手はそれぞれの車の品質がわからず推測するしかないものとする。これが情報の非対称性である（お互いが持っている情報が異なる）。もしある車が等しい確率（つまり $\frac{1}{2}$ の確率）でよい車，またはよくない車であるとすれば，買い手は（危険中立的であれば）

$$\frac{1}{2}\times 120\text{ 万円}+\frac{1}{2}\times 240\text{ 万円}=180\text{ 万円}$$

支払ってもよいと思うであろう。危険回避的な行動を考えれば 120 万円以上ではあるが 180 万円より小さい値になる。売り手の方はどうであろうか？ よい車を持っている人は 200 万円以上でなければ売らないのでよくない車だけが売りに出ることになる。しかし買い手もそのことがわかるであろうから，180 万円ではなく 120 万円以下でなければ買わない。結局よくない車は取り引きされるがよい車の取引は行われないことになるのである。

上の不確実性を扱ったところで紹介した保険の市場においても，情報の非対称性がもたらす問題がある。けがをしたときにもらえる傷害保険を考えてみる。注意深い人と不注意な人がいて本人は自分がどちらであるかを知っているが，保険会社にはわからないものとする。保険会社が平均的なけがの確率にもとづいて保険料を決めるとすると，不注意な人は自分がけがをしやすいと思っているので割安な保険料となるからその保険に入ろうとする。一方注意深い人は，自分はけがをしにくいと思っているであろうから割高な保険料になってしまうのでその保険には加入しようとしないかもしれない。結果として保険会社にとっては望ましくないけがをしやすい不注意な人が多く加入し，本来なら入って欲しい注意深い人はあまり入ってくれないということになって，そのままの保険料では赤字になる可能性が出てくる。このような現象は**逆選択** (adverse selection) と言われる。より良いものが選択されて残るのではなく，良いものがいなくなって悪いものが残ってしまうという意味である。逆淘汰とも言う。逆選択がもたらす影響を小さくするためには保険会社がより綿密に加入者を調べることが必要になると考えられるが，以下で述べるスクリーニングは非対称情報のもとでこれに対応する 1 つの方法である。

もう 1 つ保険に伴う問題がある。自転車の盗難保険を考えてみよう。保険に入ると盗まれても買い換えるお金がもらえるとなると保険に入っていない，あるいは保険がない場合と比べて人々は盗難に対してより不注意になってしまうかもしれない。保険に入った人々がどの程度の注意を払っているかを保険会社が調べることは難しいのでこれも情報が非対称となる問題の例である。保険を提供する結果としてより盗難が起きやすくなれば保険会社はそのことも考慮して保険料などを決めなければならず，場合によっては採算がとれなくなって保険が提供されなくなる可能性もある。これに対処する方法としては，盗難にあった自転車を買い換える費用の全額を保険でカバーせずに半額や 3 分の 2 程度の額にしてある程度本人に負担させる方法や，自動車の任意保険にあるように一度盗難にあった（自動車の場合は事故を起こした）人が次に保険に入るときの保険料を高くすることなどが考えられるであろう。このように保険に加入することが人々の行動に悪い方に影響するというような問題は**モラル・ハザード** (moral hazard) と呼ばれる。

2.11.2　逆選択に対する対応 - スクリーニング

前節の保険の例を使って逆選択に対応する方法を考えてみよう。タイプ 1，タイプ 2 の人々がいて，ある事故を起こす可能性がある。事故が起きないときの経済的利益は 30，事故が起きたときの利益は 0 である（事故による損害は 30）とし，各タイプが事故を起こす

確率と効用関数が次のようであるとする。

1. タイプ 1：事故を起こす確率は $\frac{1}{10}$，効用関数は $u_1(x) = 300 + 140x - x^2$
2. タイプ 2：事故を起こす確率は $\frac{1}{5}$，効用関数は $u_2(x) = 600 + 160x - 2x^2$

（保険なしに）事故が起きたときは $x = 0$，起きないときは $x = 30$ である。この事故に関する保険を販売する保険会社は上記の 2 つのタイプの人々がいることとそれぞれが事故を起こす確率，さらに効用関数は知っているが誰がどのタイプかはわからないので区別して保険加入を認めたり断ったりはできない。タイプ 1 の人々が保険に入らないときの期待効用は上の例で計算したように 3270 であり，一方タイプ 2 の人々の期待効用は

$$3600 \times \frac{4}{5} + 600 \times \frac{1}{5} = 3000$$

である。損害がすべて保障されるような保険があるとして効用が 3000 になる保険料を y とすると

$$600 + 160(30 - y) - 2(30 - y)^2 = 3600 - 40y - 2y^2 = 3000$$

より $y \approx 10$ となるからタイプ 2 の人々は 10 までの保険料を支払うことが可能である。保険会社が 1 種類の商品だけを用意し，損害を全額保障するとするとタイプ 1 の人々は上で見たように 3.9 までの保険料しか払わない。その保険料で保険を販売するとタイプ 2 の人々も購入する。タイプ 1 とタイプ 2 の人々が同数いるとすると $\frac{3}{20}$ の確率で事故が起こるから損害額の期待値は 4.5 となり 3.9 の保険料では採算がとれない。採算がとれるような保険料にするとタイプ 1 の人が買ってくれない。これが逆選択であった。全額保障しないとしても 1 種類の保険しか販売しないならば同じことが言える。そこで保険会社が次に示す 2 つの商品を用意すると考えてみよう。

1. 保険 1：損害保障額は 30 で保険料は 6。全額保障されるので事故が起きたときも起きなかったときも損害は（保険料を含めて）6。
2. 保険 2：損害保障額は 10 で保険料は 1。事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-21，起きなかったときは -1。

それぞれの保険を購入したときの各タイプの人々の期待効用を求める。

1. タイプ 1：保険 1 から得られる効用は確率的ではなく 3084 である。
   一方，保険 2 から得られる期待効用は
   $$3519 \times \frac{9}{10} + 1479 \times \frac{1}{10} \approx 3315 > 3270$$
   であるからこれらの人々は保険 2 を購入する。
2. タイプ 2：保険 1 から得られる効用は確率的ではなく 3288(¿3000) である。
   一方，保険 2 から得られる期待効用は
   $$3558 \times \frac{4}{5} + 1878 \times \frac{1}{5} \approx 3222$$

　　であるからこれらの人々は保険 1 を購入する。

以上のような保険を販売すれば保険会社が個々人のタイプを見抜けなくても本人の行動によってそのタイプが明らかになるように仕向けることができる。このケースではタイプ 2 の人が全額保障される保険を購入することができるが，一般にリスクの大きい人が全額保障される保険を購入できる。また，タイプ 1 の人が購入する保険もタイプ 2 の人が購入する保険も保険会社にとってはちょうど採算がとれるものとなっている。これは保険会社間の競争を想定したものである。競争的でなければ保険料をもう少し高くすることも可能である。

このように情報が非対称な状況において情報を持っていない側（この例では保険会社）が保険商品などの仕組みを工夫してその情報が間接的に表されるようにする行動をスクリーニング (screening) と呼ぶ[*29]。この例ではタイプ 1 とタイプ 2 の人々が異なる効用関数を持っていると仮定した。つまりタイプ 2 の方がリスクが大きく，かつより危険回避的であると仮定していた。しかし両タイプが同じ効用関数を持っていてもリスクが異なればスクリーニングが可能となる。演習問題 45 を参照されたい。

情報の非対称性に関する重要な問題として「シグナリング」があるが，これはゲーム理論の所で解説する。シグナリングはスクリーニングとは逆に情報を持っている側が間接的にその情報を明らかにするような行動をとることを意味している。

2.12　公共財

2.12.1　公共財とは

これまで考えてきた財はすべて私的な財 (private good) であった。それに対して公共財 (public good) と呼ばれるものがある。警察官は犯罪防止のためにパトロールして犯罪が起きたときには犯人の逮捕に努力する。このような警察のサービスの利益はそのサービスに対して対価を支払ったかどうかに関わらず全ての人々に及ぶ（逮捕される人にとっては利益ではないが)。対価を支払わなくても警察サービスを消費することから何人も排除されない。このような性質を「消費の非排除性」と言う。それに対して食物や衣服や住宅サービスなど私的な財（サービスを含む）は対価を支払わなければ消費することはできない（政府によって無料で支給される場合を除く)[*30]。これらの財やサービスについては対価を支払わない人は消費から排除される。

警察サービスのもう 1 つの特徴は，ある人が警察サービスを消費したからといって他の人が消費できる警察サービスの量が減少することはないという点である。つまり複数の

---

*29 スクリーニング (screening) とはふるい分けをすることを意味する。

*30 住宅サービスとは住宅を借りて住むことによって受けられる便益であり，その対価として家賃を支払う。持ち家の場合は自分が住宅サービスの供給者であるとともに需要者でもある。家賃は払わないが，国民所得には「帰属家賃」として計上される。

人々が同時に警察サービスを消費できる。ここで「警察サービスを消費する」とは，泥棒に入られたので警察官に家まで来て調べてもらうといったことだけではなく，日常的な警察の活動によって人命と財産が守られていることを言う。それに対して食物や衣服や住宅サービスはある人がそれらを消費すれば他の人は同時に消費することはできない。ある人がある財を消費すると他の人はまったく消費できないか，消費できる量が減少するとき「消費は競合する」と言う。消費が競合しない財の性質は「消費の非競合性」と呼ばれる。

消費の非排除性と非競合性を備えた財を「公共財」と言う。警察サービス以外にも国防や外交なども同様である。一般の道路は誰かの消費（利用）を排除することはできないので「非排除性」は満たされるが，混んでくると人々の消費は競合するので「非競合性」は満たされないかもしれない。一方有料道路は料金を払わない人々の消費を排除できるが，混んでいなければ「非競合性」が満たされる。

警察サービスや国防などは対価を支払わない者の消費を排除することは不可能であるか，もし可能であったとしても，ある人がお金を払わないからといってその人を警察の保護の対象からはずしたり，軍隊（自衛隊）の防衛対象からはずすというのは国家が存在する目的にそぐわないし手続きも面倒である（費用がかかる)。このように消費の非排除性が存在する財については、消費者はまったく費用を負担しなくてもそれを消費できるので，その財の費用を負担しようとしなくなる。このように費用を負担しないで財・サービスを享受することを「ただ乗り (free ride)」と言う。多くの人々がただ乗りしようとして費用を負担しなければ，民間企業ではその財を供給することができない。したがってこのような財は強制的に費用を徴収できる政府の手に頼らざるをえない。しかし政府が公共財をうまく供給できるかどうかはまた別問題である。

2.12.2　公共財の最適供給

x_i を各個人の私的財（1 種類とする）の消費量，y を公共財の供給量，1 人 1 人の効用関数を $u_i(x_i, y)$ とする。世の中にこの 2 種類の財しか存在しない。各自の所得を m_i（定数とする)，私的財の価格は 1，公共財の価格（費用）は p，人数を n とすると

$$\sum_{i=1}^{n}(m_i - x_i) = py$$

が成り立つ。$m_i - x_i$ は各個人から徴収する税であり，この式は政府の予算制約式と見なすことができる。政府はこの予算制約のもとで人々の効用の加重平均 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(x_i, y)$ を最大化する ($\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$)。加重平均が最大化されていれば各自の比重 α_i を一定として，誰かの効用を上げるためには他の誰かの効用を下げなければならないのでパレート効率的（パレート最適）な状態になっている。ラグランジュ乗数を λ とするとラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i(x_i, y) + \lambda(\sum_{i=1}^{n}(m_i - x_i) - py)$$

となる。これを x_i，y で微分すると，各 i について

$$\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \lambda = 0$$

および

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial y} - p\lambda = 0$$

が得られる。上の式から

$$\alpha_i = \left(1/\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\lambda$$

が得られ，それを下の式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial y}\right)/\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right] = p \tag{2.26}$$

が求まる。この式は

> 1 人 1 人の公共財の限界効用と私的財の限界効用の比（公共財と私的財の限界代替率）の和が公共財の価格に等しくなるように公共財の供給量を決めることが最適である

ことを意味する（これはサミュエルソン (Samuelson) の条件と呼ばれる）。効用関数が同じなら，人数が多いほど一定の供給量について公共財と私的財の限界代替率の和が大きくなるので，この式を満たす公共財の供給量は一般に人数が多いときの方が大きい。

ラグランジュ乗数法を用いない場合は，予算制約式から

$$y = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n}(m_i - x_i)$$

を求めて個人の効用関数に代入し，その加重平均

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x_i, \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}(m_j - x_j)) \tag{2.27}$$

を最大化する ($\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$)。これで同じ結果が得られることの確認は演習問題とする。

2.12.3　リンダール均衡

1 人 1 人がどのように公共財の費用を負担するかという問題を考えてみよう。まず政府が各自の負担率 t_i（負担の額ではない）を決める。そのとき公共財の供給量を y_i とすると各個人の私的財の消費量は $x_i = m_i - pt_i y_i$ となる。p，m_i，t_i を与えられたものとして個人の効用最大化（$\max u_i(x_i, y_i)$）を考えると，（$y_i = \frac{m_i - x_i}{pt_i}$ であるから）その条件は

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{pt_i}\frac{\partial u_i}{\partial y_i} \tag{2.28}$$

となる。そこで各個人はこの条件を満たすような公共財供給量 y_i を自らの希望として政府に申告する。すべての人の希望が一致すればそれが政府が選ぶ公共財の供給量となる。もし一致しなければ大きい供給量を希望した人の負担率を引き上げ，小さい供給量を希望した人の負担率を引き下げる。限界効用逓減（あるいは公共財と私的財との限界代替率逓減）を仮定すれば負担率 t_i が上がると $\frac{\partial u_i}{\partial y_i}$ を（$\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ に対して）相対的に大きくしなければ (2.28) が満たされないので希望する公共財供給量 y_i を下げてくる。逆に負担が減った人は希望する公共財供給量を上げる。このようにして調整を続ければ各自の希望が近づいていき均衡において等しくなる。そのような均衡を**リンダール均衡** (Lindahl equilibrium) と呼ぶ。均衡における公共財供給量を y とする。(2.28) より

$$\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right) / \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) = pt_i$$

が得られ，これをすべての人について足し合わせると $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$ なので

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial y_i}\right) / \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)\right] = p$$

が導かれる。この式は上記の (2.26) と同じである。したがってリンダール均衡においてはパレート効率性が成り立っている。

大きな公共財供給量を希望すれば負担が上がるのでなるべく小さな希望を申告しようというインセンティブが生じる。自分が小さな希望を出しても他の人が大きな希望を出してくれれば少ない負担でそれなりの公共財を消費できる（これが「ただ乗り」である)。しかしみんながそう考えると全体として希望が小さくなり供給される公共財の量は小さくなってしまう[*31]。したがって政府が個人の効用関数を知っているのでない限り社会的に望ましい公共財が供給されることにはならない。

2.12.4　グローブズメカニズム (Groves mechanism)

グローブズメカニズムと呼ばれる別の方法を紹介しよう。2 人の人，A，B がいて，ある公共財を作るかどうか，また費用の負担をどうするかということを考える[*32]。その公共財に対する各自の評価（貨幣で測った効用）は v_A，v_B で表される。公共財を作るのに必要な費用は c であるとする。次のような手順で費用負担を決める。

1. 各自が評価額 $r_i(i = A, B$ 以下同じ) を申告する。ただし $r_i = v_i$ であるとは限らない。
2. $r_A + r_B \geqq c$ ならば公共財を作るが，$r_A + r_B < c$ ならば作らない。

[*31] この状況は次章で扱うゲーム理論で言うところの「囚人のジレンマ」の一種である。
[*32] 以下の内容は梶井厚志・松井彰彦『ミクロ経済学 戦略的アプローチ』（日本評論社）を参考にしたものである。

3. 公共財を作る場合の各自の費用負担額は c から相手の申告額を引いたものとする。すなわち A の負担額は $c - r_B$，B の負担額は $c - r_A$ である。

もちろん 2 人の真の評価の和 $v_A + v_B$ が c より大きければ（小さくなければ）公共財を作る価値がある。しかし，この方法において各自が真の評価 v_i を申告するインセンティブを持つであろうか？ B の申告を r_B として A の申告 r_A と（公共財の供給とその費用負担から得られる）A の効用との関係について以下のケースに分けて考えてみよう。

1. $v_A + r_B - c > r_A + r_B - c \geqq 0$ のとき（$r_A < v_A$）
   このときは v_A を申告してもそれより小さい r_A を申告しても公共財は生産され，いずれの場合も A の効用は $v_A + r_B - c$ である。A の申告と A の負担とには関係がないことに留意されたい。
2. $v_A + r_B - c \geqq 0 > r_A + r_B - c$ のとき（$r_A < v_A$）
   このとき正直に v_A を申告すれば公共財は生産され A の効用は $v_A + r_B - c$ になるが v_A より小さい r_A を申告すれば公共財は生産されず（公共財に関する）効用は 0 である。v_A を申告した方が大きな（少なくとも小さくない）効用が得られる。
3. $0 > v_A + r_B - c > r_A + r_B - c$ のとき（$r_A < v_A$）
   v_A を申告してもそれより小さい r_A を申告しても公共財は生産されず効用は 0 である。
4. $r_A + r_B - c > v_A + r_B - c \geqq 0$ のとき（$r_A > v_A$）
   このときは v_A を申告してもそれより大きい r_A を申告しても公共財は生産され，いずれの場合も A の効用は $v_A + r_B - c$ である。
5. $r_A + r_B - c \geqq 0 > v_A + r_B - c$ のとき（$r_A > v_A$）
   このとき正直に v_A を申告すれば公共財は生産されないが v_A より大きい r_A を申告すれば公共財は生産される。しかしそのとき得られる効用はマイナスになる（$0 > v_A + r_B - c$）ので v_A を申告した方が大きな効用（この場合は 0）が得られる。
6. $0 > r_A + r_B - c > v_A + r_B - c$ のとき（$r_A > v_A$）
   v_A を申告してもそれより大きい r_A を申告しても公共財は生産されず効用は 0 である。

以上によってこの費用負担の方法であれば正直に v_A を申告することによって少なくとも他の申告をするよりも悪くなることはなく，より大きな効用を実現できる場合もあることがわかる。B についても同様に考えることができる。この方法で費用負担を決めればうまく行くように思われるがなかなかそうではない。公共財の費用は c であるが 2 人の負担額の合計はいくらになるのであろうか？ 各自が正直に申告すれば A の負担額は $c - v_B$ で B の負担額は $c - v_A$ であるからその和は $2c - (v_A + v_B)$ である。もし $v_A + v_B > c$ であれば（費用よりも価値の方が大きければ）$2c - (v_A + v_B) < c$ となって公共財を生産するのに要するお金を集めることができなくなってしまう。そこでこれを次のように修正した負担方

法を考えてみよう。

(修正されたグローブズメカニズム)　公共財を生産するしないに関わらず，もし相手が費用の均等割り（2 人ならば半分）よりも大きな申告をしているならば相手の申告額と均等割り額の差額が自分の負担額に追加される。

この方法において A が得られる効用と r_A の関係を次のように整理することができる。

1. $r_B \leqq \frac{c}{2}$ のとき
   - (i) 公共財が生産される（$r_A + r_B \geqq 0$）ならば効用は $v_A + r_B - c$。
   - (ii) 公共財が生産されない（$r_A + r_B < 0$）ならば効用は 0。以上 2 つのケースの効用は上の方法と同じなので同様の議論で v_A を申告しても損をすることはない。
2. $r_B > \frac{c}{2}$ のとき
   - (i) 公共財が生産される（$r_A + r_B \geqq 0$）ならば効用は $v_A - \frac{c}{2}$。この場合の負担額は $c - r_B + (r_B - \frac{c}{2}) = \frac{c}{2}$ である。
   - (ii) 公共財が生産されない（$r_A + r_B < 0$）ならば効用は $\frac{c}{2} - r_B < 0$。このときは公共財が生産されなくてもお金を取られてしまう。
     公共財が生産される場合と生産されない場合の A の効用の差を計算すると $v_A + r_B - c$ となる。$v_A + r_B - c \geqq 0$ であれば公共財が生産される方が効用が大きく（少なくとも小さくなく），また v_A を申告することによって公共財が生産されるようにできるので v_A を申告すればよい（公共財が生産されるようにできれば他の申告でもよいが v_A でもよい）。逆に $v_A + r_B - c < 0$ ならば公共財が生産されない方が効用が大きいが，このときは v_A を申告しても公共財は生産されない。

以上によってこの修正された費用負担においても v_A を申告することは少なくとも悪くないことが言える。では負担の合計はどうなるであろうか？ 公共財が生産されるならば $v_A + v_B \geqq c$ が成り立っているので（正直に申告するとして）少なくともどちらかの人が費用の半額に等しいかそれより大きい申告をしている。$v_B > \frac{c}{2}$ かつ $v_A < \frac{c}{2}$ と仮定してみよう。このとき A の負担額は $c - v_B + v_B - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}$ で，B の負担額は $c - v_A$ であるからその合計は $\frac{3}{2}c - v_A$ となるが，仮定より $v_A < \frac{c}{2}$ なのでこれは c より大きい。$v_A \geqq \frac{c}{2}$ かつ $v_B \geqq \frac{c}{2}$ の場合は A の負担額も B の負担額も $\frac{c}{2}$ になり合計は丁度 c になる。以上によりこの修正された方法では公共財を生産すべきときには必要な費用を集めることができる。しかし，生産しない場合にもどちらかの人の評価が $\frac{c}{2}$ を越えているならばもう一方の人からお金を取ることになってしまう。また公共財が生産される場合も一方の申告額が費用の半分より小さい場合は余分にお金を集めることになる。

■補償原理　パレート効率性だけに基づけば，誰も損をせず誰かが得をするような経済状況の変化でなければ認められないが，それではなかなか問題を解決できない。それに代わ

るものとして考えられたのが補償原理である。

カルドア基準 ある変化によって利益を得る人が損をする人の損失を補償することを考える。補償してもなお利益が残っているならばその変化を認める。

ヒックス基準 ある変化によって損をする人（A）がその変化を阻止することを考える。変化を阻止することによって，その変化によって利益を得るはずの人（B）が失う利益を（A が）補償したときに，その人（A）が損失を被る（変化した方がまし）ならばその変化を認める（阻止することが損だから）。これは逆の変化がカルドア基準を満たさないということである[*33]。

2.13 マッチング理論

Gale と Shapley（シャープレイ）によるマッチング理論の簡単な例を紹介する。Shapley は主にこの業績（他にもシャープレイ値などたくさん業績はあるが）で 89 歳にして 2012 年度のノーベル経済学賞を受けた。

n 人ずつの男性と女性がいて男性，女性はそれぞれ異性に対して明確な順序づけができる好みを持っているとする。n は 2 以上の有限な自然数である。男性と女性がペアを作る問題を考える。このような問題をマッチングと呼ぶ。ペアの作り方すなわちマッチングには安定なものとそうでないものがある。安定マッチングとは次の条件を満たすものである。

> そのマッチングを構成するあるペアとは異なるペアを組んだときに，新しいペアの二人がともにもとのペアより好ましい相手を得る場合，もとのマッチングは安定ではない。そのような組，すなわちペアを組みかえて二人ともにより幸せになるような男女の組がないマッチングが安定マッチングである。

Gale と Shapley によるマッチングの手順（アルゴリズム）は次のようなものである。

1. まず男性全員が自分が最も好む女性にペアを申し出る。まったく重複がなければそこでこのプロセスは終わる。重複があれば，各女性は申し出を受けた男性の中で（一人の場合も含めて）最も好む男性と暫定的なペアを作る（その男性をキープする）。それ以外の男性は断る。
2. 申し出た女性に断られた男性全員がそれぞれの次に好む女性（他の男性と暫定的なペアを組んでいる女性も含めて）に申し出をする。
3. 各女性は申し出を受けた男性と（もしいれば）キープしている男性の中で最も好む男性をキープする。キープする男性が変わるかもしれない。そのときキープからは

[*33] 変化した後の状態からもとに戻すことを考えると，それによって利益を得る A の人が損失を被る B に人に補償しようとしてもし切れない。

ずされた男性は断られた男性となる。
4. キープからはずれた男性も含めて断られた男性全員がそれぞれの次に好む女性（暫定的なペアを組んでいる女性も含めて）に申し出をする。
5. 以下同様。

この手順によって有限回のプロセスで必ず安定マッチングが得られることが言える。理由は以下の通り。

1. まず，すべての女性が誰かから申し出を受けた時点でプロセスは終了する。最後に申し出を受ける女性（最後の女性）が申し出を受けたとき，それ（それら）以外の女性はすべて互いに異なる一人ずつの男性をキープしているので最後の女性に申し出る男性は一人だけである。競合が生じないので断る女性はおらず，それ以上にプロセスは進まない。
2. そこに至るまでに要するプロセスは有限である。最後の女性が一人だとして，それ以外の女性が全員の男性から申し出を受けるとすると，その申し出の数は $n(n-1)$ である。1 回目に n 人全員の男性が誰かに申し出をするから，その後のプロセスにおいて各回一人の男性が申し出をするとしても $n(n-1)$ の申し出が生じるのに要するプロセスは最大 $n(n-1)-(n-1)=(n-1)^2=n^2-2n+1$ である。次のプロセスで最後の女性が誰かから申し出を受けるので全体のプロセスは n^2-2n+2 より多くはないから有限回のプロセスでマッチングは終わる。最後の女性が二人以上ならもっと早く終わる。
3. その結果実現するマッチングにおいては，ある男性 A にとって，ペアになっている女性より好む女性 a がいれば先にその女性に申し出をして断られているはずである。一方女性 a は A よりも好ましい男性とペアを作っている。したがってペアを組みかえて二人ともにより幸せになるような男女の組はないのでマッチングは安定なマッチングになっている。

例を考えてみよう。4 人の男性 A, B, C, D と，4 人の女性 a, b, c, d がいて選好が次のようになっているとする。

$$A : abcd,\ B : adcb,\ C : bcad,\ D : bcad$$

$$a : CDBA,\ b : DCAB,\ c : DABC,\ d : CABD$$

たとえば $A : abcd$ は A が abcd の順で女性を好むことを意味する。上記のプロセスを考えてみよう。

1. 1 回目の申し出に対して a は B を，b は D をキープし，A と C が断られる。
2. 次に A は b に，C は c に申し出をし，A は断られて C は受け入れられる。
3. 次に A が c に申し出をして受け入れられ，C ははじかれる。

4. 次に C が a に申し出をして受け入れられ，B ははじかれる。
5. 次に B が d に申し出をして受け入れられそこでプロセスは終わる。

この結果

$$A-c,\ B-d,\ C-a,\ D-b$$

というマッチングができる。これは安定的なマッチングになっているがみんなが最愛の相手とペアになっているわけではない。相思相愛は D-b だけ。

以上は男性側から申し出をする場合であるが女性側からすればどうなるであろうか？

1. 1 回目の申し出に対して C は a を，D は b をキープし，c と d が断られる。
2. 次に c は A に，d も A に申し出をし，d は断られて c は受け入れられる。
3. 次に d が B に申し出をして受け入れられそこでプロセスは終わる。

この結果

$$A-c,\ B-d,\ C-a,\ D-b$$

という同じマッチングができる。しかし，一般に男性から申し出る場合と女性から申し出る場合が同じマッチングをもたらすとは限らない。別の例を考えてみよう。

$$A:abcd,\ B:dacb,\ C:bcad,\ D:cbad$$

$$a:CDBA,\ b:DABC,\ c:DABC,\ d:CADB$$

男性側から申し出をする場合は 1 回の申し出で決着がつき A-a, B-d, C-b, D-c というマッチングができる。一方女性から申し出る場合は

1. 1 回目の申し出に対して C は a を，D は c をキープし，b と d が断られる。
2. 次に b は A に，d も A に申し出をし，d は断られて b は受け入れられる。
3. 次に d が D に申し出をして断られる。
4. 次に d が B に申し出をして受け入れられる。

この結果

$$A-b,\ B-d,\ C-a,\ D-c$$

というマッチングができる。前者の結果においては男性の好みが完全に反映されており，後者の結果では女性の好みが可能な限り反映されている。とは言っても後者の結果では女性 d は最も嫌いな B とペアを組まなければならない。それは前者においても同じであり，残念ながら安定なマッチングにおいては常にそうなってしまう。一般的には次のことが言える。

> 男性（または女性，以下同様）が申し出をする場合に実現する安定マッチングにおいて各男性が得る結果は他のどの安定マッチングにおいて得る結果よりも悪くはない。

証明は以下の通り。

各男性にとって，何らかの安定マッチングにおいてペアを組む可能性がある女性をその男性にとって「可能な女性 (possible woman)」と呼ぶことにする。証明は帰納法で行う。上記の手順のある段階において各々の男性がどの可能な女性からも断られていないと仮定し（このプロセスの最初においては誰も断られていない），次の段階において女性 a がある男性 B をキープして男性 A を断ったとする。そのとき a は A にとって可能ではないことを示す。男性 B はそれまでに断られた，したがって可能ではない女性を除く (可能な女性からは断られていないと仮定しているので) すべての女性の中で女性 a を最も好んでいる。ここで男性 A が女性 a とペアを組み，他のすべての男性はそれぞれにとって可能な女性とペアを組むようなマッチングを考える。そのマッチングにおいては男性 B は女性 a よりも好まない女性とペアを組まされている。そのとき男性 B と女性 a がペアを組むことによって二人ともより幸せになることができるのでもとのマッチングは安定ではなく，男性 A にとって女性 a は可能ではない。以上の議論は，上記の手順においては各女性が，「いかなる安定的なマッチングにおいてもペアを組む可能性がない男性」だけを断ることを意味している。したがって各男性にとって，この手順において実現するマッチングにおいてペアを組む相手よりも好ましい相手とペアを組むような他の安定マッチングはない。

上で述べた性質を持つマッチングは男性最良マッチング (men-optimal matching) と呼ばれる。同様にして女性から申し出をする場合は女性最良マッチング (women-optimal matching) が実現する。

■1 対多のマッチング　学校が入学生を選ぶ問題を考える。n 校の学校と m 人の入学希望者（生徒）がいる。$m > n$ である。各学校には定員（学校によって異なるかもしれない）が定められている。各入学希望者は学校について，学校は入学希望者について明確な順位づけのできる選好を持っている。入学者を決めるのに上で見た男女のペアを決めるのと同様の手順を考えるが，それによって実現する結果において，ある入学希望者が決まった学校より好む別の学校に入ることがその学校にとっても幸福である，つまり決まっている生徒の誰かよりも好ましい生徒であるような場合はもとの決め方（マッチング）は安定ではない。そのような入学希望者がいないマッチングが安定マッチングである。ここの例ではどの学校にも入れてもらえない生徒が存在するかもしれない。手順は次の通り。

1. まず入学希望者全員が自分が最も好む学校に申し込みをする。各学校は申し込みを受けた生徒の中で定員の範囲で好む順に暫定的に入学を認める候補に入れる（その生徒をキープする)。それ以外の希望者は断る。希望者が定員以下であれば全員受け入れる。
2. 断られた入学希望者全員がそれぞれの次に好む学校（定員を満たしている学校も含めて）に申し込む。
3. 各学校は申し込みを受けた生徒と（もしいれば）キープしている生徒を含めて定員の範囲で好む順にキープする。キープする生徒が変わるかもしれない。そのとき

キープからはずされた生徒は断られた生徒となる。

4. キープからはずれた生徒も含めて断られた生徒全員がそれぞれの次に好む学校（定員を満たしている学校も含めて）に申し込む。
5. 以下同様。

この手順によって有限回のプロセスで必ず安定マッチングが得られる。理由は以下の通り。

1. まず，すべての生徒がどこかの学校の候補に入るかまたはすべての学校に断られた時点でプロセスは終了する。断られた生徒ももはや申し込むべき学校がない。
2. そこに至るまでに要するプロセスは有限である。生徒による学校への申し込みの数は nm で有限であるから有限回で終了する。
3. その結果実現するマッチングにおいては，ある生徒 A にとって，自分が候補に入っている学校より好む学校 a があれば先にその学校に申し込みをして断られているはずである。一方学校 a は A よりも好ましい生徒を候補にしている。したがって候補を組みかえて生徒も学校もより幸せになるような組み合わせはないのでマッチングは安定なマッチングである。
4. さらにこのマッチングは男女のペアの場合と同様の意味で生徒にとって最良なマッチングである。

   各生徒にとって，何らかの安定マッチングにおいて入学を認められる可能性がある学校をその生徒にとって「可能な学校」と呼ぶ。上記の手順のある段階において各々の生徒がどの可能な学校からも断られていないと仮定し，次の段階において学校 a が何人かの生徒をキープして生徒 A を断ったとする。そのとき a は A にとって可能な学校ではないことを示す。a にキープされた生徒はそれまでに断られた，したがって可能ではない学校を除くすべての学校の中で a を最も好んでいる。ここで生徒 A が学校 a に入学を認められ，他のすべての生徒はそれぞれにとって可能な学校に入学を認められるマッチングを考える。そのマッチングにおいて少なくとも一人の生徒（A によって候補からはずされる生徒，その一人を生徒 B とする）は学校 a よりも好まない学校に入学することになる。そのとき生徒 B が学校 a に入学することによって学校も生徒もよりよい結果になるのでもとのマッチングは安定ではなく，生徒 A にとって学校 a は可能ではない。以上の議論は，上記の手順においては各学校が，「いかなる安定的なマッチングにおいても入学を認めない生徒」だけを断ることを意味している。したがって各生徒にとって，この手順において実現するマッチングにおいて入学を認められる学校よりも好ましい学校に入るような他の安定マッチングはない。

■例　学校は 2 校 A, B で生徒が a, b, c, d, e の 5 人，各学校の定員は 2 名とする。選好は以下の通り

$$A : dbaec,\ B : abced$$

$$a : AB,\ b : AB,\ c : AB,\ d : BA,\ e : BA$$

まず 1 回目の申し込みに対して A は a と b を受け入れ c を断る。B は d, e をともに受け入れる。次に c が B に申し込んで受け入れられ d がはずされる。次に d が A に申し込んで受け入れられ a がはずされる。次に a が B に申し込んで受け入れられ e がはずされる。次に e が A に申し込んで断られプロセスは終了する。その結果 A には b と d が，B には a と c が入学し，e はどこにも入学できない。

第 3 章

企業の行動

■この章のキーワード　生産，生産要素，資本，正常利潤，超過利潤，生産関数，限界生産力，費用最小化，規模の経済性，等費用線，可変費用，固定費用，平均費用，平均可変費用，限界費用，完全競争，利潤最大化，参入障壁，長期の均衡，消費と生産の効率性，独占企業，限界収入，製品差別化，独占的競争，寡占，クールノー均衡，ベルトラン均衡，シュタッケルベルク均衡，外部性，シェパードの補題，規模に関する収穫一定の生産関数，CES 生産関数

この章では供給曲線を構成するもとになる企業の行動について考える。

3.1　生産と企業

3.1.1　生産

財（サービスを含む）を消費者に供給すべく用意することが**生産** (production) である。水・大麦・ホップなどを使ってビールを作るのはもちろん生産であるが，経済学では生産という言葉を日常使うよりも広い意味で用いる。工場で作られたビールを問屋の倉庫に運ぶのも生産であるし，それを小売り店の店先に並べるのも，消費者に販売するのも生産である。つまり『生産』には運送，保管，販売などの物流・流通過程における仕事も含まれている。また物質的な財だけでなく，家庭教師が生徒に教える，不動産屋がアパートを紹介する，弁護士が法律相談を受けるなどのサービスの提供も生産である。一般に生産とは，財やサービスを用いて別の財やサービスを作る，あるいはそれらの財やサービスの形，機能，場所などを変えることである。

3.1.2　生産要素と資本

財やサービスの生産に用いられる財やサービスを**生産要素**と呼ぶ。具体的には原材料，燃料（石炭や電力），部品，労働 (labor)，機械や工場などの生産設備，土地などである。

これらのうち労働，生産設備，土地はそれ自体が生産物に化するのではなく，それらのもつ機能が生産に用いられると考えられる。したがって正確には労働，生産設備，土地の**サービス**が生産に用いられると言うべきである。労働サービスとは一定時間の労働を企業に提供することであり，土地のサービスとは一定の土地を一定の期間利用する権利を与えることである。同様に生産設備のサービスも一定期間機械などを利用する権利を与えることである。生産設備は**資本** (capital) とも呼ばれる。通常資本とは生産に必要なものを買うために用いられる資金のことを指すが，経済学では資金とともにその資金で購入された機械や工場などの財を指して資本と呼ぶ。これらは原材料や部品などとともに，財としては**資本財**（あるいは生産財）と呼ばれ，消費者が消費する食料品や家電製品などの**消費財**と区別される。

原材料や部品，燃料などはそれらを他の企業から買ってきて完成品の生産に用いる企業にとっては生産要素には違いないが，これらは完成品に至るまでの生産過程の途中に位置するいわゆる**中間生産物**であり，これらも資本・土地・労働などによって生産されたものである。したがって生産過程全体を一体のものとして見ると，生産要素は資本・土地・労働の三つになる[*1]。三つの生産要素を考えると議論が複雑になるので本書のモデルでは（土地の存在を軽視するわけではないが）資本と労働の 2 つの生産要素を用いて財の生産が行われているものと想定する。

生産要素を投入物 (input)，生産された財を産出物 (output) と呼ぶこともある。

3.1.3　生産技術

投入物から産出物を得る方法に関する知識を**生産技術**と呼ぶ。どのような投入物をどのように組み合わせればどのような産出物を得られるかについての知識が生産技術である。

3.1.4　生産要素に対する報酬

資本・土地・労働などの生産要素のサービスが生産に用いられれば報酬を受け取る。土地に対する報酬とは，一定期間（1 年とか 1 ヵ月）土地を利用することに対して支払われるものであり**地代**と呼ばれる。企業が地主から土地を借りて生産に用いる場合は土地サービスに対する報酬として地代を支払う。自己の所有する土地を使う場合は自分自身が地主であると考える。労働に対する報酬は一人の労働者に一定時間働いてもらうことに対する報酬であり**賃金率**（一定時間当たりの賃金，時間給や日給）で測られる。

[*1] 機械などの生産設備も生産された財であるが原材料や部品，燃料などとは生産における用いられ方が異なる。原材料は加工されて完成品に化け，部品は完成品の中に組み込まれ，燃料は燃やされてそれ自体としては存在しなくなってしまう。しかし，生産設備はそのものが加工されるわけではなく労働や土地とともに生産に貢献し完成品が出来上がった後も残っている。マクロ経済学において『中間生産物の産出は国内総生産には含まれない』という話が出て来るがここの議論と同様の主旨である。

資本に対する報酬は，資本家が投資した資本によって購入された資本財を一定期間用いることに対する報酬であり，**資本レンタル**と呼ばれる（資本レンタル率・レンタル料，資本の価格とも言う）。株式の購入という形で企業に資本を提供している場合には株式配当が資本レンタルである。企業活動に必要な資金は株主が投資するだけではなく金融機関から借り入れたり，社債を発行して外部から調達したりもしている。そのような場合企業は他人の金を一定期間利用する権利というサービスを得ている。それらに対して支払われる利子も資本レンタルである。銀行，信用金庫などの金融機関は，預金者や投資家がこのようなサービスを企業に与えるのを仲介するというサービスを提供する企業である。生産要素に対する報酬は企業の側から見れば生産要素の価格である。整理すれば，資本レンタルとは具体的には主に銀行などの金融機関や債権者（債券保有者）に支払う『利子』，および『株式配当』からなる。このうち株式配当については後で述べる正常利潤に相当する部分だけが含まれる。

3.1.5　生産要素の単位

生産された財と同様に生産要素の投入量とその報酬も一定の単位で測られる。労働については一人の人の 1 時間の労働を 1 単位とし，資本については 1 円の資本の 1 年間の投資を 1 単位とするというように。その場合賃金率は時間給になり，資本レンタルは利子率と同じ次元になる。

3.1.6　企業

経済において生産に携わる経済主体を**企業**と呼ぶ。経済学で企業というのは生産をしていることが条件のすべてであるから，株式会社や有限会社などの会社組織になっていることは必要ない。一人でやっていても企業であり，床屋や家庭教師も企業である。

3.1.7　企業と株主および企業の目的

企業は誰のものであり誰が支配しているのか。株式会社である企業を構成する人々は株主，経営者（取締役），従業員である。経営者が自ら大株主である場合もあるし従業員が株の一部を所有していることもあるが，機能的にはそれぞれ異なった役割を果たしている。従業員は契約にもとづいて仕事をしているが，経営者も株主の依頼を受け株主によって選ばれて経営に当たっている。従業員は労働サービスを供給し株主は資本サービスを供給する。経営者も経営的な仕事（労働）をして報酬を受け取っているという意味では従業員の一種であると考えることができる。企業に資本を出資している株主が企業の所有者であり，企業が稼ぐ利潤は株主のものとなる。実際には株主があまり力を持っていなくて経営者が企業を支配している，つまりその企業の経営方針を決定しているケースが多いかもしれないが，企業組織についての研究が本書で取り扱う経済学の主なテーマではないの

で，企業は株主によって支配され株主の利益のために行動していると考える。したがって，『企業は利潤を追求する存在である』，正確には『利潤の最大化を図る存在』であると考える。その利潤とは以下で述べる超過利潤である。株主は自らが当然受け取るべき正常利潤を受け取った上で，さらにそれを越える超過利潤をできるだけ大きくすべく企業を運営している。

3.1.8　利潤と超過利潤

資本と労働を生産要素として企業の利潤は次のように表される。

利潤 = 財の価格 × 産出量 − 賃金率 × 労働投入量 − 資本レンタル × 資本投入量

記号で書いた方が便利だが，利潤：π，価格：p，産出量：x，賃金率：w，資本レンタル：r，労働投入量：L，資本投入量：K とすると

$$\pi = px - wL - rK$$

となる。企業の利潤は生産した財やサービスを販売して得た収入あるいは売り上げから，その生産にかかった費用を引いた残りであるが，資本が当然受け取るべき通常の報酬，すなわち経済全体で平均的に株主が受け取れると考えられる世間相場並の報酬の部分を**正常利潤**と呼んで利潤から差し引き費用に含める。この正常利潤は上で述べた資本レンタルに当たるものである。正常利潤を引いた残りの利潤を**超過利潤**と呼ぶ。経済学で単に利潤と言えば超過利潤の意味であり，会計上の利益とは異なっている。正常利潤は一国の経済全体の状況によって，特に資本の供給と需要の関係によって決まる。ある企業が世間の平均以上に儲かっていれば超過利潤は正になりその企業の株主は平均以上の収益を得る。逆に平均以下の儲けであれば株主の収益も平均以下となる[*2]。

3.1.9　利潤最大化問題の考え方

企業の利潤最大化問題を次の 2 つの段階に分けて考える。

1. 費用を最小化する生産方法の選択 - 費用最小化問題
   生産要素を組み合わせて生産が行われるが，どのような組み合わせが最も効率的であるかを考えなければならない。具体的にはある財を一定の量生産するのに最も費用が少なくてすむ生産要素の組み合わせを求めるという問題を考える。
2. 利潤を最大化する産出量の選択
   各産出量について費用最小化問題を解くことによって効率的な生産の方法がわかれば，それぞれの産出量についていくらの費用を必要とするかがわかる。そうする

[*2] 後の節で『長期の均衡』においては企業の利潤はゼロになるという議論が出てくるが，利潤がゼロとは超過利潤がゼロという意味である。

と，財の価格が与えられれば各産出量を生産して得られる利潤がわかる。その上で最も利潤が大きくなる産出量を選ぶ。

3.2　限界生産力と収穫逓減の法則

3.2.1　生産関数

生産要素の投入量を増やせば産出物の産出量は増え減らせば減るというように，生産要素の投入量と産出量とには関係がある。生産要素として資本と労働を考え，その関係を次のような**生産関数**で表す。

$$x = f(L, K)$$

L，K はそれぞれ（一定期間における）労働と資本の投入量，x は（同じ期間における）財の産出量である。消費者の効用関数では効用が序数的に測られているのに対して生産関数では実際の財の産出量が測られているという点を除けば，効用関数と生産関数とは数学的に同じ構造をもっている。この式は L の労働と K の資本を投入すれば x の量の産出物が得られるということを表している[*3]。L，K，x はそれぞれ適当な単位で測られる。

3.2.2　限界生産力

各生産要素が生産にどの程度貢献しているかを表す概念として生産要素の**限界生産力** (marginal product) がある。これは以下のように定義される。

労働の限界生産力　資本の投入量を一定として労働の投入量を 1 単位増やしたときに産出量がどのくらい増えるかを表す[*4]。

資本の限界生産力　労働の投入量を一定として資本の投入量を 1 単位増やしたときに産出量がどのくらい増えるかを表す。

労働の限界生産力の定義においては資本の投入量が一定の状態で考え，資本の限界生産力の定義においては労働の投入量が一定の状態で考えるということとともに，労働や資本 1 単位当たりの産出量（平均生産力とでも呼べる）ではなく**追加的な 1 単位の投入**によって産出量がどのように増えるかを考えているということが重要である。

[*3] この式は財の産出量 x は労働投入量 L，資本投入量 K によって決まるということ，そしてそのことだけを意味するものである。

[*4] 厳密にはごくわずかに労働投入量を増やしたときの産出量の増加と労働投入量の増加の比（つまり労働投入量増加 1 単位当りの産出量の増加）として定義される。数学的には生産関数の微分として求められる。次の資本の限界生産力も同様。

3.2.3　収穫逓減の法則

資本を一定にして，すなわち生産設備の量をそのままにして労働だけを増やしていくとすると，労働の投入量が少ない間は生産の増加に効果があるがやがて労働が多くなりすぎて，その投入量を増やしてもあまり産出量が増えなくなる，すなわち労働の限界生産力は労働投入量の増加とともに小さくなると考えられる。労働投入量を一定にして資本の投入量を増やす場合も同様である。これを**収穫逓減の法則**（あるいは限界生産力逓減（ていげん）の法則）と呼ぶ。

3.2.4　規模に関する収穫

限界生産力を考えたときには他の生産要素の投入量を一定にして一つの生産要素の投入量だけを増加させたが，生産技術は変えないですべての生産要素が同じ割合で増加した場合の生産要素の増加と産出量の増加との関係は**規模に関する収穫**と呼ばれる。すべての生産要素を同じ割合で増加させたときに生産要素の増加率と同じ割合で産出量が増加するとき**規模に関して収穫一定（不変）**という。生産要素の増加率以上に産出量が増加するときは**規模に関して収穫逓増（ていぞう）**，生産要素の増加率以下でしか産出量が増えないときは**規模に関して収穫逓減（ていげん）**と言う。財の種類や生産技術によって異なるであろうが，一般的には産出量が少ない間は収穫逓増であるが産出量が多くなるにつれて収穫一定となり，やがて収穫逓減の傾向を示すようになると考えられる。その理由としては，産出量も労働投入量も少ないうちはそれらの増加によって生産工程を分けて分業体制をとることができるようになり，一人一人がそれぞれ専門的な仕事に従事するようになって生産性が向上する一方、生産規模があまり大きくなりすぎると全体の管理，調整が困難になって生産性が低下するということが考えられる。規模に関する収穫を考える場合はすべての生産要素の増加を考えるので，限界生産力よりは逓増あるいは一定となる範囲が大きい。規模に関する収穫逓増は**規模の経済性** (economies of scale) とも呼ばれる。大量生産の利益というのも同様の意味である。産業によってはかなりの生産規模（各企業が利潤を最大化すべく選択する産出量程度まであるいはそれを越えて）になるまで規模に関する収穫逓増の性質を持つかもしれない。特に大規模な生産設備を必要とする産業においてそのようになると考えられる。そのような場合，それらの産業には規模の経済性があると言われる。

3.3 費用最小化

3.3.1 等産出量曲線

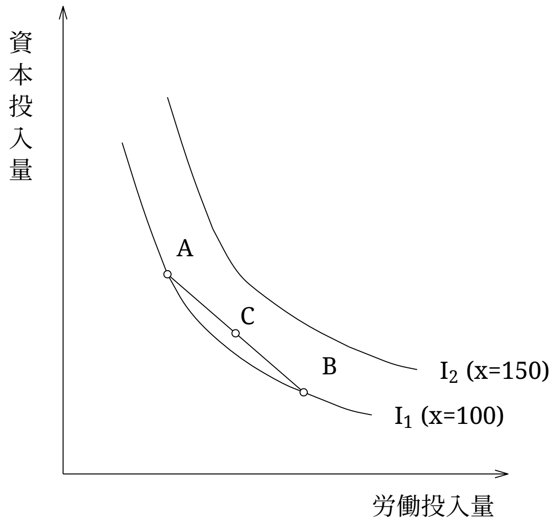


図 3.1 等産出量曲線

生産関数は生産要素の投入量と産出物の産出量の関係を式で表すものであるが，これを労働の投入量を横軸，資本の投入量を縦軸にとって図で表現したものが**等産出量曲線**である。等産出量曲線はある与えられた生産技術のもとで，一定の産出量を生産することができるさまざまな生産要素の組み合わせを表す。一定の生産技術のもとで一定の量の財を生産するための生産要素の組み合わせを**生産方法**と呼ぶことにする。図 3.1 の I_1，I_2 はそれぞれ産出量が 100 と 150 のときの等産出量曲線である。I_1 上の点 A，B はともに 100 の生産が可能な資本と労働の投入量の組み合わせであり，A は資本を多く用いる（機械化された）生産方法，B は労働を多く用いる生産方法を表している。各生産要素が生産に正の貢献をする，言い換えれば各生産要素の限界生産力がプラスであれば，労働の投入量が減ると産出量が減るので産出量を一定に保つには資本の投入量を増やさなければならないから等産出量曲線は右下がりになる。また，資本・労働のどちらかに偏った生産方法よりも両方をバランスよく用いる生産方法の方が効率的であると仮定すると，図のように等産出量曲線は原点に向かって凸になる。図の点 C は A と B の中間的な組み合わせであるが，この点は A，B を通る等産出量曲線より上にあるので産出量は 100 より多い。等産出量曲線

は消費者の無差別曲線と図形的には（あるいは数学的には）同じ性質を持っている。

3.3.2　等費用線

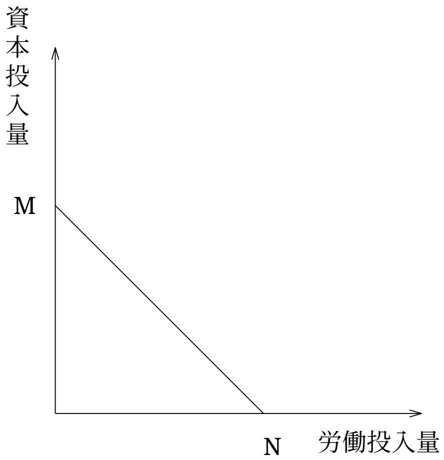


図 3.2　等費用線

労働と資本の 2 つの生産要素がありそれぞれの 1 単位当たりの価格，すなわち賃金率と資本レンタルを w，r で表し，ある一定の産出量を得るために必要な労働・資本の投入量をそれぞれ L と K で表すと，その産出量を生産するのに要する費用 c は

$$c = wL + rK$$

と表される。ある一定の c の値についてこの関係を等産出量曲線と同様に労働の投入量を横軸，資本の投入量を縦軸にとって図に表したものを**等費用線**と呼ぶ。図 3.2 の MN にその例が示されている。その名のとおり等費用線上の各点が示す労働・資本の投入量の組み合わせ，すなわち生産方法は，一定の生産要素価格（資本レンタルと賃金率）のもとで生産にかかる費用が等しい組み合わせを表している。一本の等費用線上の各点における産出量は異なる。等費用線の直線としての傾きの大きさは 2 つの生産要素の相対価格 w/r に等しい。これを**賃金レンタル比率**と呼ぶ。賃金率が資本レンタルに比べて高くなれば等費用線の傾きは大きくなる。そのとき縦軸の切片は横軸の切片に比べて相対的に大きくなるが，これは資本レンタルが相対的に低くなるために一定の費用で利用可能な資本の量が労働に比べて相対的に増えることを意味する。一方，資本レンタルが賃金率に比べて大きくなれば等費用線の傾きは小さくなる。等費用線は消費者の予算制約線と数学的な性質が同じである。

3.3.3　費用最小化の条件

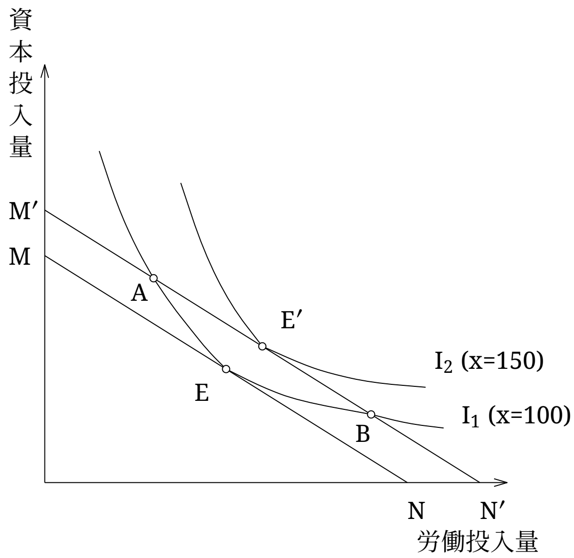


図 3.3　費用最小化

同じ産出量を生産するのならば費用が安いほど企業の利潤は大きくなる。したがって企業は自らが選んだ産出量を生産できる生産要素の組み合わせのうちで，最も費用の小さい組み合わせを選ぼうとするであろう。これが『費用最小化問題』である。費用が最も小さい生産方法を見つけるということは，ある一定の産出量について，**等産出量曲線上の点の中で最も低い等費用線上にある点を選ぶ**，ということになる。これは予算制約線上の点の中で最も高い無差別曲線上にある点を見つけるという消費者の効用最大化問題とは逆の問題設定であるが，最適点が満たす条件は同じものになる。図 3.3 には産出量を 100 とした場合の費用最小化を図示してある。この図で点 A，B はともに産出量 100 の生産が可能な生産要素の組み合わせであるが，費用が最小となる点ではない。なぜならば A を通る等産出量曲線 I_1 上で A より少し右下の点あるいは B より少し左上の点は，A，B を通る等費用線よりも下にあるので同じ 100 の産出量をより低い費用で生産できる。このように考えると x=100 の等産出量曲線上で最も低い費用となる点は，その点の右下の点も左上の点もその点を通る等費用線より上にある点ということになる。それは等産出量曲線と等費用線が接する点 E である。点 E より右下の点も左上の点も点 E を通る等費用線より上にあり費用が高い。同様にして産出量が x=150 のときに費用が最小となる資本と労働の組み合わせは点 E′ で示される。図からもわかるように，費用最小化問題は，予算制約線と無差別曲線とが接する点が最適な消費量になるという消費者の効用最大化問題と同じ形になっている（正確には消費者の支出最小化と同じ形)。

3.3.4　生産要素価格と費用最小化

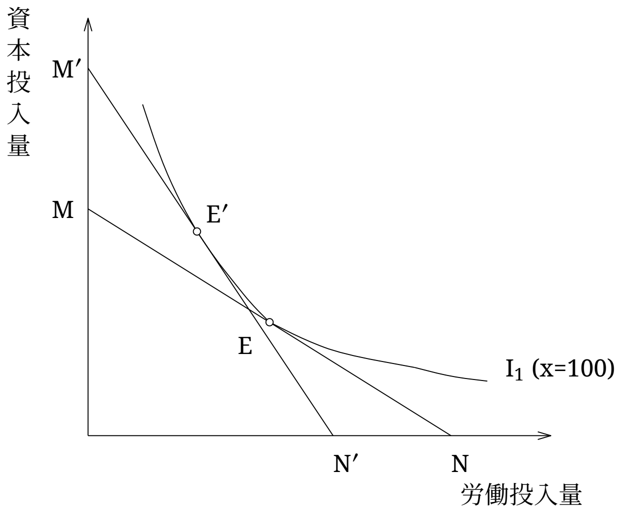


図 3.4　生産要素価格と費用最小化

等費用線は一定の生産要素価格のもとで描かれているが，生産要素の相対価格が変化すると等費用線の傾きが変わる。資本レンタルが一定で賃金率が高くなると，賃金レンタル比率は大きくなって等費用線の傾きは大きくなり，それによって費用が最小となる生産要素の組み合わせも変わる。図 3.4 にその様子が描かれている。図の M′N′ は MN と比べて賃金率が高くなったときの等費用線であり，費用が最小となる生産要素の組み合わせは点 E から点 E′ に移り，労働投入量が減って資本投入量が増えている。一般に等産出量曲線が原点に対して凸であれば，相対的に価格の高くなった生産要素の投入量が減り，安くなった生産要素の投入量が増える。これは，消費者の行動についての分析の中で，価格の変化に伴う消費量の変化の内，代替効果（効用一定のもとでの消費量の変化）によるものと同じ形になっている[*5]。

[*5] 生産要素価格の変化による生産要素投入量の変化は同一の等産出量曲線上での変化を考えているので，同一の無差別曲線上での価格の変化による消費の変化を考える代替効果と同じ形になる。

3.3.5　費用関数と費用曲線

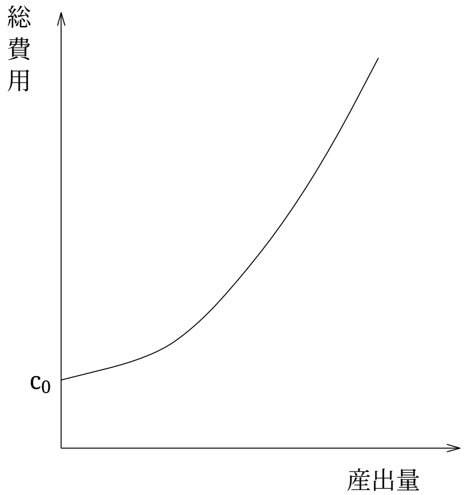


図 3.5　費用曲線

等産出量曲線と等費用線とを用いてある財のさまざまな産出量に対して費用が最小となる生産要素の組み合わせを見つけることができれば，産出量とその産出量を生産するのに必要な費用との関係が得られる。それを

$$C = C(x),\quad x\text{ は産出量}$$

という関数で表すことができる。これを**費用関数**あるいは総費用関数と呼ぶ。費用関数を図 3.5 に描かれているように曲線で表したものを**費用曲線**（総費用曲線）と呼ぶ。ここでは産出量がいくらでも細かく分割できるものと仮定して費用曲線をなめらかな曲線として描いている。費用関数や費用曲線は各産出量水準における最小の費用を表している。産出量が増えれば必ず費用は増えるから費用曲線は右上がり（傾きがプラス）である。

3.3.6　可変費用と固定費用

産出量が増えれば費用が増えるということは産出量の変化に伴って生産要素の使用量を変えるということであるが，生産要素には産出量の変化に対応して短期的に（短い時間で）調整可能なものと短期的には調整できないものとがある。短期的に調整可能な生産要素にかかる費用を**可変費用** (variable cost) と呼び，短期的には調整ができない生産要素，具体的には大規模な生産設備や事務所の家賃などにかかる費用を**固定費用** (fixed cost) と呼んでいる。資本の中でも小さな機械類などは短期的に調整可能であるだろうし，一方労

働にかかる費用の中でも，生産の現場ではなく事務職や重役（取締役）の賃金など企業組織にかかる費用は固定的であるかもしれない[*6]。したがって必ずしも労働が可変的で資本は固定的であるとは言えない。図 3.5 の c_0 で表されている部分が固定費用である。この図の費用曲線は短期的に調整可能な部分の変化を考えているので**短期費用曲線**とも呼ばれる。固定費用は短期的には生産をしてもしなくても同じ大きさだけかかる費用であり，費用最小化の対象にはならない。しかし長期的な時間を考えるとすべての生産要素が調整可能となるので長期的には固定費用は存在しない。

3.3.7　短期の費用と長期の費用

短期の費用は，産出量の変化に対して固定的な生産設備などを一定として生産方法を調整し費用の最小化を図って得られるものであるが，長期の費用は産出量の変化に対応して固定的な生産設備などもその産出量に合った水準に調整して得られるものである。したがって，生産設備がちょうどそのときの産出量にとって最適な水準になっていれば長期の費用と短期の費用とは等しく，後で説明する平均費用についても短期と長期とで等しくなっているが，生産設備が最適な水準よりも大きすぎたり小さすぎたりする場合には短期の費用の方が長期の費用よりも大きい。

固定的な生産設備の調整には費用がかかると思われるので，産出量の変化が一時的なものであると考えられる場合には生産設備の調整は行わず，その変化が長く続く場合にだけ行うべきであると考えられる。

簡単な数式モデルによって短期の費用と長期の費用との関係について考えてみる。生産設備の大きさ（あるいは金額）を K で，産出量を x で表し，短期の費用が

$$C(x) = K + \frac{x^2}{K}$$

で表されるものとする。生産設備が大きくなれば固定費用は増大するが可変費用は逆に減少する。

長期の費用は与えられた x の値に対して $C(x)$ が最小となるように K を決めることによって求められる（すなわち C を K の関数と見て）。（x を定数と見なして）C を K で微分してゼロとおくと

$$1 - \frac{x^2}{K^2} = 0$$

となり $K = x$ が得られる。したがって長期の費用（$C_L(x)$ と表す）は

$$C_L(x) = 2x$$

と求まる。例として $x = 16$ を考えてみよう。$K = 16$ ならば $C(16) = 32$ であるが，$K = 8$ および $K = 32$ のときは $C(16) = 40$ である。短期の費用（総費用）を図示すると K の値

[*6] 機械について言えば，リース，レンタルで借りて使うことも可能で，その場合契約にもよるが自分で買うよりは可変費用の性格が強くなると考えることもできる。

によって異なる放物線になり，長期の費用はその放物線の低いところを辿った直線になる[*7]。このようなとき，長期の費用曲線は短期の費用曲線の**包絡線** (envelope curve) と呼ばれるものになっている。

図 3.6 を見ていただきたい。互いに交わる数本の細い放物線が短期の費用であり，原点を通る太い直線が長期の費用である。この図は短期の費用を

$$C(x) = K + \frac{x^2}{8K}$$

と仮定して $x = 0$ から $x = 181$ まで描かれている。長期の費用を各自計算してみていただきたい。

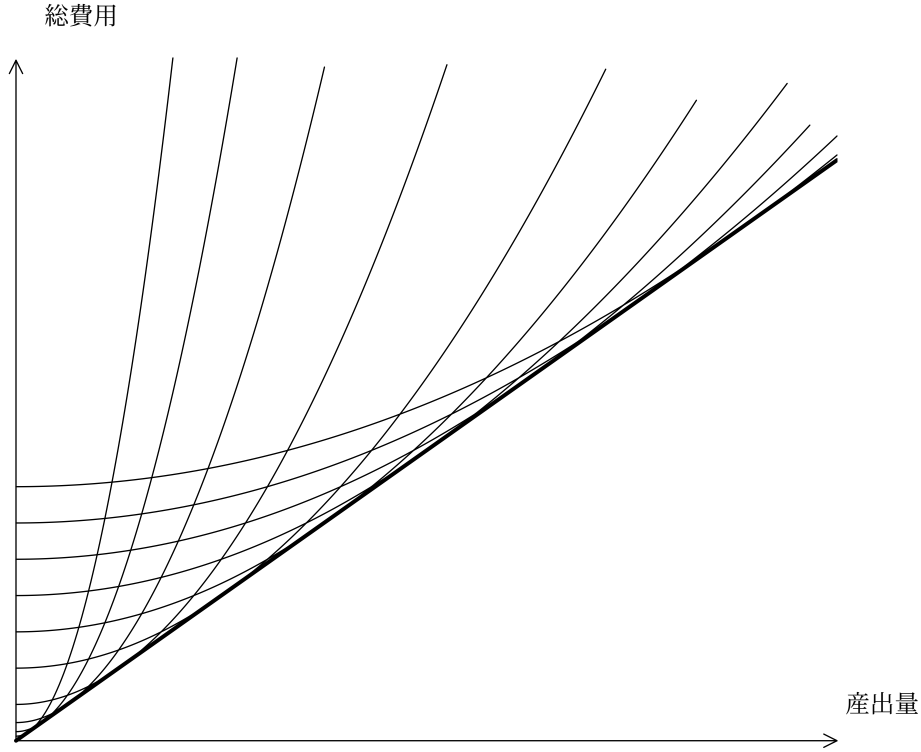


図 3.6　短期の費用と長期の費用

本書ではこれ以上短期の費用と長期の費用の区別については取り上げず，特にことわらない限り費用とは短期の費用を意味するものとする。

*7 長期の費用曲線が水平でなければ各放物線の最も低い所をたどることにはならない。

3.4　限界費用と平均費用

企業の行動を分析するのに重要な概念として平均費用と限界費用がある。

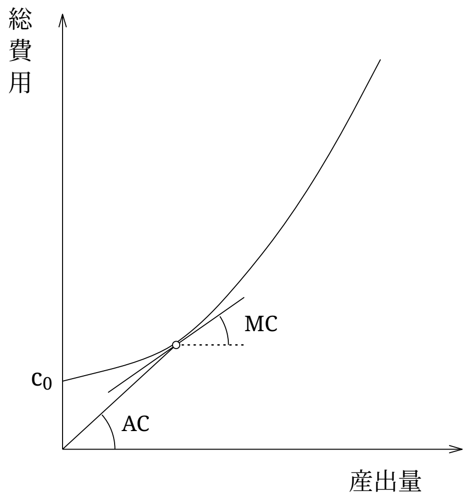


図 3.7　総費用，限界費用，平均費用

平均費用（average cost，AC で表す）とは産出量 1 単位当たりの費用のことで総費用を産出量で割って求められる。式で書くと

$$\text{平均費用} = \frac{\text{総費用}}{\text{産出量}} \quad \text{あるいは} \quad AC = \frac{C(x)}{x}$$

となる。また，固定費用を除いて可変費用だけを産出量で割って得られるもの，すなわち 1 単位当たりの可変費用を**平均可変費用**（average variable cost，AVC と表す）と呼ぶ。

一方，産出量を少し（ごくわずかに）増加させたときの産出量の増加 1 単位当たりの費用の増加分を**限界費用** (marginal cost，MC で表す) と呼ぶ。式で書くと

$$\text{限界費用} = \frac{\text{総費用の増加分}}{\text{産出量の増加分}} \quad \text{あるいは} \quad MC = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

のように表される。Δx は産出量の増加分，ΔC はその産出量の増加に対する総費用の増加分である。固定費用は産出量が変わっても変化しないので限界費用は可変費用の変化だけから求められる。限界費用の定義においては産出量の変化をその最小単位で考える。産出量が 1,2,3,$\cdots$ と整数の値をとる場合には，限界費用は 1 **単位産出量を増加させたときの費用の増加**と表現される[*8]。

---

*8 産出量の調整可能な最小単位を 1 単位とすればわかりやすい。

産出量がいくらでも細かく分割できる場合には[*9]，限界費用は費用関数を微分したものとして定義される。すなわち

$$MC = \frac{dC(x)}{dx}(= C'(x))$$

となる。

図 3.7 に総費用，平均費用，限界費用の関係を図示してある。ある産出量のときの平均費用は原点とその産出量に対応した費用曲線上の点とを結んだ線分（図の AC）の傾きで表され，限界費用は費用曲線の接線（図の MC）の傾きで表される。また，図には描かれていないが平均可変費用は固定費用 c_0 を表す点と各産出量に対応した費用曲線上の点とを結んだ線分の傾きで表される。

また，産出量と費用との関係の例を表 3.1 に示してある。この例では産出量は 1,2,3,· · · と整数の値をとり，固定費用は 500 であると仮定されている。産出量が 7 のとき，可変費用 650 を 7 で割って平均可変費用 93 が求まる。また可変費用に固定費用を加えた総費用 1150 を 7 で割って平均費用 164 が求まる。限界費用は産出量が 6 から 7 に増えるときの可変費用（あるいは総費用）の増加分であるから産出量 7 のときの可変費用 650 から産出量 6 のときの可変費用 580 を引いて 70 と求まる[*10]。逆に見ると『ある産出量までの可変費用は各産出量に対する限界費用を加えて求められたものである』と見ることができる。

限界費用とは，この例では 1 単位目の生産に 150 の費用がかかり，2 単位目・3 単位目等の生産にそれぞれ 120，100 等の費用がかかるということを意味しているが，2 単位目の限界費用とは一定の期間に 1 単位だけ生産するような生産体制と比べて 2 単位生産しようとする生産体制ではいくら余計に費用がかかるかを表している。同様に 3 単位目の限界費用は一定の期間に 2 単位だけ生産するような生産体制と比べて 3 単位生産しようとする生産体制ではいくら余計に費用がかかるかを表す。この表の例では限界費用は当初減少し，後に増加すると仮定されている[*11]。

平均可変費用，平均費用も限界費用に遅れて同じような動きをする。各産出量に対する限界費用の和が可変費用であり，その平均が平均可変費用である。また平均費用に含まれる固定費用は産出量の変化によっても変わらないから，平均可変費用，平均費用と限界費用との関係については以下のことが言える。

[*9] すなわち産出量が『実数』で表される場合。この場合産出量変化の最小単位は無限小ということになる。

[*10] この表では産出量を 6 から 7 へ増やしたときの費用の増加分として産出量 7 のときの限界費用を表す。

[*11] 限界費用についてはこのように仮定されることが多い。その根拠は先に説明した規模に関する収穫についての仮定と同様のものであるが，ここでは短期の費用として限界費用を考えているので少し異なる点もある。産出量が少ない間は設備を持て余して生産が効率的に行えないが，産出量の増加に伴って労働の配分の適正化などにより効率的な生産が可能になって費用が低下していく。しかし，産出量が多くなりすぎると設備の利用に無理が生じて費用が大きくなっていく，というような状況が考えられる。

産出量	固定費用	可変費用	総 費 用	平均可変費用	平均費用	限界費用
0	500	0	500	–	–	–
1	500	150	650	150	650	150
2	500	270	770	130	385	120
3	500	370	870	123	290	100
4	500	450	950	113	238	80
5	500	520	1020	104	204	70
6	500	580	1080	97	180	60
7	500	650	1150	93	164	70
8	500	730	1230	91	154	80
9	500	830	1330	92	148	100
10	500	950	1450	95	145	120
11	500	1100	1600	100	145.5	150
12	500	1280	1780	107	148	180
13	500	1490	1990	115	153	210
14	500	1730	2230	124	159	240
15	500	2000	2500	133	167	270

表 3.1　産出量と費用（例）

平均可変費用（平均費用）と限界費用との関係　限界費用が平均可変費用（または平均費用）より小さい間は平均可変費用（または平均費用）は産出量の増加に伴って減少し，限界費用が平均可変費用（または平均費用）より大きくなると平均可変費用（または平均費用）は産出量の増加に伴って増加する。

これは次のように考えるとわかりやすいだろう。10 人の人がいて，その平均年齢が 30 才であるとする。ここに新たにもう一人加わった場合，その人の年齢が 30 才より上であればその人を加えた 11 人の平均年齢は 30 才より高くなり，逆にその人が 30 才より若ければ平均年齢は低くなる。同様に考えると，限界費用は（生産体制に）新たに加えられる産出物にかかる費用であるから，それが平均可変費用（あるいは平均費用）より高ければ平均可変費用（平均費用）は上昇し，低ければ平均可変費用（平均費用）は低下する。

したがって次のこともわかる。

平均可変費用（平均費用）の最低値と限界費用の関係　平均可変費用（または平均費用）が最低となる産出量はその産出量において限界費用と平均可変費用（または平均費用）が等しいかまたは限界費用の方が小さく，1 単位産出量を増やすと限界費用の

方が大きくなる水準である。また，産出量が限りなく分割できる場合には限界費用と平均可変費用（または平均費用）とが等しくなっている産出量で平均可変費用（または平均費用）が最低となる。

以上の議論を簡単な微分計算で確認してみよう。総費用を $C(x)$ とすると，平均費用は $\frac{C(x)}{x}$ と表せる。これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right)=\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}$$

が得られる，したがって平均費用が最低となる条件は

$$C'(x)x-C(x)=0$$

すなわち

$$C'(x)=\frac{C(x)}{x}$$

となり，平均費用と限界費用が等しくなることである。$C(x)$ を可変費用と見なせば平均可変費用と限界費用の関係が得られる。

表 3.1 では産出量 8 において平均可変費用が，産出量 10 において平均費用が最低になっている。

図 3.7 に表されている費用曲線の場合には限界費用は一貫して上昇しており，平均可変費用は常に限界費用より小さい。

3.5　競争的企業の供給曲線

この節では完全競争的な市場における企業の供給行動を考える。

3.5.1　完全競争市場と競争的企業

完全競争市場とは次の条件が満たされている市場である。

1. **財の同質性**
   ある産業に属するすべての企業が生産する財は消費者から見てまったく同じものである。したがって以下で述べる取り引き費用がなければ消費者は少しでも安い所から購入しようとするので，ある企業が他の企業より 1 円でも高い価格をつけるとその企業の財はまったく売れなくなる。
2. **情報の完全性**
   財の売り手・買い手が取り引きされる財やサービスの品質，内容，価格について完全な情報を持っている，あるいはその情報を手に入れるために費用はまったくかからない。

3. **取り引き費用がゼロ**
   財やサービスを購入するためにかかる交通費，時間の費用などの余分な費用はないと仮定する，あるいは無視する。
4. **多数の企業・消費者の存在**
   同じ財の売り手・買い手の数がきわめて多く，一人の消費者や一つの企業の取引量が市場全体の取引量と比較して非常に小さい，したがってその消費者や企業が需要や供給を変化させても市場価格には影響を及ぼさない。価格は市場全体の需要と供給が一致するような水準に決まり，各消費者・企業はそれを与えられたものとして受け入れて行動せざるをえない。このように市場価格を与えられたものとして行動する経済主体を**価格受容者** (price taker) と呼ぶ。
   取り引きへの参加者が少ない，特に供給する企業の数が少なく一つの企業の行動が市場価格に影響を与えられるような状況が独占・寡占などの不完全競争である。

このような完全競争市場において財やサービスの供給をする企業が競争的企業である。競争的企業とは企業自身の行動が競争的であるというよりも，その企業が活動している市場の構造が競争的であるということを意味している。

3.5.2　利潤最大化

競争的企業は産出量を選択することによって利潤の最大化を図るのであるが，得られる利潤は産出物の価格によって異なる。企業の利潤は次のように表される。

$$\begin{aligned}\text{利潤} &= \text{収入} - \text{総費用} = (\text{価格} - \text{平均費用}) \times \text{産出量}\\ &= (\text{価格} - \text{平均可変費用}) \times \text{産出量} - \text{固定費用}\end{aligned}$$

表 3.1 の例に表されている費用のもとで価格が 140 のときと 200 のときの企業の収入と利潤を表 3.2 に示す。

価格が 200 のときの利潤は産出量が 12 のとき最大の 620 となる。したがってそのときの最適な産出量は 12 である。産出量 12 に対する限界費用は 180 で価格が限界費用を上回っているが，産出量 13 に対する限界費用は 210 となり逆に限界費用の方が価格より大きくなる。1 単位多く生産すると収入は 1 単位の価格分増加し，費用の方は限界費用分増加する。したがって『価格が限界費用より大きい間は産出量の増加によって利潤が増えるが，限界費用の方が価格より大きくなると産出量の増加によって利潤が減る』ことになる。そのため価格 200 に対しては産出量 12 が利潤を最大にする産出量となる。同様にして価格が 250 になると（表には書いていないが）産出量が 14 のとき最大の利潤 1270 が得られるので最適な産出量は 14 となる。

一方，価格が 140 のときの利潤は産出量が 10 のとき最大の −50 となる。利潤がマイナスになるのは価格が 140 であるのに対して，産出量が 10 のときの平均費用が 145 で価格を上回っているためである。利潤はマイナスで損失が発生しているが，もし生産をやめる

産出量	収入（価格＝ 140）	利潤（価格＝ 140）	収入（価格＝ 200）	利潤（価格＝ 200）
0	0	−500	0	−500
1	140	−510	200	−450
2	280	−490	400	−370
3	420	−450	600	−270
4	560	−390	800	−150
5	700	−320	1000	−20
6	840	−240	1200	120
7	980	−170	1400	250
8	1120	−110	1600	370
9	1260	−70	1800	470
10	1400	−50	2000	550
11	1540	−60	2200	600
12	1680	−100	2400	620
13	1820	−170	2600	610
14	1960	−270	2800	570
15	2100	−400	3000	500

表 3.2　産出量と収入・利潤（例）

と固定費用だけの損失 −500 が発生することになるので生産を続けた方が損失は少ない。しかし，もし価格が 90 になると最大利潤は産出量が 8 のときの −510 となり固定費用分の損失を上回ってしまうため生産をやめた方がよい。それは価格 90，産出量 8 のとき平均可変費用すなわち 1 単位当たりの可変費用が 91 で価格を上回っているので，販売収入によって固定費用どころか可変費用分も回収できないからである。

以上のことから一般的に次の結論が得られる。

完全競争企業の利潤最大化条件　利潤を最大化しようとする完全競争企業の行動の規準は以下のようである。

1. 利潤が最大となる産出量は，その産出量のときの限界費用が価格より低いかまたは等しく，1 単位産出量を増やすと限界費用が価格を上回るようになる水準である。
2. 価格が平均費用を下回ると損失が発生するが，平均可変費用を上回っていれば損失は固定費用分より小さいので生産を続けるべきである。
3. 価格が平均可変費用の最低水準を下回った場合は，損失の大きさが固定費用を上回るので生産をやめた方がよい。

財の価格と平均費用が等しくなるような産出量を損益分岐点と呼ぶ。財の価格と平均可変費用が等しくなるような産出量を生産中止点と呼ぶ。

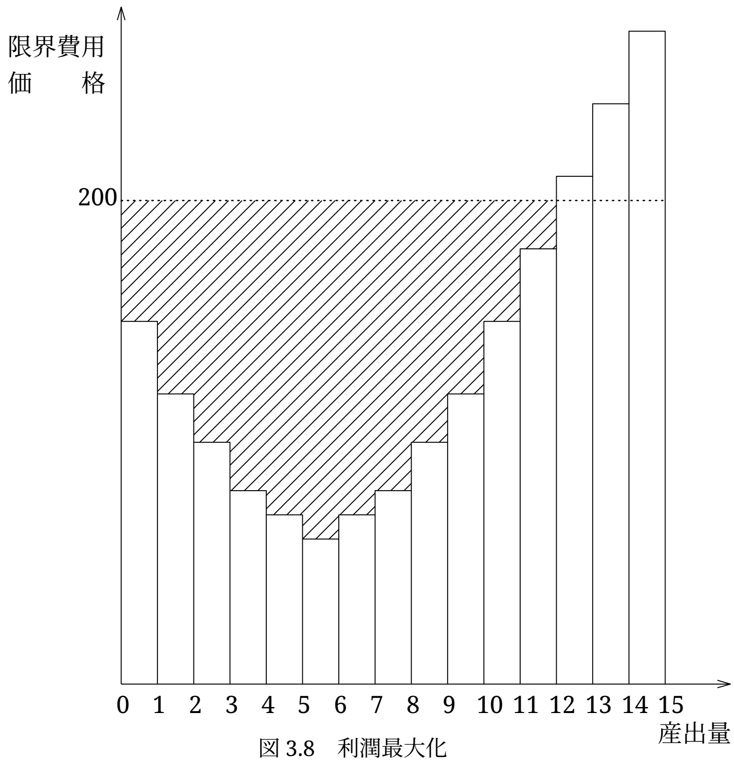


図 3.8　利潤最大化

表 3.1 にもとづいて限界費用と価格との関係を図に表すと図 3.8 のようになる。この図では価格を 200 と仮定している。図の長方形の棒で表されているのが各産出量についての限界費用である。この長方形の幅を 1 とすると，たとえば産出量 12 に対する可変費用は左から 12 個の長方形の面積の和として求められる*12。また収入は価格 200 を表す点線と横軸，それに産出量 12 の縦の線で囲まれた部分の面積である。したがって，（固定費用を除く前の）利潤は価格を表す線と長方形の棒の上の線（辺）の間の面積の産出量 1 から 12 までの，図で斜線を引いた部分の面積に等しい。この図からも産出量が 12 のとき利潤が最も大きくなることがわかる。産出量が 13 になると価格 200 の線より上に出ている限界費用の部分が損失になるため利潤が減ってしまう。

もし産出量がいくらでも細かく分割できるならば，限界費用は図 3.8 の長方形の上の辺を結ぶような形で図 3.9 の MC ようになめらかな曲線で表すことができる*13。同様にして平均可変費用は図の AVC のように描かれる。これらを限界費用曲線，平均可変費用曲線

---

*12 これは数学の積分と同じ考え方である。

*13 産出量がいくらでも分割できる場合には限界費用は 1 単位産出量を増やしたときの費用の増加ではなく，ごくわずかに産出量を増やしたときの費用の増加と産出量の増加との比（産出量増加 1 単位当りの費用の増加）である。

と呼ぶ*14。固定費用を加えた平均費用曲線も同様に描くことができる。平均費用には固定費用も含まれているので，平均費用曲線は 1 単位当たりの固定費用分だけ平均可変費用曲線より上にくる。産出量がいくらでも細かく分割できるならば産出量を調整することによって限界費用をいくらでも価格に近づけることができるので次のような結論を得る。

完全競争企業の利潤最大化条件（産出量が分割可能な場合）　完全競争産業における企業の利潤最大化の条件は，価格と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶことである。

図 3.9 には価格が p^* のとき産出量 x^* が選ばれる様子が描かれている。

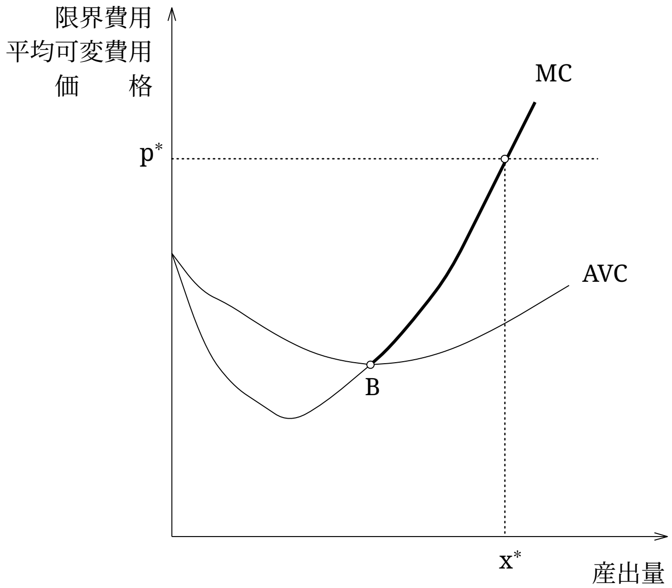


図 3.9　利潤最大化 - 産出量が分割可能な場合

3.5.3　供給曲線

競争的な企業の供給曲線とは，財の価格とそれに対して企業が選択する産出量との関係を表すものである。競争的な企業は価格が限界費用に等しくなるように産出量を決めるから，価格と産出量の関係を表すのは限界費用曲線である。しかし価格が平均可変費用の最低水準を下回ると企業は生産をしなくなるから，供給曲線は限界費用曲線のうち平均可変

*14 表 3.1 の平均可変費用を図 3.8 の限界費用と同じように長方形の棒として描き，その上の辺を結んでなめらかにすれば平均可変費用曲線が得られる。平均可変費用曲線が最低になるところで限界費用曲線と平均可変費用曲線が交わっているのは，先に見たように平均可変費用が最低になる産出量で限界費用と平均可変費用が等しくなるからである。平均費用も同様である。

費用曲線の上にある部分になる。図 3.9 で太く描かれている曲線が供給曲線である。それぞれの価格のもとで，ある産業に属するすべての企業の産出量を加えると市場の供給曲線が得られる。

3.5.4　簡単な数式モデル

企業の利潤最大化問題について簡単な数式モデルを考えてみよう。ある競争的な企業の（短期の）費用が次のように表されるとする。

$$C(x) = 3x^2 + 200 \tag{3.1}$$

x は産出量である。200 は固定費用である。単位は円でもドルでもよい。財の価格が 60 であるとするとこの企業の利潤は

$$\pi = 60x - 3x^2 - 200$$

となる。これは x の二次関数であるから，二次関数の最大値を求める手法によって

$$\pi = -3(x-10)^2 + 100$$

のように変形され，$x = 10$ のとき最大利潤が 100 となる。

この企業の産出量が a（a は 1 以下の正の定数）の単位で変化させられるとして，$x = 10$ における限界費用を求めると，$x = 10 - a$ から $x = 10$ までの変化を考えて，

$$\begin{aligned} MC(10) &= \frac{3(10)^2 + 200 - [3(10-a)^2 + 200]}{a} = \frac{60a - 3a^2}{a} \\ &= 60 - 3a \end{aligned}$$

となる。一方産出量が 10 より a だけ大きい $x = 10 + a$ のときの限界費用は，$x = 10$ と $x = 10 + a$ との間の変化として求められるから

$$\begin{aligned} MC(10+a) &= \frac{3(10+a)^2 + 200 - [3(10)^2 + 200]}{a} = \frac{60a + 3a^2}{a} \\ &= 60 + 3a \end{aligned}$$

となる。$a > 0$ であるから，$x = 10$ のときには限界費用は価格 60 より小さく，a だけ産出量を増やした $x = 10 + a$ では限界費用は価格より大きくなっているので，$x = 10$ が先に求めた利潤最大化の条件を満たしていることがわかる。

a が非常に小さく無視できるほどであれば，$MC(10) = 60$ が得られ*15，$x = 10$ において限界費用と価格が等しくなる。

*15 この計算は微分の定義そのものである。

企業の費用関数を $C(x)$，限界費用関数を $C'(x)$（x は産出量）とするとその利潤は，x^* を企業が選ぶ産出量として

$$\int_0^{x^*}[p^*-C'(x)]dx-f=p^*x-C(x)$$

と積分の形で表すことができる（積分と微分は逆の計算であることに留意）。f は固定費用である。固定費用を差し引く前の利潤 $\int_0^{x^*}[p^*-C'(x)]dx$ は図 3.9 の価格を表す線と限界費用曲線の間の面積に等しい。

3.6　参入・退出と長期の均衡

3.6.1　参入障壁

ある産業において既存の企業には必要ないが新たに参入しようとする企業が負担しなければならない費用が存在するとき，**参入障壁**があるという。その費用の分だけ新たな企業の参入が難しくなっているから，参入障壁とは新しい企業の参入を妨げる要因である。具体的に参入障壁として以下のようなものが考えられる。

1. 政府による規制
   電力・ガス・医療・タクシー・弁護士・酒類の販売などの分野では誰もが自由に営業活動をするというわけにはいかない。政府や地方自治体の許可・免許などを必要とする。最もわかりやすい参入障壁である。
2. 生産技術に関する知識
   財によっては特定の企業が持つ特殊な知識や生産技術がなければ生産できないというものもある。たとえ他の企業がまねをできても**特許**によって守られている場合もある。そのような分野への他の企業の参入は困難である。特許は発明・発見をした企業や個人がその成果を一定期間独占的に利用したり，他の企業が利用する場合には特許料を要求したりできる権利である。特許は一見競争を阻害し産業の発展を妨げるようでもあるが，新しい技術や製品の開発には時間と費用がかかるものであり，開発者がその成果をある程度の期間独占的に利用して開発費用を回収できなければ研究開発そのものが停滞することも考えられる。どの程度特許の期間を認めるかはそれによって確保される開発者の利益と特許を開放することによる産業全体の発展とのバランスを考えて決められるべきものである。
3. 資金調達能力
   新たな事業を興すには資金が必要であるが，銀行などの金融機関が担保や実績のない企業には資金を貸してくれなかったり，借りられたとしても既存の企業より高い金利を支払わなければならないかもしれない。これも参入が妨げられる一因である。

3.6.2　参入と退出

生産する財の価格が平均費用を下回り損失が発生している場合でも平均可変費用よりは高く損失が固定費用より小さければ企業は生産を続けた方がよいが，いつまでも損失を出し続けるわけにはいかない。固定費用とはいっても短期的に変更できないだけであって長期的には生産設備などの固定的な資本も調整が可能であり，すべての費用が可変費用となり平均費用と平均可変費用との区別もなくなる。したがって価格が平均費用を下回る状況が長く続くあるいは続くと見込まれるようだと，一部の企業は生産をやめその産業から撤退してしまうであろう。これを**退出**と呼ぶ。このようにして企業数が減ると財の供給量も減り，市場の供給曲線は左にシフトして均衡価格は上昇する。価格が平均費用に等しい水準になるまで退出が続くと，残った企業の利潤（超過利潤）がちょうどゼロとなりそれ以上の退出は起きない。

一方，逆に既存の企業が正の超過利潤を稼いでいる状況では，特に参入を妨げる要因（上で見た参入障壁）がなければ，利潤の分け前にあずかろうとして新しい企業がその産業に入ってくるものと考えられる。これが**参入**である。新たな企業が参入し生産を始めると財の供給量が増え，供給曲線が右にシフトして財の均衡価格は低下する。退出の場合と同様に価格が平均費用に等しい水準になるまで参入が続くと，企業の利潤（超過利潤）がちょうどゼロとなり，それ以上の参入は利潤がマイナスになってしまうので起きなくなる。

以上のことから，参入障壁がなければ参入と退出のプロセスによって競争的な産業における企業の超過利潤は長期的にはゼロになることがわかる。

3.6.3　長期の均衡

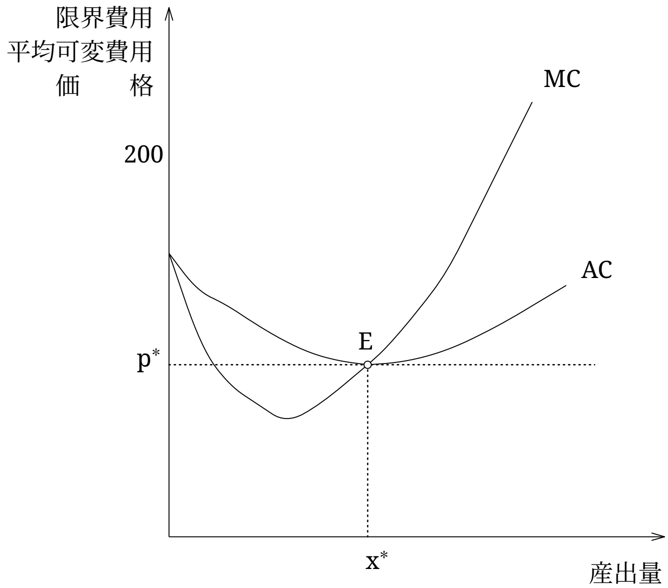


図 3.10　長期の均衡

企業の参入・退出が自由な長期の時間を考えると，どの企業も正常利潤を超える超過利潤を得ることはできなくなる。そのような長期における均衡は，各企業が利潤最大化を目的として価格と限界費用が一致する産出量を選んでいるとともに，その最大化された超過利潤がゼロになっていなければならない。産出量 1 単位当たりの利潤は価格と平均費用の差になるので，長期の均衡では価格は限界費用とともに平均費用にも等しくなければならない。すなわち次の関係が成り立っている。

$$\text{価格} = \text{限界費用} = \text{平均費用} \tag{3.2}$$

図 3.10 に長期の均衡における企業の産出量決定の様子が描かれている。点 E が長期の均衡を示す点である。産出量 x^* において価格 p^* が限界費用に一致するとともに平均費用にも一致していて超過利潤がゼロになっている。この図では平均費用曲線は長期の平均費用，すなわち産出量の変化に対して固定的な設備を調整した上での費用を表しているが，点 E に対応した水準の産出量 x^* に相応しい生産設備になっていればその産出量についての短期の（平均）費用と長期の（平均）費用とは等しい。

3.7　消費と生産の効率性

3.7.1　限界代替率と限界費用の比の関係

第 2 章の『交換経済の均衡とパレート効率性』のところで財の交換と消費からなる経済での効率性を検討したが，ここでは生産を含む経済の（パレート）効率性を考えてみよう。消費と生産が効率的であるとは，与えられた生産要素を用いて消費者の効用が最大化されるように各財が生産されているという意味である。上巻第 2 章での議論と同様に，X, Y の 2 財からなる経済においては消費者の効用最大化行動によって各消費者の X 財の限界代替率とその相対価格が等しくなっている[*16]。一方，完全競争のもとにおいては各企業は限界費用が価格と等しくなるような財の産出量を選択している。したがって均衡においては次の式が成り立っている。

$$\begin{aligned} X\text{ 財の限界代替率} &= X\text{ 財の相対価格 } \left(= \frac{X\text{ 財の価格}}{Y\text{ 財の価格}}\right) \\ &= \frac{X\text{ 財の限界費用}}{Y\text{ 財の限界費用}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

すなわち，価格を媒介として

$$X\text{ 財の限界代替率} = \frac{X\text{ 財の限界費用}}{Y\text{ 財の限界費用}} \tag{3.4}$$

という関係が成り立っているわけである[*17]。これが生産を含む競争経済の効率性を示すものである。それを確認してみよう。

まず，(3.4) が満たされず，

$$X\text{ 財の限界代替率} > \frac{X\text{ 財の限界費用}}{Y\text{ 財の限界費用}} \tag{3.5}$$

となっている状況を考える。ここで Y 財の産出量を 1 単位減らして X 財の生産を増やすことを考えよう。外国との貿易は考慮していないので，経済全体での各財の産出量と消費量は等しいから，生産の増加・減少は消費の増加・減少を意味する。Y 財の産出量が 1 単位減ると，その生産に用いられていた生産要素（資本や労働）が解放されるが，その量は『Y 財の限界費用』相当分である。その解放された生産要素を X 財の生産に振り向けたと

[*16] 消費者によって選好が異なるが，それぞれの消費者にとってこの関係が成り立つように財の消費量が選ばれている。相対価格はすべての消費者に共通なので，各消費者が効用最大化している場合には限界代替率もすべての消費者について等しくなっている。しかし財の消費量が等しくなっているわけではない。X 財を好む消費者は X 財を多く消費し，Y 財を好む消費者は Y 財を多く消費している。

[*17] 右辺の $\frac{X\text{ 財の限界費用}}{Y\text{ 財の限界費用}}$ は限界変形率 (marginal rate of transformation)，正確には X 財の Y 財に対する限界変形率と呼ばれる。X 財 1 単位の生産をやめて Y 財を生産したときに何単位生産できるかということを表している。これを X 財を Y 財に変形すると考えるのである。

きに生産可能なX財の量は，Y財の限界費用をX財の限界費用で割った値，すなわち (3.4) の右辺の逆数で表される値になる。X財の限界費用の方が大きければその値は1より小さく，逆の場合は大きい。ここで，X財の限界代替率の意味を思い出してみよう。X財の限界代替率とは，『X財の消費量が1単位減少したときに，それによる消費者の効用の低下を補うのに必要なY財の消費量の増加』を意味していた。したがって，それはX財の追加的な1単位が消費者にもたらす効用がY財何単位分に相当するかを表している。もしその値が1より大きければX財の追加的な1単位がY財の追加的な1単位より消費者にとってより価値があるということになる[*18]。そうすると，Y財1単位の生産減少によるX財の生産増加が消費者の効用に与える効果をY財を基準にして見ると

$$\frac{Y\text{財の限界費用}}{X\text{財の限界費用}}\times X\text{財の限界代替率} \tag{3.6}$$

と表される。(3.5) のもとにおいては (3.6) の値は1より大きい。したがって，(3.5) が成り立っている場合には，Y財1単位の生産・消費の減少によるX財の生産・消費の増加によって消費者の効用が増加することがわかる。無差別曲線が凸であればX財の消費量の増加，Y財の消費量の減少はX財の限界代替率を低下させ，限界費用曲線が右上がり[*19]（産出量の増加によって限界費用が増加する）であればX財の生産の増加はその限界費用を増加させ，Y財の生産の減少はその限界費用を低下させるので，(3.5) の左辺と右辺の差は小さくなっていく。(3.5) の左辺と右辺に差がある限りこのプロセスは続く。

同様にして

$$X\text{財の限界代替率} < \frac{X\text{財の限界費用}}{Y\text{財の限界費用}} \tag{3.7}$$

のときには，逆にX財の生産・消費の減少によるY財の生産・消費の増加が消費者の効用を増加させる。やはり，(3.7) の左辺と右辺に差がある限りこのプロセスは続く。

以上のことから，(3.4) が成り立っているときに一定の生産要素を用いて生産可能なX財とY財の消費によって得られる消費者の効用が最大化されることがわかる。これが市場経済における価格メカニズムの効率性を示すものである。

3.7.2 消費と生産の効率性の代数的分析

消費者の場合（上巻第2章）と同様に代数的な手法で完全競争経済の均衡が（パレート）効率的であることを示してみよう。財の種類はX，Yの2種類，消費者は2人（AとB），

[*18] 追加的な1単位というのは，そこまでの消費量に対してもう1単位加える，あるいはそこから1単位減らすことを意味するものであり，そのような変化を経済学では『限界的』(marginal) と呼ぶ。

[*19] 図3.8や3.9からもわかるように完全競争経済の均衡においては限界費用が産出量に伴って増加していることが必要である。限界費用が産出量に伴って減少するような（限界費用曲線が右下がり）場合には規模の経済が存在することになり後で見る独占や寡占などの不完全競争になる。

企業も 2 つ（1 と 2，2 企業であるが競争的）であるとする。また生産要素も L，K の 2 つを考える。各財の価格を p_x，p_y，生産要素の価格を w，r とし，消費者が保有する生産要素をそれぞれ $\bar{L}_A$，$\bar{K}_A$，$\bar{L}_B$，$\bar{K}_B$ とする。また各企業の生産要素の投入量を L_1，K_1，L_2，K_2 とする。各企業は両財を生産し，各消費者も両財を消費する。均衡における各財の産出量，消費量，生産要素の投入量をそれぞれ X_1^*，Y_1^*，X_2^*，Y_2^*，x_A^*，y_A^*，x_B^*，y_B^*，L_1^*，K_1^*，L_2^*，K_2^* とする。大文字で生産を小文字で消費を表す。これらがパレート効率的でないとすると別の産出量，消費量，生産要素の投入量 X_1，Y_1，X_2，Y_2，x_A，y_A，x_B，y_B，L_1，K_1，L_2，K_2 で消費者 A，B の効用が

$$u(x_A, y_A) > u(x_A^*, y_A^*),\ u(x_B, y_B) \geqq u(x_B^*, y_B^*)$$

または

$$u(x_A, y_A) \geqq u(x_A^*, y_A^*),\ u(x_B, y_B) > u(x_B^*, y_B^*)$$

となる場合がある（ここがポイントである）。上のケースを考える（下のケースも同様である）。均衡および均衡とは異なる上記のケースにおける企業の利潤を次のように表す。

$$\pi_1^* = p_x X_1^* + p_y Y_1^* - wL_1^* - rK_1^*,\ \pi_1 = p_x X_1 + p_y Y_1 - wL_1 - rK_1$$

$$\pi_2^* = p_x X_2^* + p_y Y_2^* - wL_2^* - rK_2^*,\ \pi_2 = p_x X_2 + p_y Y_2 - wL_2 - rK_2$$

利潤は消費者に均等に配分される。利潤の和は

$$\pi_1^* + \pi_2^* = p_x(X_1^* + X_2^*) + p_y(Y_1^* + Y_2^*) - w(L_1^* + L_2^*) - r(K_1^* + K_2^*)$$

$$\pi_1 + \pi_2 = p_x(X_1 + X_2) + p_y(Y_1 + Y_2) - w(L_1 + L_2) - r(K_1 + K_2)$$

となる。財の需給均衡条件は

$$X_1^* + X_2^* = x_A^* + x_B^*,\ Y_1^* + Y_2^* = y_A^* + y_B^*$$

$$X_1 + X_2 = x_A + x_B,\ Y_1 + Y_2 = y_A + y_B$$

であり，生産要素の投入量の合計が消費者の保有量の合計に等しいという条件は

$$L_1^* + L_2^* = \bar{L}_A + \bar{L}_B,\ K_1^* + K_2^* = \bar{K}_A + \bar{K}_B$$

$$L_1 + L_2 = \bar{L}_A + \bar{L}_B,\ K_1 + K_2 = \bar{K}_A + \bar{K}_B$$

と表される。したがって利潤の和は

$$\pi_1^* + \pi_2^* = p_x(x_A^* + x_B^*) + p_y(y_A^* + y_B^*) - w(\bar{L}_A + \bar{L}_B) - r(\bar{K}_A + \bar{K}_B)$$

$$\pi_1 + \pi_2 = p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B) - w(\bar{L}_A + \bar{L}_B) - r(\bar{K}_A + \bar{K}_B) \tag{3.8}$$

となる。企業は与えられた（財と生産要素の）価格のもとで利潤を最大化するように産出量と生産要素の投入量を決めているので次の式が成り立つ。

$$\pi_1^* \geqq \pi_1,\ \pi_2^* \geqq \pi_2 \tag{3.9}$$

したがって

$$\pi_1^* + \pi_2^* \geqq \pi_1 + \pi_2$$

である。x_A，y_A は均衡において消費者 A にとって実現できない消費量である（均衡消費量より効用が大きい）から

$$p_x x_A + p_y y_A > w\bar{L}_A + r\bar{K}_A + \frac{1}{2}(\pi_1^* + \pi_2^*)$$

$$p_x x_B + p_y y_B \geqq w\bar{L}_B + r\bar{K}_B + \frac{1}{2}(\pi_1^* + \pi_2^*)$$

が成り立つ（消費者 B も均衡消費量において最大の効用を実現している）。(3.9) より

$$p_x x_A + p_y y_A > w\bar{L}_A + r\bar{K}_A + \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$$

$$p_x x_B + p_y y_B \geqq w\bar{L}_B + r\bar{K}_B + \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$$

が得られる。この 2 式を足し合わせると

$$p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B) > w(\bar{L}_A + \bar{L}_B) + r(\bar{K}_A + \bar{K}_A) + \pi_1 + \pi_2$$

となる。ここに (3.8) を代入すると

$$p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B) > p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B)$$

となるが，左辺と右辺は同じものであるから矛盾である。したがって均衡はパレート効率的である。この議論は財がいくつあっても，消費者が何人いても，また企業が何社あっても成り立つ。

■パレート効率性の条件　微分を用いてパレート効率性の条件を考えてみよう。消費者は二人，財は X，Y の二財とし，話を簡単にするために財は消費者が共同で労働のみで生産しているものとする。X，Y の産出量は二人の消費量の和に等しいのでそれぞれ $x_A + x_B$，$y_A + y_B$ であり，X，Y の生産に用いられる労働の投入量を L_x，L_y によって表す。労働投入量によって財の産出量が決まるので，その関係（つまり生産関数）を $x_A + x_B = f(L_x)$，$y_A + y_B = g(L_y)$ と表す。労働の投入量の合計は一定なのでそれを $\bar{L}$ とすると $L_x + L_y = \bar{L}$ が成り立つ。これらの式から

$$x_B = f(L_x) - x_A,\ y_B = g(\bar{L} - L_x) - y_A$$

が得られる。したがって二人の効用の加重和は次のように表される。

$$U = \alpha u_A(x_A, y_A) + (1-\alpha)u_B(f(L_x) - x_A, g(\bar{L} - L_x) - y_A)$$

これを x_A，y_A と L_x で微分して 0 とおくと

$$\alpha\frac{\partial u_A}{\partial x_A} - (1-\alpha)\frac{\partial u_B}{\partial x_B} = 0$$

$$\alpha\frac{\partial u_A}{\partial y_A} - (1-\alpha)\frac{\partial u_B}{\partial y_B} = 0$$

$$\frac{\partial u_B}{\partial x_B}f' - \frac{\partial u_B}{\partial y_B}g' = 0$$

上巻第 2 章での議論と同様に上の 2 つの式から二人の消費者の限界代替率（X の Y に対する限界代替率）が等しいという条件が得られる。それは次のように表される。

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}{\frac{\partial u_A}{\partial y_A}} = \frac{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}}$$

下の式からは

$$\frac{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}} = \frac{g'}{f'}$$

を得る。f'，g' はそれぞれ X，Y の限界生産力と見ることができる。すなわち労働投入を 1 単位増やした時の各財の増加量を表す。したがってそれぞれの逆数が限界費用に等しいから

$$\text{消費者の限界代替率} = \frac{X\text{ の限界費用}}{Y\text{ の限界費用}}$$

という関係が得られる。

3.8　消費者余剰と生産者余剰

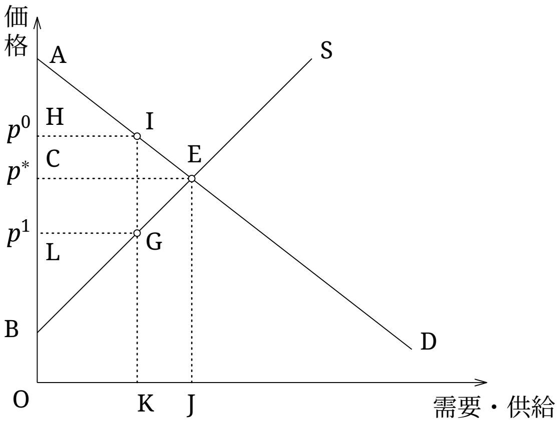


図 3.11　消費者余剰と生産者余剰

図 3.11 に，ある財の需要曲線と供給曲線が描かれている。均衡価格は p^* である。このとき消費者や生産者が得る利益はどのようにして測られるであろうか。図で三角形 ACE の面積を**消費者余剰**，三角形 CBE の面積を**生産者余剰**と呼ぶ[*20]。

消費者余剰は**需要曲線と均衡価格を表す直線との間の部分の面積**，である。需要曲線が右下がりであることからもわかるように消費者は価格が低くなると需要を増やし高くなると減らすが，これは消費する財の消費者にとっての価値が，消費量が少ないときの方が大きいことを意味するものと考えられる。言い換えれば最初に消費する 1 単位目の財の価値は大きく，2 単位目，3 単位目と増えていくにつれてその価値が低下していくわけである。とは言っても 2 単位目，3 単位目の財が 1 単位目の財と異なっているわけではない。1 単位消費した上にもう 1 単位消費するとその価値，正確には消費者が得る効用を貨幣で測ったものは最初の 1 単位目の消費から得られる効用と比べて低い，さらにもう 1 単位消費して得られる効用はさらに低いということである[*21]。消費者はその財を消費する最後の単

[*20] この図では需要・供給曲線が直線で描かれているので文字どおり三角形になっているが，一般的には需要・供給曲線は直線ではないので三角形にはならない。その場合でも需要曲線が縦軸と交わる点を A として線分 AC，CE と需要曲線で囲まれた部分の面積を消費者余剰と呼ぶ。同様に，供給曲線が縦軸と交わる点を B として線分 CB，CE と供給曲線で囲まれた部分の面積を生産者余剰と呼ぶ。

[*21] これは**限界効用逓減の法則**と呼ばれる。しかし，この概念は基数的効用にもとづいているので現在ではあまり使われず，代わりに序数的効用にもとづいた**限界代替率逓減の法則**が用いられている。ここで考えているのは消費者の効用を貨幣で測った価値であるから，（貨幣で測った）限界効用とは財と貨幣との限界代替率と見ることができる。貨幣と言っても紙幣や硬貨などの『お金』の意味ではない。貨幣そのものは消費者に効用を与えるわけではないの

位の（貨幣で測った）価値が価格に相当するところまで消費する。財の各単位の消費者にとっての価値を表すのが需要曲線 D である。1 単位目の消費は点 A に対応した価値があり，消費者はその 1 単位目の財には OA の金額を支払ってもよいと考える。同様に点 K に対応した財の消費には p^0 支払ってもよいと思い，点 J に対応した財の消費には p^* 支払ってもよいと思う。財の消費者にとっての価値，すなわち支払ってもよいと思う額を合計すると台形 AOJE の面積になる。これは OJ の消費量に対して消費者が支払ってもよいと考える最大の金額を表しているから，その消費から得られる消費者の効用を貨幣で測ったものを表していると見なされる。消費者余剰はこの台形 AOJE の面積から実際に消費者が支払う金額である長方形 COJE の面積を引いたものになっている。支払ってもよいと考える金額から実際に支払う金額を引いた残りなので**余剰**と呼ばれる。これは消費から得られる効用の貨幣価値と支払う金額の差に等しい。

> ここで実際に支払う金額を引く理由は以下の通りである。政府の政策やその他何らかの事情によってある財（X 財とする）の消費量が変化すればその財の消費から得られる人々の効用も変化する。それが「支払ってもよいと考える金額」の変化に表れる。一方 X 財の価格が変化すると一定の消費量を実現するために必要な支出額が変る。価格が上がれば支出は増えるが，所得が変らない限りそれによって他の財に対する支出額が減り，それらの価格が変っていなければ消費量が減って効用が下がる。X 財の価格が下がった場合には逆の変化が起きる。したがって X 財の消費に「実際に支払う金額」の変化は他の財の消費から得られる効用に影響する。「支払ってもよいと考える金額」と「実際に支払う金額」とは消費者の効用に逆の影響を与えるので，前者から後者を引くことによって上で説明した 2 つの効用の変化を消費者余剰の変化によって表すことができる。

一方生産者余剰は，**均衡価格を表す直線と供給曲線との間の部分の面積**である。供給曲線が企業の限界費用を表していることを考えれば，生産者余剰は企業の収入である長方形 COJE の面積から可変費用の合計である台形 BOJE の面積を引いたものであり，企業の利潤に相当するものである。正確には利潤と固定費用の和である。固定費用は供給曲線には表されていない。消費者余剰と生産者余剰とを合わせたもの，すなわち三角形 ABE の面積は**総余剰**と呼ばれ，この財の市場についての社会的厚生を表すものと見なされる。固定費用は社会的厚生に含まれるべきものではないが短期的には一定であるから政策の効果を分析するときなどには問題にならない。生産者余剰が総余剰に含まれることについては，消費者は労働者であるばかりでなく資本家でもあり企業の利潤も国民の所得に含まれ，その所得によって財の消費をすることができるから生産者余剰も社会的厚生に含まれるべきものであると考えることができる。政策の変化などによって生産者余剰すなわち利潤に変

で，ここで貨幣というのはそれで購入可能な財一般を指している。その意味では貨幣ではなく『購買力』あるいは『所得』と呼んだ方がよいかもしれない。

化があれば，所得が変化し消費者の消費も影響を受ける。ただし，ある特定の財の需要曲線は消費者の所得が一定であるとの仮定のもとに描かれているので消費者余剰の定義においては生産者余剰の変化による消費の変化は考慮されていない。また財の価格変化がもたらす所得効果も無視されている。しかし，消費される財の種類がたくさんあって 1 つの財が消費者の予算に占める割合が小さければ生産者余剰の変化や所得効果による消費の変化は小さくなるであろう。

もし何らかの理由で（たとえば政府の規制によって）この財の価格が p^* から p^0 に上昇し，需要の減少によって消費量が OK になったと考えてみよう。消費者余剰は三角形 AHI の面積になり，生産者余剰は台形 HBGI の面積になる。生産者余剰は増えるが消費者余剰がその増加分以上に減り，総余剰は台形 ABGI の面積になって価格が p^* のときより三角形 IGE の面積だけ小さくなる。同様に価格が p^* より低い p^1 になると供給が減ってやはり消費が OK まで減る。この場合は生産者余剰が三角形 LBG に，消費者余剰が台形 ALGI になり，総余剰は三角形 IGE の面積の分だけ小さくなる。したがって総余剰は均衡価格において最大となることがわかる。これは競争経済における消費と生産の効率性を示すものである。

■生産者余剰と消費者余剰–少し数学的な取扱い　競争的な企業の利潤は次のように表される。

$$\pi = px - c(x) - f$$

p は財の価格，x は産出量，$c(x)$ は固定費用を除く費用すなわち可変費用，定数 f は固定費用である。各企業は p を与えられたものとして利潤を最大化すべく x を決める。その条件はこの式を微分して 0 とおくことによって

$$p - c'(x) = 0$$

となる。$c'(x)$ は限界費用である。p が変化するとそれに応じて限界費用が p に等しくなるように x を決めるから，限界費用曲線が企業の供給曲線となる。供給曲線が右上がりなのは限界費用曲線が右上がりであるという仮定を反映している。各々の価格の値に対して各企業の供給を合わせたものが市場全体の供給を表す。各企業について価格と限界費用曲線の間の部分の面積は次のようになる。

$$\int_0^{x^*} (p - c'(x))dx = [px - c(x)]_0^{x^*} = px^* - c(x^*),\ c(0) = 0 \text{ とする}$$

x^* は実際に選んでいる産出量である。$c'(x)$ は $c(x)$ を微分して得られたものであるから $c'(x)$ を積分すると $c(x)$ になる。この式は各企業の利潤に固定費用を加えたものに等しい。これが各企業の生産者余剰であり，それをすべての企業について合計したものが市場全体の生産者余剰である。市場の供給曲線は市場全体の産出量に対応した企業の限界費用を表しているので，価格と供給曲線の間の面積が市場全体の生産者余剰を表す。貿易政策

などの経済政策が及ぼす短期的な効果を考えるのであれば固定費用は一定と考えられるので生産者余剰の変化は政策の効果を表す 1 つの指標になる。

次に消費者余剰を考える。財を X 財とそれ以外に分類し，それ以外の財（Y 財と呼ぶことにする）はまとめて考えその価格は 1 であるとして（財の消費量の単位を適当にとればよい），消費者の効用と予算制約式が次のように表されるものとする。

$$u(x, y),\ px + y = m$$

x は X 財の消費量，p はその価格，y は Y 財の消費量，定数 m は消費者の所得である。各消費者にとっては m は与えられたものである。$px + y = m$ より $y = m - px$ として効用関数に代入すると

$$u(x, m - px)$$

と x だけの式で表される。これを x で微分して 0 とおくと

$$u_x - pu_y = 0$$

となる。u_x，u_y は X 財，Y 財の限界効用である。この式から

$$\frac{u_x}{u_y} = p$$

が得られる。これは X 財の Y 財に対する限界代替率が相対価格に等しいことを意味するものである。ここでさらに u_y が一定で 1 に等しいものと仮定すると

$$u_x = p$$

が得られる。これは効用関数を $u(x, y) = u(x) + y$ と仮定して計算した結果 $u'(x) = p$ と同じであり，X 財の限界効用がその価格に等しいことを意味する。効用は序数的効用であるから効用や限界効用の値そのものには意味がなく限界代替率のような相対的な比較に意味がある。Y 財の限界効用 u_y が 1 で一定であると仮定すると u'(あるいは u_x)，$u(x)$ は Y 財 1 単位の効用を基準とした X 財の限界効用，効用を意味することになる。Y 財の価格を 1 と仮定しているから，この Y 財は事実上お金（貨幣あるいは所得）を表している。すなわち u'，$u(x)$ はお金を単位として表現した X 財の限界効用，効用である。

消費者の需要曲線は価格と需要との対応関係を表したものであるが，その価格が限界効用に等しくなるように消費量すなわち需要を決めるというのがこの式の意味することである。したがって個人の需要曲線は消費量と限界効用の対応関係を表していることがわかる。市場の需要曲線は各価格における個々の需要を合計したものであるから市場全体の需要と消費者の限界効用の対応を表す。需要曲線と価格の間の部分の面積は次のようになる。

$$\int_0^{x^*} (u'(x) - p)dx = [u(x) - px]_0^{x^*} = u(x^*) - px^*,\ u(0) = 0 \text{ とする}$$

x^* は実際に選んでいる消費量である。$u'(x)$（または $u_x(x)$）は $u(x)$ を微分して得られたものであるから $u'(x)$ を積分すると $u(x)$ になる。この式は各消費者の効用から X 財への支払い額を引いたものに等しい。これが各消費者の X 財についての消費者余剰であり，それをすべての消費者について合計したものが市場全体の消費者余剰である。

生産者余剰と消費者余剰を足し合わせると

$$u(x^*) - px^* + px^* - c(x^*) = u(x^*) - c(x^*)$$

となり，X 財の消費から得られる効用とその生産費用の差に等しくなる。ここでは x^*, $u(x^*)$, $c(x^*)$ は経済全体での産出量（=消費量），消費者の効用，可変費用を表している。これが総余剰と呼ばれるものであり，社会的厚生を表現していると考えられる。

ある政策によって消費者余剰が増えれば社会的厚生が高まるのはもちろんであるが，生産者余剰の増加も消費者の所得の増加をもたらし X 財またはそれ以外の財の消費量を増やすので社会的厚生の増加につながる。

物品税と死重的損失

ある財の価格を p として需要関数を

$$D = 400 - 4p$$

供給関数を

$$S = 4p - 160$$

とする。それぞれ

$$p = -\frac{1}{4}D + 100$$

$$p = \frac{1}{4}S + 40$$

と書ける。需要と供給が等しい均衡における価格は 70，そのときの取引量は 120 である。需要曲線・供給曲線を図に描くと，価格 70 を表す水平線とそれぞれの間の面積で表される消費者余剰，生産者余剰はどちらも 1800 である。ここで 1 単位当たり 10 の物品税が課されたとすると供給関数は

$$S = 4(p - 10) - 160 = 4p - 200$$

あるいは

$$p = \frac{1}{4}S + 50$$

となる。新しい供給曲線はもとの供給曲線が上に 10（物品税の分）平行移動した形になっている。均衡における価格は 75，そのときの取引量は 100 である。新たな供給曲線を用

いて上と同様に消費者余剰，生産者余剰を求めるとともに 1250 となる。税収はもとの供給曲線と新しい供給曲線との間の部分の内，供給量が 0 から 100 までの平行四辺形の面積で表され，その値は 1000 に等しい。消費者余剰，生産者余剰と合わせた総余剰（税収は何らかの方法で国民に還元されるので総余剰に含まれる）は 3500 であり，課税前の総余剰より 100 小さい。この 100 を**死重的損失** (deadweight loss) と呼ぶ。図 3.12 で表せばもとの均衡 E(120, 70)，新たな均衡 F(100, 75) および 1 単位当たりの企業の収入（価格 – 物品税）に対応した H(100, 65) の 3 点からなる三角形の面積に等しい。死重的損失は取引量が競争的な均衡における 120 に満たないことによって引き起こされる。税収を表すのは平行四辺形 BCHF である。消費者余剰と生産者余剰の合計は，課税前は三角形 ACE，課税後は三角形 ABF で表される。

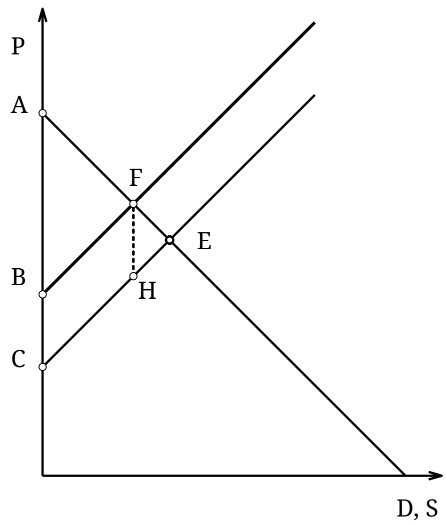


図 3.12　物品税と死重的損失

3.9　独占企業の行動

ここまでは完全競争市場における企業の行動を考えてきたが，この節では独占企業の行動について検討する。**独占** (monopoly) とはある財の市場においてその財を供給する企業が一つしかない状況を指し，そのただ一つの企業を**独占企業**と呼ぶ。産業が独占的になる理由としては，先に述べた政府による規制や特殊な生産技術あるいは特許などの参入障壁によって新しい企業の参入が妨げられている場合とともに，規模の経済性によって産業が独占的になることも考えられる。規模の経済性とは生産規模の拡大に伴って限界費用や平均費用が低下していくという現象であるが，産出量が小さいうちは費用が高く，かなりの

生産規模に至るまで規模の経済性が働いて費用が下がっていくような場合には，2 社以上の企業が市場を分け合うと需要が十分でないために両方の企業の利潤がマイナスになるということも起こりうる。そのような状況ではただ 1 社だけが正の利潤を稼いで活動することができる。このように特に規制がなくても独占になってしまうような産業は自然独占と呼ばれる。電力など大規模な設備を必要とする産業に見られると考えられる現象である。

競争的な企業の場合は，市場全体に占めるその企業の供給量の割合が小さく価格に影響を与えるような行動ができないと仮定されていた。しかし，独占企業の場合にはその企業自身の供給量がすなわち市場の供給となるため，その行動が財の価格に影響を与えることは避けられず，また企業自身がその影響を考慮に入れて行動せざるをえない。したがって独占企業は競争的な企業とは異なった行動原理に従うものと考えられる。

3.9.1 限界収入

独占企業の供給量は市場全体の供給に等しいから需要曲線がわかれば独占企業は供給量を決めることによって価格を決めることができる。独占企業が供給量を増やしそれを消費者に買ってもらえるようにするには価格を引き下げなければならない。その際すべての消費者に同じ価格で販売しなければならないので，追加的に供給する財の価格を下げるだけではなく供給量全体の価格を下げる必要がある。

供給量 1 単位の増加による収入の増加を**限界収入** (marginal revenue) と呼ぶ。上で述べたことから限界収入は

$$\begin{aligned}\text{限界収入} =& \text{供給量の増加による収入の増加}\\ &- \text{価格の低下による収入の減少}\end{aligned}$$

と表されることがわかる。需要の価格弾力性が小さい財の場合，価格の変化に対する需要の反応が小さいので，供給の増加に見合った需要の増加を生み出すのに必要な価格の引き下げ幅が大きくなり限界収入は小さくなる。場合によっては限界収入がマイナスになることもありうる。

表 3.3 には表 3.1 と同じ費用構造をもつ独占企業について財の需要曲線が

$$p = 320 - 10x, \qquad p \text{ は価格，} x \text{ は供給量} \tag{3.10}$$

で表される場合の収入，限界収入，利潤の例が示されている[*22]。産出量 10 に対する限界収入は産出量 10 のときの収入 2200 から産出量 9 のときの収入 2070 を引いて 130 となる。産出量 10 に対する価格（すなわち消費者に 10 単位買ってもらえる価格）は 220 であるが，それまでの 9 単位の価格が 230 から 220 に下がるので収入が 90 減少するため限界収入は 130 になるわけである。競争的な企業の場合は供給量の増加に伴う価格の低下を考慮する必要がない（あるいは意味がない）ので限界収入は価格に等しい。

[*22] この式は価格を需要の関数として表しているので逆需要関数と呼ばれることもある。

産出量	価格	収入	総 費 用	限界収入	限界費用	利潤
0	320	0	500	–	–	–500
1	310	310	650	310	150	–340
2	300	600	770	290	120	–170
3	290	870	870	270	100	0
4	280	1120	950	250	80	130
5	270	1350	1020	230	70	330
6	260	1560	1080	210	60	480
7	250	1750	1150	190	70	600
8	240	1920	1230	170	80	690
9	230	2070	1330	150	100	740
10	220	2200	1450	130	120	750
11	210	2310	1600	110	150	710
12	200	2400	1780	90	180	620
13	190	2470	1990	70	210	480
14	180	2520	2230	50	240	290
15	170	2550	2500	30	270	50

表 3.3　独占企業の利潤最大化

3.9.2　独占企業の利潤最大化

利潤は収入から費用を引いたものであるから 1 単位産出量を増加させたときの独占企業の利潤の変化は次のように表される。

$$\begin{aligned}\text{利潤の変化} =& \text{産出量の増加による収入の増加}\\ &- \text{産出量の増加による費用の増加}\\ =& \text{限界収入} - \text{限界費用}\end{aligned}$$

したがって限界収入が限界費用より大きい間は産出量の増加によって利潤が増えるが，限界費用が限界収入より大きくなると産出量の増加によって利潤は減る。その境目のところで利潤が最も大きくなる。

表 3.3 では産出量 10 のとき利潤が最大の 750 となる。この産出量 10 に対する限界収入は 130 でそのときの限界費用 120 を上回っているが，1 単位多い産出量 11 については限界収入 110，限界費用 150 で限界費用の方が 40 大きくなり利潤も 40 減少する。一般的には次のことが言える。

独占企業の利潤最大化条件　独占企業にとって利潤が最大となる産出量はその産出量のときの限界費用が限界収入より低いかまたは等しく，1 単位産出量を増やすと限界費用が限界収入を上回るようになる水準である。

これは競争的な企業の利潤最大化条件において価格のところが限界収入に置き換わった形になっている。上で述べたように競争的な企業の場合には価格と限界収入とが等しくなっているわけである。

産出量が分割可能な場合には限界費用が限界収入にいくらでも近くなるように産出量を選ぶことができるので独占企業の利潤最大化の条件は以下のようになる[*23]。

独占企業の利潤最大化条件（産出量が分割可能な場合）　産出量が分割可能な場合には独占企業は限界費用と限界収入が等しくなるように産出量を選ぶことによって利潤を最大化する。

これは図 3.13 のように表される。図の MR は限界収入を表す曲線（限界収入曲線）である。点 E が独占企業の利潤を最大化する点を表し，そのときの産出量は x_m で示されている。表 3.3 からわかるように各産出量に対して限界収入はそのときの価格より低いので MR は需要曲線より下に位置している。点 E で限界収入曲線と限界費用曲線が交わっている。点 A はこの産出量に対応する需要曲線上の点でありそのときの価格 p_m が独占企業がつける価格（『独占価格』と呼ぶ）である。

[*23] 産出量がいくらでも分割できる場合には限界収入は 1 単位供給を増やしたときの収入の増加ではなく，ごくわずかに供給を増やしたときの収入の増加と供給の増加との比（供給増加 1 単位当りの収入の増加）である。

3.9.3 独占と完全競争との比較

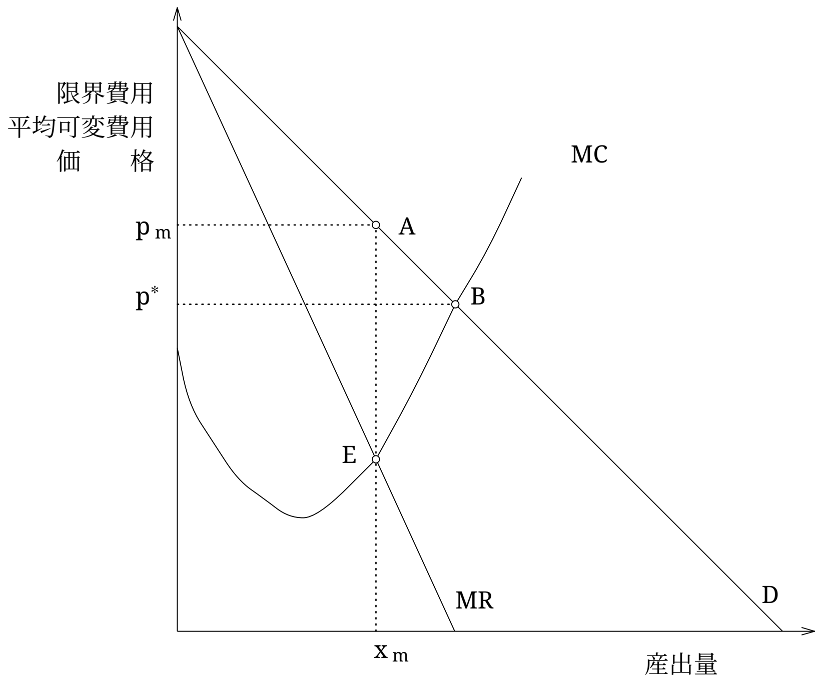


図 3.13 独占企業の利潤最大化 - 産出量が分割可能な場合

表 3.3 で完全競争的な企業の行動を考えると価格が限界費用に等しい産出量，あるいは価格が限界費用を上回る最も大きな産出量を選ぶことになるので選ばれる産出量は 12 である。これは独占企業が選ぶ産出量 10 より大きくそのときの価格は低い。したがって独占企業の行動は競争的な企業と比べて消費者の効用を低くすることがわかる。図 3.13 の点 B に対応した産出量が企業が完全競争的な場合に選ばれる産出量であり，そのときの価格は p^* である。

3.9.4 簡単な数式モデル

独占企業の利潤最大化問題について簡単な数式モデルを考えてみよう。ある独占企業の費用が次のように表されるとする。

$$C(x) = 4x^2 + 300 \tag{3.11}$$

x は産出量である。300 は固定費用である。財の需要は，価格を p として以下のような線形（一次関数）の需要関数で表されるものとする。

$$p = 180 - 2x \tag{3.12}$$

x は需要を表す。財の価格は独占企業の産出量と需要が等しくなるように決まるので産出量，需要ともに x で表すことができる。すると利潤は

$$\pi = (180 - 2x)x - 4x^2 - 300 = -6x^2 + 180x - 300$$

となる。これは x の二次関数であるから

$$\pi = -6(x - 15)^2 + 1050$$

のように変形され，$x = 15$ のとき最大利潤が 1050 となる。

　この企業の産出量が a（a は 1 以下の正の定数）の単位で変化させられるとして，$x = 15$ における限界費用を求めると，$x = 15 - a$ から $x = 15$ までの変化を考えて，

$$\begin{aligned} MC(15) =& \frac{4(15)^2 + 300 - [4(15-a)^2 + 300]}{a} = \frac{120a - 4a^2}{a} \\ =& 120 - 4a \end{aligned}$$

となる。一方産出量が 15 より a だけ大きい $x = 15 + a$ のときの限界費用は $x = 15$ と $x = 15 + a$ との間の変化として求められるから

$$\begin{aligned} MC(15+a) &= \frac{4(15+a)^2 + 300 - [4(15)^2 + 300]}{a} = \frac{120a + 4a^2}{a} \\ &= 120 + 4a \end{aligned}$$

が得られる。同様にして限界収入を求めてみよう。企業の収入を R で表すと

$$R = \text{価格} \times \text{産出量} = (180 - 2x)x$$

である。$x = 15$ における限界収入は，$x = 15 - a$ から $x = 15$ までの変化を考えて

$$\begin{aligned} MR(15) &= \frac{15(180 - 30) - (15 - a)(180 - 30 + 2a)}{a} = \frac{120a + 2a^2}{a} \\ &= 120 + 2a \end{aligned}$$

となる。一方産出量が 15 より a だけ大きい $x = 15 + a$ のときの限界収入は，$x = 15$ と $x = 15 + a$ との間の変化で求められるから

$$\begin{aligned} MR(15+a) &= \frac{(15+a)(180 - 30 - 2a) - 15(180 - 30)}{a} = \frac{120a - 2a^2}{a} \\ &= 120 - 2a \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから，$x = 15$ のときには限界費用は限界収入より小さく，a だけ産出量を増やした $x = 15 + a$ では限界費用が限界収入より大きくなっているので，$x = 15$ が先に求めた利潤最大化の条件を満たしていることがわかる。これは以下のようにして確認できる。

$$MC(15) = 120 - 4a < 120 + 2a = MR(15)$$
$$MC(15 + a) = 120 + 4a > 120 - 2a = MR(15 + a)$$

a が非常に小さい値であれば，$MC(15) = MR(15) = 120$ が得られ $x = 15$ において限界費用と限界収入とが等しくなる。

3.9.5　需要独占

通常，独占とは供給する側が独占的であることを言うが，需要側が独占であるという可能性もある。たとえばある機械の部品を生産する企業がたくさんあって競争的に活動し，その部品を購入して製品を作るメーカーが独占的であるような場合である。簡単な数値例で考えてみよう。部品の価格を p，メーカーの産出量を x，また産出量と部品使用の割合を 1:1，製品の価格をとりあえず 120 とし，部品生産の供給関数（このメーカーに部品を供給する企業の合計で）が

$$p = 20 + 2x \text{（メーカーの産出量と部品の使用量は等しい）}$$

であるとすると，メーカーの利潤は

$$\pi = 120x - (20 + 2x)x = 100x - 2x^2$$

となる。したがってこのメーカーの利潤を最大化する産出量 (=) 部品の需要は 25 である。このときメーカーの限界費用は

$$20 + 4x = 120$$

で製品の価格に等しい（製品市場では独占であるとは仮定されずメーカーにとって製品価格を一定としているので)。しかしこのときの部品の価格は 70 であり限界費用とは等しくない。もし部品市場も競争的であればメーカーにとって部品の価格は一定となる（120 とする）ので産出量 (=) 部品の需要は 50 となるはずである。

3.10　製品差別化と独占的競争

この節では完全競争と比べてより現実的なモデルと見なされる，製品差別化された財を生産する独占的競争のモデルについて考える。

3.10.1　製品差別化

これまでは一つの産業に属する企業はすべてまったく同じ製品，すなわち同質的な製品を生産すると仮定してきた。同質的であるとは消費者から見てまったく区別できない，また区別する意味がないということである。しかしさまざまな企業が生産する財が同じ種類の財であっても消費者から見てまったく同じではないというものが多いのではないかと考えられる。マヨネーズについて考えると Q 社のマヨネーズと A 社のマヨネーズとでは味が少し違っていて，Q 社のものを好む人もいれば A 社の製品の方がよいと思う人もいるであろうし，ビールについても K 社の L ビールを好む人もいれば A 社の SD ビールが好きな人もいるであろう。このように同種の製品ではあるが消費者から見て少し違っている，具体的には味（食品，飲料品の場合），色調やデザイン（洋服や家具など），機能（性能の差ではなく含まれている，あるいは重点がおかれている機能の違い，テレビ，電子レンジ，電話機等）などの面で異なった製品を生産することを**製品差別化** (product differentiation) と呼ぶ。自動車について考えてみても同じ排気量の車であってもデザインの違いなどによってさまざまな消費者の好みに合わせようとしているから，やはり差別化された製品である。ほとんどの消費財が製品差別化されていると言えるかもしれない。

一般に製品差別化というのは，高級品と普及品のように品質に差のある製品が生産されていることではなく消費者の好みの違いに応じてタイプの異なる製品が生産されていることを指すが，消費者の所得の違いに対応して品質とそれに応じて価格が異なる製品が生産されている場合も**垂直的製品差別化**と呼んでこれに含めることもある。その場合消費者の好みに合わせた製品差別化は**水平的製品差別化**と呼ばれる。

3.10.2　独占的競争

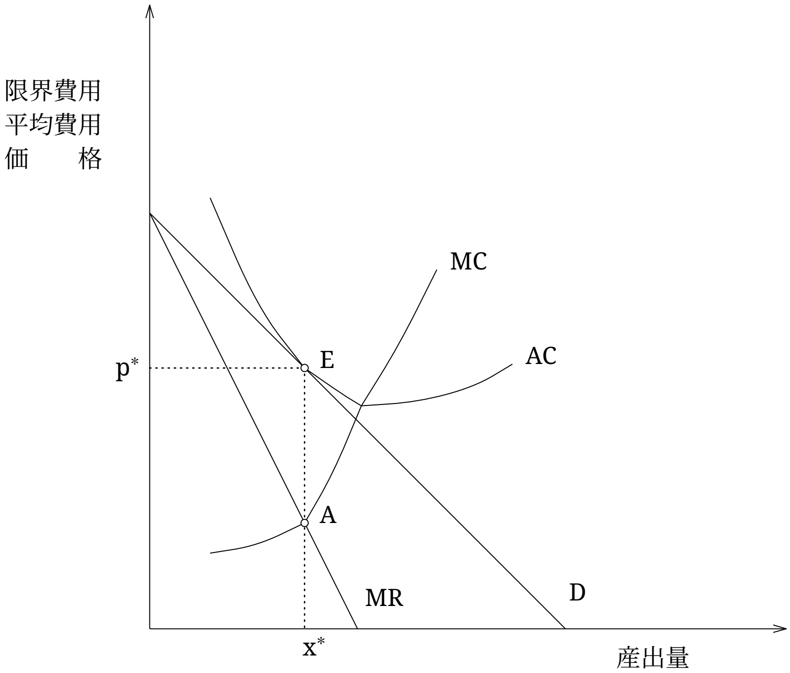


図 3.14　独占的競争

企業の数は完全競争と同様に多数であり，また参入・退出も自由であるが，各企業が差別化された財を生産しているような産業の状態を**独占的競争** (monopolistic competition) と呼ぶ*24。完全競争ではすべての企業が同質的な財を生産していたために，ある企業が他の企業より少しでも高い価格をつけると需要をすべて失うことになり市場で決まる価格に従わざるをえないが，差別化された製品を生産している場合には，それぞれの製品についてそれを好む消費者がいるので他の企業より少し高い価格をつけたからといってすべての顧客を失うわけではない。消費者によって特定の製品に対する好みの強さにも差があり，少しの価格差で他の企業の製品に乗換える人もいれば，かなりの価格差があっても購入する製品を変えない人もいるであろう。したがって，各企業が生産する財に対する需要は価格の上昇（低下）によって徐々に減少（増加）する。すなわち，独占的競争産業における企業は独占企業と同様に右下がりの需要曲線のもとで生産を行うことになる。したがっ

*24 「独占的競争」という言葉は参入・退出が自由で利潤がゼロとなるケースを指すことが多いが，そうでない場合でも製品差別化（通常は水平的製品差別化）された財を生産する寡占（次節以降で説明する）を表すのに用いられることもある。

て，産出量を少し増やしてそれをすべて売ろうとすると価格を下げなければならず，独占の場合と同様に限界収入は価格より小さくなる。参入・退出が自由なので企業は正の超過利潤を稼ぐことはできない。

独占的競争産業の均衡は図 3.14 のように描かれる。企業は限界収入と限界費用が等しくなる点 A に対応した産出量 x* を選んでいるが，その産出量において企業の需要曲線と平均費用曲線とが点 E で接しているため価格と平均費用が等しくなっていて企業の超過利潤はゼロである。x* 以外の産出量では平均費用の方が価格（価格は需要曲線によって表されている）より大きいので利潤はマイナスになっており x* においてのみ利潤はゼロである。均衡において平均費用曲線と需要曲線とが接するということは，その点において平均費用曲線が右下がり（産出量の増加に伴って平均費用が下がる）になっていなければならない。すなわち独占的競争の均衡にはある程度の規模の経済性が必要である。規模の経済性の度合いに応じて参入できる企業の数も変わる。規模の経済性の度合いが小さければ一つ一つの企業の産出量は小さくなり多くの企業が参入可能となるが，規模の経済性の度合いが大きければあまり多くの企業が参入できなくなる。

3.11　クールノーの寡占モデル

3.11.1　クールノーモデル - 同質財の場合

独占的競争では完全競争と同様に多くの企業が差別化された財を生産している産業を考えた。独占ではないが企業数が少ない産業は**寡占** (oligopoly) と呼ばれる。寡占には同質的な財を生産している場合と，差別化された財を生産している場合がある[*25]。ここでは 2 つの企業が同質的な財を生産する最も簡単なケースを考えよう。企業数が 2 つの寡占は特に複占 (duopoly) と呼ばれることがある。具体的に企業 A と企業 B が，ある同じ財を生産しているとする。その財の需要は以下のような需要関数で表されると仮定する。

$$p = 20 - X \tag{3.13}$$

p はこの財の価格，X は需要である。企業 A と企業 B の産出量をそれぞれ x と y で表すと市場均衡においては $X = x + y$ となっていなければならない。各企業が産出量を決めるとそれに応じて価格が決まる。企業 A，B の費用関数は同一であり，$c(x) = 2x$ および $c(y) = 2y$ で表されるものとする。したがって各企業について限界費用も平均費用（および平均可変費用も）も一定で 2 に等しく，固定費用はない。企業 A の利潤は

$$\pi_A = px - 2x = (20 - x - y)x - 2x \tag{3.14}$$

[*25] 企業数が多い少ないは程度問題であり前注で述べたように差別化された財を生産する寡占を独占的競争と呼ぶこともある。

同様に企業 B の利潤は

$$\pi_B = py - 2y = (20 - x - y)y - 2y \tag{3.15}$$

と表される。ここで，企業 A，企業 B は以下に述べる**クールノーの仮定**に従った行動をとるものとする。

クールノーの仮定　企業 A(または B) は，企業 B(または A) の産出量を与えられたものとして，あるいは企業 B(または A) の産出量は変化しないものと考えて，自分の利潤が最も大きくなるように産出量 x(または y) を決める。

すると (3.14) の企業 A の利潤は，y を一定として

$$\begin{aligned}\pi_A &= (20 - x - y)x - 2x = -x^2 + (18 - y)x \\ &= -[x - (9 - \frac{1}{2}y)]^2 + (9 - \frac{1}{2}y)^2\end{aligned}$$

と変形でき，二次関数の最大値を求める手法によって企業 A の利潤を最大化する x は次の式を満たすことがわかる。

$$x = 9 - \frac{1}{2}y \tag{3.16}$$

この式は，企業 B が選んだ（あるいは選ぶであろう）産出量 y に対応して企業 A は (3.16) より求められる産出量を選ぶということを意味する。同様の計算で企業 B について

$$y = 9 - \frac{1}{2}x \tag{3.17}$$

が得られる。(3.16) は企業 A の，(3.17) は企業 B の**反応関数** (reaction function) と呼ばれる。均衡においては両企業の産出量が利潤最大化の条件を満たしていなければならないから，(3.16)，(3.17) の両方の式が成り立っていなければならない。したがってこれらを連立一次方程式として解くと各企業の産出量が次のように求まる。

$$x = y = 6 \tag{3.18}$$

このようにして求められた寡占の均衡は**クールノー均衡**と呼ばれる。クールノー均衡の考え方はゲーム理論のナッシュ均衡と基本的に同じなので，ナッシュ・クールノー（あるいはクールノー・ナッシュ）均衡とも呼ばれる。(3.13) より財の均衡価格は $p = 20 - 12 = 8$ となり，企業 A，B の利潤は 36 と求まる。この例では両企業の費用関数が同一なので均衡において選ばれる産出量も等しいが，費用関数が企業によって異なっている場合はそうはならない。

寡占のモデルは図で表すこともできる。図 3.15 の RA，RB はそれぞれ企業 A，B の反応関数 (3.16) と (3.17) を図示したものであり，**反応曲線** (reaction curve) と呼ばれる。図では直線になっているが，これは需要関数も費用関数も一次式であるためで一般的には直線

になるとは限らない。均衡においては両企業が反応関数（曲線）にもとづいて産出量を選んでいるので，RA と RB の交点 C がクールノー均衡を表す。

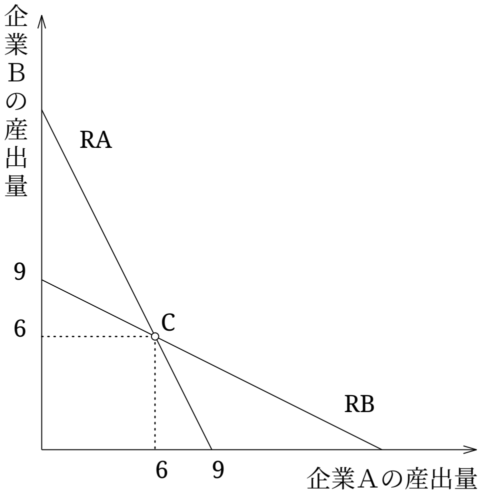


図 3.15　クールノーの寡占モデル

3.11.2　クールノーモデル - 企業数が 3 以上の場合

企業数が 3 以上の場合のクールノーモデルも複占と同じように考えることができる。ごく一般的に表してみよう。企業数を n（正の整数），各企業を i で表しその産出量を x_i，合計の産出量を X，価格を p とする。また需要関数（逆需要関数）を

$$p = p(X)$$

企業 i の費用関数を

$$c(x_i)$$

とし，費用関数はすべての企業に共通であるとする。固定費用は $c(0)$ と表すことができる。企業 i の利潤は

$$\pi_i = p(X)x_i - c(x_i)$$

であるから，利潤最大化の条件は

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = p + x_i p'(X) - c'(x_i) = 0$$

となる。$c'(x_i)$ は限界費用であり，$p'(X)$ は需要曲線の傾きを表す。各企業は自分以外の企業の産出量を与えられたものとして利潤を最大化するので x_i の変化は X の変化に等しく，単純に $p(X)$ を微分すればよい。具体的に $p = 10 - X$，$c(x_i) = x_i^2 + 2$ とし，すべての

企業について費用関数が同一なので均衡における産出量も等しいことを考慮すれば利潤最大化条件は

$$10-(n+1)x_i-2x_i=0$$

となり，

$$x_i=\frac{10}{n+3}$$

が得られる。このとき価格は $p=\frac{30}{n+3}$ に等しく，各企業の利潤は

$$\pi_i=\frac{200}{(n+3)^2}-2$$

に等しい。企業の参入が自由であるとすれば利潤が負でない限り新しい企業が参入するので

$$\frac{200}{(n+3)^2}-2\geqq 0$$

から，$n=7$ となるまで企業が参入することがわかる。

3.11.3　クールノーモデル - 差別化された財を生産する場合

2 つの企業が差別化された財を生産するケースを考える。企業を A，B，それぞれの産出量を x_A，x_B，各財の価格を p_A，p_B とする。差別化された財なので価格が異なる可能性がある。それぞれの（逆）需要関数を

$$p_A=12-x_A-kx_B$$

$$p_B=12-x_B-kx_A$$

とする。k は $-1<k<1$ を満たす定数であり，k が 1 に近づいたときの極限が同質財の場合に対応する。k が正の場合は両企業の財が代替的であることを，負の場合は補完的であることを意味する。簡単化のために費用をゼロとする。企業 A の利潤は

$$\pi_A=(12-x_A-kx_B)x_A$$

となり，利潤を最大化する産出量は

$$x_A=6-\frac{k}{2}x_B$$

を満たす。同様に

$$x_B=6-\frac{k}{2}x_A$$

を得る。これらが反応関数である。k の符号によって傾きが異なる。これらから均衡産出量

$$x_A=x_B=\frac{12}{2+k}$$

が求まる。また，そのときの価格は

$$p_A = p_B = \frac{12}{2+k}$$

となる。

3.11.4　独占的競争の簡単なモデル

モデルの構造は企業数が 3 以上の場合のクールノーモデルと似ている。n 社の企業が互いに差別化された財を生産し，各企業の需要関数は次のようであるとする。

$$p_i = a - b\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j - x_i$$

p_i は価格，x_i は産出量である。$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j$ は i 以外の企業の産出量の和に等しい。$a > 0$, $b(0 < b < 1)$ は定数。n は定数ではなく企業の利潤がゼロになるという条件によって決まる。各企業の費用関数を次のように仮定する（c，f は正の数）。

$$c_i = cx_i + f$$

c は一定の限界費用，f は固定費用である。そうすると各企業の利潤は次のように表される。

$$\pi_i = \left(a - b\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j - x_i\right)x_i - cx_i - f$$

すべての企業の産出量が等しいとすると利潤最大化の条件

$$a - [(n-1)b + 2]x_i - c = 0$$

によって

$$x_i = \frac{a-c}{(n-1)b+2}$$

を得る。価格は

$$p_i = a - [(n-1)b+1]x_i = \frac{a - [(n-1)b+1]c}{(n-1)b+2}$$

である。そのとき企業の利潤は

$$\pi_i = \left[\frac{a-c}{(n-1)b+2}\right]^2 - f = x_i^2 - f$$

を満たす。これがゼロに等しいとすると

$$x_i = \sqrt{f}$$

が得られる。$p_i - c = x_i$ なので

$$p_i = \sqrt{f} + c$$

である。一方各企業の平均費用 AC_i は次のように表される。

$$AC_i = c + \frac{f}{x_i}$$

x_i を横軸にとって描いた平均費用曲線の傾きは

$$\frac{dAC_i}{dx_i} = -\frac{f}{x_i^2}$$

に等しい。ここに $x_i = \sqrt{f}$ を代入すると

$$\frac{dAC_i}{dx_i} = -1$$

が得られるが，これは（他の企業の産出量を一定と仮定した）各企業の需要曲線の傾きに等しい。すなわち各企業が最大化した利潤がゼロとなるまで企業が参入した均衡においては需要曲線と平均費用曲線は接しているから（利潤がゼロであることよりこれらは交わり，さらに傾きが等しい），このモデルは図 3.14 に描かれている独占的競争の均衡を表現していると考えられる。

3.12　シュタッケルベルク均衡

　クールノーの複占モデルでは両企業ともに相手の産出量が一定であると見なすと仮定していた。もし一方の企業が相手の反応を読んでいた場合にはどうなるであろうか。企業 A が企業 B の反応を計算に入れて自らの産出量を（企業 B より）先に決め，企業 B は企業 A の決定を見てから決めるものとする。企業 A，企業 B の産出量を x，y，価格を p（同質財を考える），費用関数を $c(x) = 2x$ および $c(y) = 2y$ として，需要が

$$p = 20 - x - y$$

で表されるとすると，企業 B の反応関数は上で求めたように

$$y = 9 - \frac{1}{2}x$$

となる（企業 B は企業 A の産出量を与えられたものとして行動する）。企業 A はこれを計算に入れるのでその利潤は

$$\pi_A = [20 - x - (9 - \frac{1}{2}x)]x - 2x = 9x - \frac{1}{2}x^2$$

となるから，利潤を最大化する産出量は $x = 9$ となり，企業 B の産出量は 4.5 である。このとき企業 A，B の利潤はそれぞれ 40.5，20.25 となる。

このようなモデルはシュタッケルベルクのモデルと呼ばれ，その均衡をシュタッケルベルク均衡と言う。また企業 A をリーダー (leader)，企業 B をフォローワー (follower) と呼ぶ。シュタッケルベルク均衡はゲーム理論における部分ゲーム完全均衡の一種である。

3.13　ベルトランモデル

3.13.1　ベルトラン均衡 - 同質財を生産する場合

クールノーのモデルでは各企業が産出量を決めると考えたが，価格を決める場合はどうなるだろうか[*26]。同質財を生産する複占で企業 A，B の限界費用（平均費用も）は 2 であり（固定費用はない），需要が

$$p = 20 - x - y$$

で表される場合を考える。まず企業 A，B がともに価格を 8 にしていたとすると（産出量は等しいものと仮定する）両企業の利潤は 36 である。ここで企業 A が価格を 7 に下げると，同質財であるからすべての消費者が企業 A の財を買うことになり企業 A の販売量は 13，利潤は 65 に増える。したがってクールノーモデルの均衡は企業が価格を選ぶベルトランモデルでは均衡とならない。もちろんこのとき企業 B の販売量，利潤は 0 である。それに対抗して企業 B が価格を 6 に下げるとすべての消費者が企業 B の財を買うことになり企業の販売量は 14，利潤は 56 になる。そのとき企業 A の販売量，利潤は 0 である。それに対抗して企業 A が価格を 4 に下げると販売量は 16，利潤は 32 になる，$\cdots$ と考えていくと価格が 2 より高い限り各企業は相手よりもわずかに低い価格をつけてすべての消費者を奪いそれまでよりも大きな利潤を得ることができる。ともに価格が 2 になると両企業の利潤は 0 になる。それ以上に価格を下げると売れば売るだけ損をすることになるし，自分だけが価格を上げると誰も買ってくれない。したがってともに価格 2 をつけ利潤が 0 になる状態が均衡となる。この均衡はベルトラン均衡と呼ばれる。このような競争行動を考えれば企業数がわずかに 2 であっても完全競争と同様の均衡が実現するのである。このベルトラン均衡もクールノー均衡と同様にゲーム理論のナッシュ均衡の一種である。

3.13.2　同質財で費用関数が二次関数の場合のベルトラン均衡

企業 A，B の産出量を x，y，財の価格を p_A，p_B とし，p_A，p_B の内小さい方を p として逆需要関数が

$$p = 1 - x - y$$

で，各企業の費用が $\frac{1}{2}x^2$，$\frac{1}{2}y^2$ であるとする．企業は価格を決め，消費者は安い方の企業の財を購入する．両企業が同じ価格を提示したときは $\frac{1}{2}$ ずつの消費者が各企業の財を買

[*26] 企業が決める変数を「戦略変数」と呼ぶ。クールノーのモデルでは産出量が戦略変数であり，ここで考えるベルトランのモデルでは価格が戦略変数である。

う．企業 A が独占の場合は $p_A = \frac{1}{3}$ のときに利潤が 0 になり（そのとき $p_B > p_A$ である，企業 B が独占の場合も同様），それより大きければ利潤は正，小さければ負である．

$(1 - p_A)p_A - \frac{1}{2}(1 - p_A)^2 \geqq 0$ より $p_A \geqq \frac{1}{3}$ となる．

両企業が生産をする複占の場合は $p_A = p_B = \frac{1}{5}$ のときに利潤が 0 になり，それより大きければ利潤は正，小さければ負である．

$p = p_A = p_B$ として $\frac{1-p}{2}p - \frac{(1-p)^2}{8} \geqq 0$ より $p \geqq \frac{1}{5}$ を得る．

また，$p = \frac{3}{7}$ のときに独占と複占の利潤が等しくなり，それより大きければ独占の方が，小さければ複占の方が利潤が大きい．

$(1 - p)p - \frac{1}{2}(1 - p)^2 \geqq \frac{1-p}{2}p - \frac{(1-p)^2}{8}$ より $p \geqq \frac{3}{7}$ が得られる．

このモデルにおいて均衡は以下のようになる．

$p = p_A = p_B$ で $\frac{1}{5} \leqq p \leqq \frac{3}{7}$.

そのとき独占より複占の方が利潤が大きい（かあるいは等しい）ので，ある企業が価格を下げて独占にしても利潤は増えず（$\frac{1}{3}$ より低い価格をつけて独占にすると利潤は負になる）．もちろん上げれば利潤は 0 になる．$\frac{1}{5}$ より価格を下げて独占にしてももちろん利潤は負になるが，両企業が $\frac{1}{5}$ より低い価格をつけると，両企業ともに利潤が負になるのでそのような均衡はない（価格を上げれば利潤は 0）．一方 $\frac{3}{7}$ より高い価格をつける独占においても複占においても，一つの企業（独占の場合はもう一方の企業）がその価格よりわずかに低く $\frac{3}{7}$ よりは高い価格をつけることによって利潤を増やすことができるので均衡にはならない．

均衡において $\frac{1}{5} < p \leqq \frac{3}{7}$ のときには企業は正の利潤を得る．そのとき価格を下げて独占にしても得にならないので限界費用が一定の場合と同様のメカニズムが働かない．

3.13.3　ベルトラン均衡 - 差別化された財を生産する場合

上記のクールノーモデルと同様に 2 つの企業が差別化された財を生産するケースを考える。企業を A，B，それぞれの産出量および需要を x_A，x_B，各財の価格を p_A，p_B とする。差別化された財なので価格が異なる可能性がある。それぞれの（逆）需要関数を

$$p_A = 12 - x_A - kx_B$$

$$p_B = 12 - x_B - kx_A$$

と仮定する。$-1 < k < 1$ である。この両式から

$$x_A = \frac{1}{1 - k^2}[12(1 - k) - p_A + kp_B]$$

$$x_B = \frac{1}{1-k^2}[12(1-k) - p_B + kp_A]$$

が得られる。これらが需要関数である。簡単化のために費用をゼロとする。企業 A の利潤は

$$\pi_A = \frac{1}{1-k^2}[12(1-k) - p_A + kp_B]p_A$$

となる。各企業は相手の価格を与えられたものとして自らの利潤が最大となるようにその価格を決めるから，利潤を最大化する価格は

$$p_A = 6(1-k) + \frac{1}{2}kp_B$$

を満たす。同様に

$$p_B = 6(1-k) + \frac{1}{2}kp_A$$

を得る。これらが反応関数である。したがって均衡価格

$$p_A = p_B = \frac{12(1-k)}{2-k}$$

が求まる。$0 < k < 1$ または $-1 < k < 0$ のとき，この価格は差別化された財を生産するクールノー均衡における価格よりは低いが[*27]，同質財のベルトラン均衡（費用がゼロなので価格もゼロになる）の価格よりは高い[*28]。企業間で費用が異なれば通常は均衡価格も異なる（演習問題 69 参照）。

k に数字を入れてクールノーモデルを含めて計算の練習をしてみていただきたい。たとえば

$$p_A = 24 - 2x_A - x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B - x_A$$

あるいは

$$p_A = 24 - 2x_A + x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + x_A$$

などで。

[*27]

$$\frac{12}{2+k} - \frac{12(1-k)}{2-k} = \frac{12k^2}{(2+k)(2-k)} > 0$$

[*28] $k = 1$ に近づいた極限が同質財の場合である。

3.14　寡占と独占，完全競争との比較

上で見た同質財を生産するクールノー均衡の例において企業 A，B のいずれかが生産をやめ残った企業が独占になったとすると，産出量や価格はどうなるかを考えてみよう。独占企業の場合，その企業の産出量が市場の需要，供給に等しくなるからそれを X で表すと利潤は

$$\pi_m = (20 - X)X - 2X \tag{3.19}$$

となり，利潤を最大にする産出量は $X = 9$ となる。これは寡占の場合の一企業の産出量よりは大きいが，両企業の産出量の合計より小さい。また均衡価格は 11，独占企業の利潤は 81 となる。

一方企業 A，B が完全競争的に行動したとすると，価格と限界費用とが等しくなるように産出量を選ぶから，各企業の産出量は 9 で合計 18，価格は 2 となる。また各企業の利潤はゼロである。

したがって，寡占における企業の行動は独占よりは競争的だが，完全競争よりは独占に近く，価格や合計の産出量も両者の間の値をとることがわかる。

3.15　価格差別

ここまでは企業が財の価格を決める際，買い手によって異なる価格をつけるということは想定せず，すべての買い手に同じ価格で販売すると仮定してきたし，今後も基本的にそうであるが，状況によっては，特に独占企業の場合買い手を区別し異なる価格をつけることによってより大きい利潤を得ることができる場合もある。それを価格差別と呼ぶが，価格差別にはいくつかの種類がある。

3.15.1　第 1 種価格差別

企業が 1 人 1 人の買い手を区別し，それぞれに異なる価格をつけることを第 1 種価格差別と呼ぶ。ある商品について企業が望む最低価格（限界費用・平均費用に等しい価格）が 1000 円であり，1 つずつ買う可能性がある 5 人の買い手が最大限払ってもよいと思う価格（効用を貨幣で表した値，留保価格と呼ぶ）がそれぞれ，2000 円，1600 円，1300 円，1000 円，800 円であるとする。企業が 1 人 1 人と交渉して価格を決めることができれば，最初の 4 人までにそれぞれ 2000 円，1600 円，1300 円，1000 円の価格で販売し 1900 円の利潤を得られるが消費者余剰はゼロとなる。5 人目には売らない。このように第 1 種価格差別が可能な場合は消費者余剰に相当する金額も企業が得ることになるが，供給量は競争的な場合と同じになる。

企業が各消費者の留保価格（効用の値）を知っていることが必要であるが，独占企業で

あって競争相手がいないことと買い手の間で転売できないことも条件である。転売できれば競争相手がいるのと同じことになる。同じ費用の別の企業が存在すれば，その企業は最初の 3 人までにそれぞれ 1900 円，1500 円，1200 円で売って 1600 円の利潤が得られる。そうすると最初の企業も値下げをする。というようにして結局すべてが 1000 円で販売されることになる。

1 人 1 つではなくいくつも買う場合でも同じ人が購入する 1 つ目，2 つ目，...，とそれぞれ払ってもよいと思う価格（限界効用を貨幣で表した値）をつけられれば消費者余剰をすべて企業が奪い取ることができる。これも第 1 種価格差別である。

現実には企業が消費者の効用，留保価格を知ることが困難であるので異なる方法として以下で述べる第 2 種価格差別，第 3 種価格差別がある。

3.15.2　第 2 種価格差別

第 2 種価格差別は買い手の購入量に応じて事実上異なる価格で販売することである。ある会の会員にならないと商品が購入できないようにし，購入量に関わらず入会金や会費を徴収した上でさらに購入量に応じた料金をとるようなシステムがこれに相当する。例を考えてみよう。逆需要関数が

$$p = 120 - x,\ p \text{ は価格},\ x \text{ は需要}$$

で一定の限界費用が 20 であるとき。

1. 通常の独占のモデルで利潤を最大化する価格を決めると $p = 70$，$x = 50$ で利潤は 2500。このとき消費者余剰は $\frac{1}{2}(120 - 70) \times 50 = 1250$ で総余剰（利潤と消費者余剰の和）は 3750。
2. 価格を 20 とすると需要は $x = 100$ になり，消費者余剰は $\frac{1}{2}(120 - 20) \times 100 = 5000$ であるから，企業はこの 5000 までの固定料金を課すことができる。固定料金があれば購入量が少ないほど単価は高い。固定料金に関わらず総余剰は 5000 で変わらないが，固定料金によって企業と消費者の負担が異なる。

このような料金体系は「二部料金制」と呼ばれる。通常の独占モデルよりも二部料金制の方が総余剰が大きい。電力，ガスなど固定費用が大きく，かつ独占的地位にある企業があまり販売を減らさずに固定費用を回収する料金体系として用いている。

3.15.3　第 3 種価格差別

需要関数が異なる消費者のグループが存在する場合にグループによって異なる価格で販売するのが第 3 種価格差別である。男性と女性，学生とそれ以外，ある年齢以上と以下に消費者をグループ分けして異なる価格をつけるようなことが考えられる。やはり独占で転売できない（またはできても面倒）ことが条件となる。2 つのグループを A，B としてそ

れぞれのグループに販売する価格を p_A，p_B，需要を x_A，x_B として次のような逆需要関数を仮定する。

$$p_A = 24 - x_A,\ p_B = 32 - 2x_B$$

コストを 0 とすると企業が各グループへの販売から得る利潤は

$$\pi_A = (24 - x_A)x_A,\ \pi_B = (32 - 2x_B)x_B$$

となり，それぞれ利潤を最大化するときの価格と供給量は

$$p_A = 12,\ p_B = 16,\ x_A = 12,\ x_B = 8$$

であり，合計の利潤は 272 である。

もし 2 つのグループの消費者に対して同じ価格で販売しなければいけないとすると，その価格を p としてぞれぞれのグループの需要は次のように表される。

$$x_A = 24 - p,\ x_B = \frac{32 - p}{2}$$

合計の需要を x とすると $x = 40 - \frac{3}{2}p$ より利潤は

$$\pi = (40 - \frac{3}{2}p)p$$

となり，利潤を最大化する価格は $p = \frac{40}{3}$，そのときの供給量は 20，利潤は $\frac{800}{3} < 272$ であるから異なる価格をつけた場合の方が利潤が大きい。

3.16　屈折需要曲線

■屈折需要曲線　寡占理論において価格の硬直性を説明する理論である。差別化された寡占を考える。各企業は，自分が現行価格から値上げをしても（あるいは産出量を減らした結果価格が上がっても）相手はそれに追随して価格を引き上げたり，産出量を減らしたりしないが，値下げをしたら（あるいは産出量を増やした結果価格が下がったら）それに対抗して相手も値下げをしたり，産出量を増やしてくるであろうと予測する。単純な寡占モデルではない。このとき現行価格を境に自分の財に対する需要関数（需要曲線）の形が異なる。2 企業 A と B を考えそれぞれの産出量を q_A，q_B，価格を p_A，p_B として現行価格以上（現行産出量以下）では次のような逆需要関数であるとする。

$$p_A = a - q_A - \frac{1}{2}q_B,\ p_B = a - q_B - \frac{1}{2}q_A$$

各企業の費用は $\frac{1}{2}c_A^2$，$\frac{1}{2}c_B^2$，したがって限界費用は c_A，c_B で，$c_A = c_B$ であるとする。各企業は相手の産出量を与えられたものとして自分の産出量を決める（自分の産出量を減ら

すと相手の価格も少し上がる)。このとき各企業の限界収入(これがポイント)は(A の場合は $p_A q_A$ を p_A で微分，B も同様)

$$MR_A = a - 2q_A - \frac{1}{2}q_B,\ MR_B = a - 2q_B - \frac{1}{2}q_A$$

となる。

　ここで現行の産出量を $\bar{q}_A$，$\bar{q}_B$ で表すことにする。現行価格以下(現行産出量以上)では企業 A は B の産出量が

$$q_B = \bar{q}_B + \frac{1}{2}(q_A - \bar{q}_A)$$

に基づいて決められると予想し，同様に企業 B は A の産出量が

$$q_A = \bar{q}_A + \frac{1}{2}(q_B - \bar{q}_B)$$

に基づいて決められると予想するものと仮定する。すなわち，自分が産出量を増やせば相手も増やしてくると予想する。そのとき逆需要関数は次のようになる。

$$p_A = a - q_A - \frac{1}{2}[\bar{q}_B + \frac{1}{2}(q_A - \bar{q}_A)] = a - \frac{5}{4}q_A - \frac{1}{2}\bar{q}_B + \frac{1}{4}\bar{q}_A$$

$q_A = \bar{q}_A$，$q_B = \bar{q}_B$ であれば両方の逆需要関数は同じになるので現行産出量において需要曲線はつながっている。しかし傾きが現行産出量以下では -1，現行産出量以上では $-\frac{5}{4}$ であるから，現行産出量の点で折れ曲がった(屈折した)形になる。企業 B の逆需要関数も同様に表せる。現行産出量以上での企業 A の限界収入は

$$MR'_A = a - \frac{5}{2}q_A - \frac{1}{2}\bar{q}_B + \frac{1}{4}\bar{q}_A$$

となり，$q_A = \bar{q}_A$ において $MR_A > MR'_A$ となるので限界収入曲線は現行産出量においてつながっておらず不連続になる。もし限界費用が現行産出量の所で MR_A と MR'_A の間の値をとれば($a - 2\bar{q}_A > c_A > a - \frac{5}{2}\bar{q}_A$)現行産出量が最適な(利潤を最大化する)産出量となるが，限界費用が変化してもその状況が変わらず最適な産出量が変化しない可能性がある。そのとき価格も変化しない。これが価格の硬直性である。通常の寡占モデルでは限界費用が変化すればそれに応じて産出量，価格も変化する。

　図 3.16 でどれが需要曲線でどれが限界収入曲線かはわかるであろう。C で需要曲線が屈折している。微妙だが。点 A と B の間を限界費用曲線(c_A)が通っている限り産出量，価格(C の水準)は変化しない。

　このように屈折需要曲線の理論は経済の状況が少々変わっても財の価格がすぐには変化しないという現象の説明に有用であるが，現行の価格や産出量がどのような根拠で決まっているのかという点は問題にしない。

　いささか古い理論だが最近でも公務員試験や経済学検定試験などでは出題されているようだ。

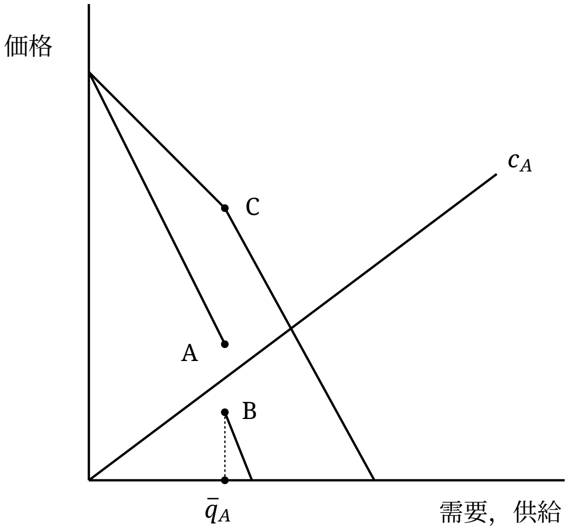


図 3.16　屈折需要曲線

■ラーナーの独占度　独占において $\frac{p-c'}{p}$ をラーナーの独占度（「マークアップアップ率」と呼んでいる本もある）と言う（c' は限界費用)。

$$p\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)=c'$$

より

$$\text{ラーナーの独占度}=\frac{1}{\varepsilon}$$

である（ε は需要の価格弾力性の逆数)。

3.17　外部性，外部経済・外部不経済

企業の利潤や消費者の効用が他の企業や消費者の活動によって影響を受ける場合外部性が存在すると言う。よく取り上げられる例として畑で花を栽培する業者とその近くで蜜蜂を飼う養蜂業者との関係がある。蜜蜂が花の蜜を吸ってくることによってより多くの蜂蜜が生産できるが，この花は養蜂業社が栽培しているのではないから費用はかからないので産出量が増えた分だけ利潤が増える。このように他の企業の活動がある企業の生産，利潤を増加させる場合外部経済が存在すると言う。逆の例としては水質汚染などの公害が上げられることが多い。ある川の下流から水を取ってジュースを作っている企業があり，その川の上流では化学肥料を生産する企業があって汚染した排水を川に流しているとする。下流のジュース会社では汚染した水を浄化しなければ商品になるジュースが作れず余計な費用がかかるが，本来これはジュース会社自身の責任ではない。このように他の企業の活動

がある企業の生産，利潤を減少させたり費用を増大させる場合，外部不経済が存在すると言う。簡単な数値例を考えてみよう。X 財を生産する競争的な企業 A があり財の価格は 100，費用関数は産出量を x として

$$c_A = x^2$$

で表される。一方 Y 財を生産する競争的な企業があって財の価格は 90，費用関数は産出量を y として

$$c_B = 2y^2 + xy$$

であるとする。すなわち企業 A の産出量が増えれば（Y 財の産出量を一定として）企業 B の費用が増えるような外部不経済が存在する。このとき企業 A の利潤は

$$\pi_A = 100x - x^2$$

となるから利潤を最大化する産出量は 50 である。それを前提にすると企業 B の利潤は

$$\pi_B = 90y - 2y^2 - 50y$$

となるので利潤を最大化する産出量は 10 である。しかし，社会全体にとって本来企業 A の生産に伴う費用は x^2 だけではなく xy も含まれるものと考えなければならない。企業 A，B を合わせた利潤は

$$\pi = 100x + 90y - x^2 - 2y^2 - xy$$

である。これが最大化されるように x，y を決めるとすると（ここは偏微分を使う）

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 100 - 2x - y = 0 \tag{3.20}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = 90 - 4y - x = 0 \tag{3.21}$$

という条件が得られる。(3.20) は y を一定としたときに利潤の合計を最大化する x の値と y の関係を示すものであり，(3.21) は x を一定としたときに利潤の合計を最大化する y の値と x の関係を示すものである。これらを連立させて解けば，$x = \frac{310}{7} \approx 44.3$，$y = \frac{80}{7} \approx 11.4$ となり，企業がそれぞれ選んだ産出量よりも X は少なく，Y は多い方が全体の利潤が大きくなることがわかる[*29]。ここで競争的な市場を仮定しているので財の価格が一定であれば消費者の消費量は変わらず（両企業の利潤の変化が消費に及ぼす効果は無視できる程度であるとする）企業の利潤が社会全体にとっての利益であると考えてよい。

　しかし，企業の判断に任せておいたのではこの状態は実現できない。そこで外部不経済を与える企業 A に課税することを考えよう（この企業に対する課税であり，X 財の生産全

[*29] (3.20) より $x = 50 - \frac{1}{2}y$ を求め，それを π に代入して y で最大化しても同じ結果が得られる。

体への課税ではない)。そのとき 1 単位当りいくらの税を課せばよいであろうか。企業 A の産出量が $\frac{310}{7}$ となるように税を課せばよいのでこの企業の利潤が

$$\pi_A = \frac{620}{7}x - x^2$$

となるようにすればよい。したがって 1 単位当り $100 - \frac{620}{7} = \frac{80}{7}$ の税を課すことになる。そのとき企業 B の利潤は

$$\pi_B = 90y - 2y^2 - \frac{310}{7}y$$

となるので，利潤を最大化する産出量は $\frac{80}{7}$ となり社会的に望ましい生産が行われる。このように外部不経済を発生させる企業に課税してその活動を抑制させるような税は（提唱者の名前をとって）ピグー税と呼ばれる。外部経済を発生させる企業に対しては逆に補助金を与えるべきである。

■外部性と減産補助金について　ある企業の生産に外部不経済がある場合にその企業に税を課すことによって望ましい産出量に減らすことができるが企業の負担は増える。そこで税を課すのではなく補助金を与えることを考える。企業 A，B の産出量を x，y としてそれぞれの利潤が次のように表されるとしよう（価格は一定であるとする)。

$$\pi_A = 80x - 2x^2$$

$$\pi_B = 80y - y^2 - xy$$

企業 A の利潤を最大化する産出量は 20 なので

$$\pi_B = 80y - y^2 - 20y$$

より企業 B の利潤を最大化する産出量は 30 である。一方両方の利潤の和は

$$\pi_A + \pi_B = 80x - 2x^2 + 80y - y^2 - xy$$

となるから x，y で微分して

$$80 - 4x - y = 0,\ 80 - 2y - x = 0$$

より，$x = \frac{80}{7} < 20,\ y = \frac{240}{7} > 30$ が求まる。これが社会的に最適な産出量である。この産出量を実現するためには企業 A の利潤が

$$\pi_A = \frac{320}{7}x - 2x^2 + 定数$$

となるようにすればよい。税を課すのなら産出量 1 単位当たり $80 - \frac{320}{7} = \frac{240}{7}$ の税を課すことになる。そのとき上の式の定数は 0 である。減産補助金を与える場合はある基準とな

る産出量 $\bar{x}$ から 1 単位生産を減らすごとに $\frac{240}{7}$ の補助金を与える。そうすると企業 A の利潤は

$$\pi_A = 80x - 2x^2 + \frac{240}{7}(\bar{x} - x) = \frac{320}{7}x - 2x^2 + \frac{240}{7}\bar{x}$$

となる。すなわち上の式の定数は $\frac{240}{7}\bar{x}$ である。このとき利潤を最大化する産出量が $\frac{80}{7}$ となることは明らかである。税を課したときの利潤が $\frac{12800}{49}$ で規制がないときの利潤が 800 であるから $\frac{240}{7}\bar{x}$ がそれらの差 $\frac{26400}{49}$ に等しくなるように，すなわち

$$\frac{240}{7}\bar{x} = \frac{26400}{49}$$

となるように決めると $\bar{x} = \frac{110}{7}$ となる。そのように決めると企業 A は減産補助金による規制がある場合にも規制がないときと同じ利潤を得ることができる。このとき補助金に必要な財源は $\frac{240}{7} \times \frac{30}{7} = \frac{7200}{49}$ である。税をかけたときの税収は $\frac{240}{7} \times \frac{80}{7} = \frac{19200}{49}$ であるが，これと補助金財源の和が $\frac{26400}{49}$ に等しい。なお企業 A が自発的に産出量を $\frac{80}{7}$ にしたときに得られる利潤は $\frac{32000}{49}$ であるが，税をかけたときの企業 A の利潤と税収の和，および減産補助金を与えたときの企業 A の利潤と補助金財源の差はともに $\frac{32000}{49}$ に等しい。したがって 3 つの状態の社会的な余剰は等しく分配が異なるだけである。

3.18　コースの定理

本文にある外部性の説明の内，減産補助金の説明の所で使った例をもう一度考えてみる。企業 A，B の産出量を x，y としてそれぞれの利潤が次のように表されると仮定した（価格は一定であるとする）。

$$\pi_A = 80x - 2x^2$$

$$\pi_B = 80y - y^2 - xy$$

企業 A の利潤を最大化する産出量は 20，それをもとにした企業 B の利潤を最大化する産出量は 30 である。また両方の利潤の和を最大化する産出量はそれぞれ $x = \frac{80}{7} < 20$，$y = \frac{240}{7} > 30$ であった（そのときの利潤は企業 A が $\frac{32000}{49} \approx 653$，企業 B が $\frac{57600}{49} \approx 1176$）。ここで政府が介入するのではなく両企業が交渉してそれぞれの産出量を決める問題を考えてみよう。2 つのケースに分ける。

1. 企業 B には企業 A が発生させる外部性を理由にその生産を差し止める権利があるものとする。それに対して企業 A の側が B にお金を払って生産させてもらうことを考える。まず A の産出量が 0 のとき B の利潤は

$$\pi_B = 80y - y^2$$

となり利潤を最大化する産出量は 40，そのときの利潤は 1600 である（企業 A の利潤は 0）。企業 A は B に対してこの利潤を保証しなければならない。すなわち企業

B の産出量が変わってもその利潤は 1600 でなければならない。そのとき企業 A の利潤は

$$\pi_A = 80x - 2x^2 - 1600 + 80y - y^2 - xy$$

と表せる。つまり企業 A は自分の利潤から B に $(1600 - 80y + y^2 + xy)$ のお金を支払わなければならないのである。この式は

$$\pi_A = 80x - 2x^2 + 80y - y^2 - xy - 1600$$

に等しい。つまりこのときの企業 A の利潤は両企業の利潤の合計から定数 1600 を引いたものである。したがってそれを最大化する各企業の産出量は利潤の合計を最大化するときの $x = \frac{80}{7}$, $y = \frac{240}{7}$ に等しい。このとき企業 B の利潤は 1600，企業 A の利潤は約 229 である。

2. 一方，企業 A が B の損失を気にせずに生産を行う権利を持っていて，B の側がお金を渡して A の生産を抑えてもらう場合を考えてみよう。何もしなければ $x = 20$, $y = 30$ で A の利潤は 800 である（B の利潤は 900）。企業 B は A のこの利潤 800 を保証しなければならない。そのとき B の利潤は次のように表される。

$$\pi_B = 80y - y^2 - xy - 800 + 80x - 2x^2$$

つまり企業 B は自分の利潤から A に $(800 - 80x + 2x^2)$ のお金を支払わなければならない。この式は

$$\pi_B = 80x - 2x^2 + 80y - y^2 - xy - 800$$

に等しい。つまりこのときの企業 B の利潤は両企業の利潤の合計から定数 800 を引いたものである。したがってそれを最大化する各企業の産出量もやはり利潤の合計を最大化するときの $x = \frac{80}{7}$, $y = \frac{240}{7}$ に等しい。このとき企業 A の利潤は約 1029，企業 B の利潤は 800 である。

以上のように企業 A，B どちらが権利を持っていても結果として同じように両方の企業の利潤を最大化する最適な状態が実現する。このことをコースの定理（Ronald Coase による）と言う。ただし 2 つのケースで利潤の分配は異なる。

3.19　プリンシパル-エージェント理論の簡単な例

企業と労働者の関係を考える**プリンシパルは雇う側，エージェントは雇われる側である。企業と労働者ではなく**。労働者が努力したとき 80% の確率でよい結果が得られるが 20% の確率で悪い結果になる。努力しなければよい結果は得られない。企業には労働者が努力したかどうかはわからず結果によって判断するしかない。

1. 企業が労働者に固定賃金 w を提示した場合の企業と労働者の利得は以下のようになる[*30]。
   (i) 労働者が求人に応じて努力し，よい結果が得られた場合の企業の利得は $5000 - w$，労働者の利得は $w - 200$（200 は努力のコスト）。
   (ii) 労働者が求人に応じて努力したが悪い結果になった場合の企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は $w - 200$。
   (iii) 労働者が努力しなかった場合，企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は w。
   (iv) 労働者が求人に応じなかったとき，企業の利得は 0，労働者の利得は 500（500 は外部の機会で得られる利得）。

   $w - 200 < w$ であるから固定賃金がいくらであれ努力しないのが労働者にとって最適である。その前提で労働者が求人に応じる条件は $w \geq 500$ である。したがって企業にとっては $w = 500$ を提示して $2000 - 500 = 1500$ の利得を得るのが最適である。

2. 企業が固定賃金 w に加えてよい結果が得られた場合にボーナス b を支払うインセンティブ契約を提示したとする。このときの経営者と労働者の利得は以下のようになる。
   (i) 労働者が求人に応じて努力し，よい結果が得られた場合の企業の利得は $5000 - w - b$，労働者の利得は $w + b - 200$（200 は努力のコスト）。
   (ii) 労働者が求人に応じて努力したが悪い結果になった場合の企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は $w - 200$。
   (iii) 労働者が努力しなかった場合，企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は w。
   (iv) 労働者が求人に応じなかったとき，企業の利得は 0，労働者の利得は 500（500 は外部の機会で得られる利得）。

   労働者が求人に応じて努力したときの労働者の期待利得 E_1 は

   $$E_1 = 0.8 \times (w + b - 200) + 0.2 \times (w - 200) = w + 0.8b - 200$$

   である。ただし，労働者に努力させるためにはこれが努力しなかったときの利得以上である必要がある（インセンティブ両立条件）。これは

   $$w + 0.8b - 200 \geq w$$

   より

   $$b \geq 250$$

   と表される。さらに努力することを前提とした場合，労働者が求人に応じるには上記の期待利得が外部の機会で得られる利得以上である必要がある（参加条件）。こ

[*30] 「利得 (payoff)」はゲーム理論の用語であるが，企業や労働者が得るものを意味する。企業の場合は利潤，労働者の場合は効用であるが，ここでは効用を貨幣で表現したものになっている。

れは

$$w + 0.8b - 200 \geq 500$$

より

$$b \geq -1.25w + 875$$

と表現される。企業の期待利得 E_2 は

$$E_2 = 0.8 \times (5000 - w - b) + 0.2 \times (2000 - w) = 4400 - w - 0.8b$$

である。$b = -1.25w + 875$ をこれに代入すると

$$E_2 = 3700$$

となるから，企業は $b = -1.25w + 875$ かつ $b \geq 250$ を満たすように w と b を決めれば期待利得 3700 を得ることができるのである。例えば $(w, b) = (0, 875)$ あるいは $(w, b) = (500, 250)$ と決めればよい。

どちらの契約でも労働者の利得は同じ（外部機会の利得に等しい）であるが企業の利得はインセンティブ契約の方が大きい。

以上の議論では企業も労働者も危険中立的であると仮定していた。企業の株主は様々な投資先を持つことによって危険（リスク）を分散させられるので危険中立的であるという仮定は非現実的ではないが，労働者は危険回避的であると考えるのが適当かもしれない。そうすると $b = -1.25w + 875$ を満たす報酬では満足しない。その場合は少し余分に賃金またはボーナスを支払う必要があり，企業は 3700 の利得を得ることはできない。

もし企業が労働者の努力を観察できるとすると結果ではなく努力したかどうかで報酬を決めることができる。そのときインセンティブ両立条件と参加条件はそれぞれ $b \geq 200$, $b \geq -w + 700$ となるから $(w, b) = (500, 200)$ や $(w, b) = (0, 700)$ などが企業の利得を最大にする賃金とボーナス（努力に対するボーナスなので労働者にとってリスクはない）であり，そのとき企業は 3700 の利得を得る。労働者の努力についての情報を企業が持っていればこの状態を実現できるが，努力したかどうかが直接には観察できず，不確実な結果で判断するしかないという情報の不完備性（非対称性）によって，労働者が危険回避的な場合には最適な状態が実現できなくなるのである。

3.20　費用最小化と利潤最大化の数学的分析

3.20.1　費用最小化：シェパードの補題

費用最小化問題とは，企業が『ある一定の産出量を生産するという条件のもとで』生産にかかる費用が最も小さくなるような資本と労働の使用量を求める問題であるから，消費者の効用最大化問題と同様にラグランジュ乗数法を用いて分析することができる。

ある財の生産関数を次のように表す。

$$x = f(L, K) \tag{3.22}$$

x は財の産出量，L，K はそれぞれ生産要素である労働と資本の使用量あるいは雇用量を表す。一方費用は

$$c = wL + rK \tag{3.23}$$

と表される。w は労働の価格である賃金率，r は資本の価格である資本レンタルである。x を定められた産出量とすると，企業は (3.22) の制約のもとで (3.23) が最小になるように L と K を決める。この問題のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda[(f(L, K) - x] \tag{3.24}$$

である。(3.24) を L，K で微分すると，

$$w + \lambda f_L = 0 \tag{3.25}$$
$$r + \lambda f_K = 0 \tag{3.26}$$

が得られる。f_L，f_K は生産関数 f の L，K についての微分で，それぞれ労働および資本の限界生産力を表す[*31]。(3.25)，(3.26) より

$$\frac{w}{f_L} = \frac{r}{f_K} = -\lambda \tag{3.27}$$

および

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{w}{r} \tag{3.28}$$

を得る。(3.28) は費用が最小となっている状態では，**労働と資本の限界生産力の比が賃金と資本レンタルの比に等しくなっている**，ということを意味するが，これは等産出量曲線と等費用線が接するという関係が成り立っていることを意味するものである。この条件と産出量が x に等しいという条件を満たすように資本，労働投入量が決まり，それによって最小の費用が求められる。それは与えられた生産関数のもとで r，w および産出量 x の関数となる。この関数を費用関数と呼び

$$c(r, w, x) = rK(r, w, x) + wL(r, w, x)$$

と表す。$K(r, w, x)$，$L(r, w, x)$ は資本，労働投入量が r，w，x によって決まるということを意味する。これを x 一定のもとで r で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K + r\frac{\partial K}{\partial r} + w\frac{\partial L}{\partial r}$$

---

*31

$$f_L = \frac{\partial f}{\partial L},\ f_K = \frac{\partial f}{\partial K}$$

である。

が得られる。一方 $f(L,K)=x$ という式を x 一定のもとで r で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

を得る。(3.28) より

$$r\frac{\partial K}{\partial r}+w\frac{\partial L}{\partial r}=0 \tag{3.29}$$

となるので

$$\frac{\partial c}{\partial r}=K$$

が導かれる。同様にして

$$\frac{\partial c}{\partial w}=L$$

が得られる。これらは産出量一定のもとで生産要素に対する需要が費用関数をその生産要素の価格で微分したものに等しいことを示しており，**シェパードの補題**と呼ばれている。消費者行動の分析におけるマッケンジーの補題に対応するものである。

(3.27) の意味を考えてみよう。この式の $\frac{f_L}{w}$ は賃金 1 円当たりの労働の限界生産力であり，同様に $\frac{f_K}{r}$ は 1 円当たりの資本の限界生産力である。したがって企業の費用最小化問題におけるラグランジュ乗数（の符号を変えたもの）は各生産要素 1 円当たりの限界生産力，すなわち 1 円の費用の増加による産出量の増加を表していると見ることができる。序数的な効用関数が用いられている消費者の効用最大化問題と違ってこの場合のラグランジュ乗数の値には実質的な意味がある。

費用が

$$c=rK+wL$$

と表されるので L，K を一定とすると $\frac{\partial c}{\partial r}=K$ となるのはあたりまえのように思われるがそうではない。r が変化すれば L も K も変わるが，費用最小化の条件によって打ち消し合っているのである。(3.29) がそれを表している。

■例 1　具体的に次の生産関数のもとで (3.23) の費用を最小化する問題を考えよう。

$$x=L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} \tag{3.30}$$

この形の生産関数はコブ・ダグラス型の生産関数と呼ばれる。ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}=wL+rK+\lambda(L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}-x)$$

である。これを L，K で微分すると

$$w+\frac{1}{3}L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{2}{3}}\lambda=0 \tag{3.31}$$

$$r+\frac{2}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{3}}\lambda=0 \tag{3.32}$$

が得られる。(3.31)，(3.32) より λ を消去すると，

$$K = \frac{2w}{r}L \tag{3.33}$$

あるいは

$$rK = 2wL \tag{3.34}$$

を得る。(3.33)，(3.34) は (3.30) の生産関数のもとにおいては，企業の資本への支出が労働への支出の 2 倍になることを意味する。(3.33)，(3.34) を (3.30) へ代入して

$$L = \left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} x \tag{3.35}$$

および

$$K = \left(\frac{2w}{r}\right)^{\frac{1}{3}} x \tag{3.36}$$

が導かれる。これらは企業の労働および資本に対する需要を表すものである。(3.35) より，w が上昇すると労働の需要が減少し r が上昇すると増加することがわかる。同様に (3.36) より，r が上昇すると資本の需要が減少し w が上昇すると増加する。

ここで $L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} = x$ を満たすわずかな L と K の変化をそれぞれ ΔL，ΔK とすると

$$\frac{\partial x}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial x}{\partial L}\Delta L = 0$$

より

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right) \Big/ \left(\frac{\partial x}{\partial K}\right) = -\frac{1}{2}\frac{L^{-\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{1}{3}} \cdot K^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}\frac{K}{L}$$

が得られる。その変化に対する c の変化は

$$\Delta c = r\Delta K + w\Delta L = \left(-\frac{1}{2}\frac{K}{L}r + w\right)\Delta L$$

と表される。等産出量曲線上で $L < (>) \left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} x$ のとき $K > (<) \left(\frac{2w}{r}\right)^{\frac{1}{3}} x$ であり，したがって $\frac{K}{L} > (<) \frac{2w}{r}$ であるから，$L < (>) \left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} x$ のとき $\frac{\Delta c}{\Delta L} < (>) 0$ である。これは L が小さいときはその増加に伴って c が減少し，大きいときは L の増加によって c が増加することを意味するから，$L = \left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} x$ のとき c は最小値（正しくは極小値）をとる。

3.20.2 土地を含むシェパードの補題

労働，資本，土地の 3 つの生産要素によってある財を生産する場合を考えてみよう。土地（サービス）の投入量（一定の期間使用できる土地の面積で測る）を T，地代を t で表す[*32]。財の生産関数は $x = f(L, K, T)$ と表され，費用は

$$c = wL + rK + tT$$

[*32] 英語では土地は Land であるから L で，地代は rent なので r で表すべきかもしれないが労働や資本レンタルと区別できなくなるので T と t を使う。

と，産出量 x が一定であるときの費用最小化問題のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = wL + rK + tT + \lambda(x - f(L, K, T))$$

と書ける。これを L，K，T で微分してゼロとおくと

$$w + \lambda f_L = 0,\ r + \lambda f_K = 0,\ t + \lambda f_T = 0$$

が得られる。f_T は土地の限界生産力（労働，資本投入量を一定として土地を少し広げたときの生産の増加）である。これらの式から

$$\frac{f_L}{w} = \frac{f_K}{r} = \frac{f_T}{t} \tag{3.37}$$

が導かれる。この式は各生産要素の価格（賃金率，資本レンタル，地代）とその限界生産力の比がすべて等しいことが費用最小化の条件であることを意味する。これらの条件と生産関数から，与えられた w，r，t のもとで各生産要素の投入量

$$L(w, r, t),\ K(w, r, t),\ T(w, r, t)$$

が求まる。これを費用の式に代入すると費用関数が次のように表される。

$$c(w, r, t) = wL(w, r, t) + rK(w, r, t) + tT(w, r, t)$$

これを w で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial w} = L + w\frac{\partial L}{\partial w} + r\frac{\partial K}{\partial w} + t\frac{\partial T}{\partial w} \tag{3.38}$$

を得る。一方 $x = f(L, K, T)$ を x 一定のもとで w で微分すると

$$f_L\frac{\partial L}{\partial w} + f_K\frac{\partial K}{\partial w} + f_T\frac{\partial T}{\partial w} = 0$$

が得られる。(3.37) よりこの式は

$$w\frac{\partial L}{\partial w} + r\frac{\partial K}{\partial w} + t\frac{\partial T}{\partial w} = 0$$

と書き直される。したがって (3.38) から

$$\frac{\partial c}{\partial w} = L$$

を得る。同様の計算で

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = T$$

が導かれる。これらの式が生産要素として土地を含む場合のシェパードの補題であり，費用関数を各生産要素の価格で微分して得られる値がその生産要素の投入量（企業の需要）に等しいことを意味している。生産要素がいくつあっても同じように議論できるが，企業の生産活動においては労働，資本，土地の 3 つが根源的な生産要素である。

3.20.3　完全競争企業の利潤最大化

　次に完全競争企業の利潤最大化問題を考える。上で見た費用最小化行動によって企業の（総）費用関数が確定する。それを $C(x)$ で表す。財の産出量 x はあらゆる実数値をとりうるものとする。企業の利潤は次のように表される。

$$\pi = px - C(x) \tag{3.39}$$

p は財の価格である。完全競争のもとにおいて企業は自らが生産する財の価格は与えられたもの，すなわち定数と見なして産出量を決める。企業はこの利潤を最大化すべく産出量 x を決めるわけだが，利潤最大化問題には制約条件はなく変数も x 一つだけなので，通常の微分による最大値問題の解法を適用できる。(3.39) を x で微分しそれをゼロとおくと，

$$p - C'(x) = 0$$

が得られる。$C'(x)$ は $C(x)$ の微分であり限界費用を表しているから, 利潤最大化の条件は**価格と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶ**ことであるという上で述べた結論が得られる。

■例 2　具体的に次のような利潤最大化問題を考えてみよう。

$$\pi = px - (x^2 + 10) \tag{3.40}$$

x^2 が可変費用であり，10 が固定費用である。(3.40) を x で微分しそれをゼロとおくと，

$$p - 2x = 0$$

を得る。したがってこの企業の供給曲線を表す方程式は

$$x = \frac{1}{2}p$$

となる。

　価格と限界費用の差 $p - C'(x)$ は，わずかに産出量を増やしたときの利潤の変化を表しており，その値を $x = 0$ から企業が選ぶ産出量（x^* で表す）まで加えたものが企業の利潤（正確には利潤に固定費用を加えたもの，限界費用には固定費用は含まれていない）になる。すなわち，利潤を $\pi(x^*)$ とすると

$$\pi(x^*) = \int_0^{x^*} (p - C'(x))dx$$

である。これは価格を表す水平線と限界費用曲線の間の部分の面積に等しい（図 3.9 参照)。

3.20.4　独占企業の利潤最大化

独占企業の産出量を X，費用関数を $C(X)$，需要関数を $p = p(X)$ とすると，利潤は

$$\pi = p(X)X - C(X)$$

と表される。これを X で微分しそれをゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dX} = p + p'(X)X - C'(X) = 0 \tag{3.41}$$

が得られる。$p'(X)$ は需要曲線の傾きを表す。限界収入 MR は

$$MR = p + p'(X)X \tag{3.42}$$

と定義される。第 1 項 p は産出量の増加による収入の増加，第 2 項の $p'(X)X$ は産出量の増加に伴う価格の低下による収入の減少を表している。(3.41)，(3.42) より独占企業の利潤最大化の条件は**限界収入と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶ**ことであるという先に述べた結論が得られる。

(3.42) を変形すると

$$MR = p\left(1 + \frac{p'(X)X}{p}\right) = p\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{3.43}$$

となる。ここで ε は需要の価格弾力性であり，次のように定義される。

$$\varepsilon = -\frac{p}{p'(X)X} = -\left(\frac{dX}{X}\right)\Big/\left(\frac{dp}{p}\right)$$

dp，dX は価格と需要の微小な変化を表す。したがって独占企業の利潤最大化条件 (3.41) は ε を用いて

$$p\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = C'(X) \tag{3.44}$$

と書き表すことができる。p は X の関数なのでこの式から X およびそれに対応して p の値が求まる。後者を p_m と表すと独占企業の利潤（に固定費用を加えたもの）は

$$\pi(x^*) = \int_0^{x^*} (p_m - C'(X))dX$$

と書ける（図 3.13 参照)，これは p_m を表す水平線と限界費用曲線の間の部分の面積に等しい)。

3.20.5　利潤最大化の一般的記述：ホテリングの補題

完全競争企業の利潤を

$$\pi = pf(L, K) - wL - rK$$

と表し（価格 p は定数），企業はその利潤が最大となるよう L と K を決めるものとする。π を L，K で微分すると

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = pf_L - w = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = pf_K - r = 0$$

が得られ, その解として $L(p,w,r)$, $K(p,w,r)$, さらに生産関数によって産出量 $x(p,w.r) = f(L(p,w,r),K(p,w,r))$ が決まる。この両式より $pf_L = w$，$pf_K = r$ を得る。これらは『労働の限界生産力と財の価格の積（「労働の限界生産力の価値」と呼ぶ）が賃金率に等しく，資本の限界生産力と財の価格の積（「資本の限界生産力の価値」）が資本レンタルに等しくなるように労働，資本投入量を決めることが利潤最大化の条件である』ことを示している。

$L(p,w,r)$，$K(p,w,r)$ を π へ代入すると

$$\pi(p,w,r) = pf(L(p,w,r),K(p,w,r)) - wL(p,w,r) - rK(p,w,r)$$

となる。この $\pi(p,w,r)$ を利潤関数と呼ぶ。これを p，w，r で微分すると

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = f(L,K) + pf_L L_p + pf_K K_p - wL_p - rK_p$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = pf_L L_w + pf_K K_w - wL_w - L - rK_w$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial r} = pf_L L_r + pf_K K_r - wL_r - rK_r - K$$

が得られる。ここで L_p，K_p，L_w，K_w，L_r，K_r は価格，賃金率，資本レンタルの変化による労働，資本投入量の変化を表す。この 3 つの式に $pf_L = w$，$pf_K = r$ を代入すると

$$\frac{\partial \pi}{\partial p} = f(L,K) = x$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial w} = -L,\quad \frac{\partial \pi}{\partial r} = -K$$

が導かれる。これらの関係は**ホテリングの補題**と呼ばれる。

企業の利潤が

$$\pi = px - wL - rK$$

と表されるから，x，L，K を一定とすれば $\frac{\partial \pi}{\partial p} = x$ となるのはあたりまえのように思われるがそういう意味ではない。p が変われば x，L，K は変化するが，それらの変化が，利潤最大化条件から得られる $pf_L = w$，$pf_K = r$ によって打ち消し合うのである。

■企業の利潤最大化の例　x を産出量，p を財の価格として生産関数が $x=L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}}$ であるとすると利潤は

$$\pi = pL^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}} - wL - rK$$

である。これを L，K で微分して 0 とおくと

$$\frac{1}{2}pL^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}} = w,\ \frac{2}{5}pL^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{5}} = r$$

が得られる。左の式から $L^{-\frac{1}{2}} = \frac{2w}{p}K^{-\frac{2}{5}}$ より

$$L^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{2w}K^{\frac{2}{5}}$$

となる。これを右の式に入れると

$$\frac{p^2}{5w}K^{-\frac{1}{5}} = r$$

となり $K^{\frac{1}{5}} = \frac{p^2}{5rw}$ より

$$K = \frac{p^{10}}{5^5r^5w^5}（資本の需要関数）$$

が求まる。そうすると $L^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{2w}\frac{p^4}{5^2r^2w^2}$ より

$$L = \frac{p^{10}}{2^25^4r^4w^6}（労働の需要関数）$$

が得られる。産出量は

$$x = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}} = \frac{p^9}{2\cdot 5^4r^4w^5}$$

である。また，このとき $wL = \frac{p^{10}}{2^25^4r^4w^5}$，$rK = \frac{p^{10}}{5^5r^4w^5}$ より

$$wL = \frac{5}{4}rK = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}}rK$$

が成り立つ。これはコブ・ダグラス生産関数の特徴である。

利潤関数は $\pi = px - wL - rK$ より

$$\pi = \frac{p^{10}}{2\cdot 5^4r^4w^5} - \frac{p^{10}}{2^25^4r^4w^5} - \frac{p^{10}}{5^5r^4w^5} = \frac{p^{10}}{20\cdot 5^4r^4w^5}$$

となる。これを w，r で微分すると

$$\frac{\partial\pi}{\partial p} = \frac{p^9}{2\cdot 5^4r^4w^5} = x$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial w} = -\frac{p^{10}}{4\cdot 5^4r^4w^6} = -L$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial r}=-\frac{p^{10}}{5^5r^5w^5}=-K$$

が得られ，ホテリングの補題が成り立つ。

r が上昇しても w が上昇しても資本，労働の需要は減少するが，これは生産が減少することによる。産出量を一定とすればそうはならない。

■産出量が一定のときの企業の利潤最大化（費用最小化）の例　ラグランジュ関数は

$$px-wL-rK+\lambda(L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}}-x)$$

となる。これを L，K で微分して 0 とおくと

$$-w+\frac{1}{2}\lambda L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}}=0,\ -r+\frac{2}{5}\lambda L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{5}}=0$$

を得る。x は一定なので x では微分しない。px は一定なので，この形の利潤最大化は，一定の産出量のもとで $wL+rK$ で表される費用を最小化するのと同じことである。両式から $wL=\frac{5}{4}rK$ が得られる。これから $L=\frac{5r}{4w}K$ となり，$L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}}=x$（$x$ は一定）に代入すると $\left(\frac{5r}{4w}\right)^{\frac{1}{2}}K^{\frac{9}{10}}=x$ より

$$K=\left(\frac{4w}{5r}\right)^{\frac{5}{9}}x^{\frac{10}{9}}\text{（産出量一定のもとでの資本の需要関数）}$$

を得る。r が上昇すると資本の需要は減り，w が上昇すると増える。労働については

$$L=\left(\frac{5r}{4w}\right)^{\frac{4}{9}}x^{\frac{10}{9}}\text{（産出量一定のもとでの労働の需要関数）}$$

となり，r が上昇すると労働の需要は増え，w が上昇すると減る。費用関数は

$$\begin{aligned}c=wL+rK&=\left(\frac{5^4r^4w^5}{2^8}\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}+\left(\frac{2^{10}r^4w^5}{5^5}\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}\\&=\frac{1}{2}\left(2\cdot5^4r^4w^5\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}+\frac{2}{5}\left(2\cdot5^4r^4w^5\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}=\frac{9}{10}\left(2\cdot5^4r^4w^5\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}\end{aligned}$$

これを w，r で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial w}=\left(\frac{5r}{4w}\right)^{\frac{4}{9}}x^{\frac{10}{9}}=L$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}=\left(\frac{4w}{5r}\right)^{\frac{5}{9}}x^{\frac{10}{9}}=K$$

となりシェパードの補題が得られる。費用関数 c を x で微分すると限界費用

$$\frac{dc}{dx}=\left(2\cdot5^4r^4w^5\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{9}}$$

を得る。この限界費用が価格に等しいという利潤最大化条件を考えると，産出量が

$$x = \frac{p^9}{2 \cdot 5^4 r^4 w^5}$$

となり，上の利潤最大化で求めた産出量と等しいことがわかる。

この費用関数は逓増的な限界費用を持つ。これは生産関数の指数の和 $(\frac{1}{2}+\frac{2}{5})$ が 1 より小さくなっており，規模に関して収穫逓減になっているからである。一方指数の和が 1 に等しい規模に関して収穫一定の場合には限界費用は一定になり，価格と限界費用の一致による企業の産出量は決まらなくなる。

3.20.6　規模に関して収穫一定の生産関数

x を財の産出量，L，K を労働，資本の投入量として規模に関する収穫一定の生産関数が次のように表されるものとする。

$$x = f(L, K)$$

a をある実数として $f(aL, aK)$ を考えると規模に関する収穫が一定であることより

$$f(aL, aK) = af(L, K) = ax$$

が得られる。このような関数の性質は「一次同次」と呼ばれる[*33]。この式を a で微分すると

$$f_L L + f_K K = x$$

となり，利潤最大化条件 $pf_L = w$，$pf_K = r$ より

$$wL + rK = px$$

が導かれる。この式は労働と資本に対する報酬の合計が企業の収入に等しくなることを意味しており，「オイラーの定理」の名で知られている事実を示している。

生産関数が

$$x = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

として利潤最大化を考える。A は正の定数，$0 < \alpha < 1$ である。財の価格を p とすると利潤は

$$\pi = pAL^{\alpha}K^{1-\alpha} - wL - rK$$

である。これを L，K で微分してゼロとおくと

$$\alpha pAL^{\alpha-1}K^{1-\alpha} - w = 0$$

[*33] 「一次同次」とは関数に含まれる変数をすべて a 倍すると関数の値も a 倍になることを意味する。変数を a 倍しても関数の値が変わらないという性質は「0 次同次」と言われる。

$$(1-\alpha)pAL^{\alpha}K^{-\alpha}-r=0$$

となる。上の式に L を，下に式に K をかけると

$$wL=\alpha pAL^{\alpha}K^{1-\alpha}=\alpha px$$

$$rK=(1-\alpha)pAL^{\alpha}K^{1-\alpha}=(1-\alpha)px$$

となり，これらを加えると

$$wL+rK=px$$

となる。したがって利潤（超過利潤）はゼロであり，労働分配率 $(\frac{wL}{px})$ は α，資本分配率 $(\frac{rK}{px})$ は $1-\alpha$ である。

3.20.7　技術的限界代替率

産出量を一定にした状態で労働を増やして資本を減らしたとき（あるいはその逆）の労働と資本の変化の比を技術的限界代替率と呼ぶ．消費者の限界代替率と同様のものである．（労働を横軸，資本を縦軸にとった）等産出量曲線が凸ならば（「－資本の変化／労働の変化」で定義される）技術的限界代替率は労働の増加に伴って小さくなる．これを技術的限界代替率逓減の法則と呼ぶ．収穫逓減の法則（限界生産力逓減の法則）から導かれる．$x=f(L,K)$ を用いると（x を一定として微分する）

$$\text{技術的限界代替率}=-\frac{dK}{dL}=\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}$$

となる．例としていわゆるコブ・ダグラス型生産関数 $x=L^{\alpha}K^{\beta}$ を考えると．

$$-\frac{dK}{dL}=\frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}}=\frac{\alpha K}{\beta L}$$

となり，L が大きくなれば技術的限界代替率が小さくなる．なお，$\alpha+\beta$ が 1 より大きければ規模に関して収穫逓増，小さければ逓減，1 に等しければ一定である．L，K をともに 2 倍にしたときに x が 2 倍以上になるか，以下か，ちょうど 2 倍になるかを確認すればよい．

3.20.8　CES 生産関数

規模に関する収穫一定の生産関数の代表的なものとして CES 生産関数があり実証分析でよく用いられている。資本，労働の 2 つの生産要素を用いてある財を生産する場合の CES 生産関数は次のように表される。

$$x=f(L,K)=(\alpha L^{\sigma}+\beta K^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}},\ \alpha+\beta=1,\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$$

x は産出量，L，K は労働，資本の投入量であり α，β，σ は実数である（$\sigma < 1$）。L，K をそれぞれ定数倍，たとえば 2 倍したときの産出量を x' とすると

$$\begin{aligned} x' &= (\alpha(2L)^{\sigma} + \beta(2K)^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}} \\ &= [2^{\sigma}]^{\frac{1}{\sigma}}(\alpha L^{\sigma} + \beta K^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}} = 2x \end{aligned}$$

となるからこの生産関数は規模に関して収穫一定であることがわかる。労働と資本の限界生産力 f_L，f_K はそれぞれ

$$f_L = \alpha(\alpha L^{\sigma} + \beta K^{\sigma})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} L^{\sigma-1} = \alpha x^{1-\sigma} L^{\sigma-1}$$

$$f_K = \beta(\alpha L^{\sigma} + \beta K^{\sigma})^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} K^{\sigma-1} = \beta x^{1-\sigma} K^{\sigma-1}$$

となり，それらの比をとると

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{L}{K}\right)^{\sigma-1}$$

が得られる。企業が利潤最大化しているときにはこれは賃金率と資本レンタルの比 $(\frac{w}{r})$ に等しい。この式を変形すると

$$\frac{L}{K} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{f_L}{f_K}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

となる。$\frac{L}{K}$ は企業が投入する労働と資本の比である。$\frac{f_L}{f_K} = \tau$ としてこの式を τ で微分すると，

$$\frac{d\frac{L}{K}}{d\tau} = \frac{1}{\sigma-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}\tau^{\left(\frac{1}{\sigma-1}-1\right)} = \frac{1}{\sigma-1}\frac{\frac{L}{K}}{\tau}$$

を得る。したがって

$$\eta = -\frac{d\frac{L}{K}}{d\tau}\frac{\tau}{\frac{L}{K}} = -\left(\frac{d\frac{L}{K}}{\frac{L}{K}}\right)\Big/\left(\frac{d\tau}{\tau}\right) = \frac{1}{1-\sigma}$$

が導かれる。この η を**代替の弾力性** (elasticity of substitution) と呼ぶ。これは「労働・資本投入量の比の変化率」と「限界生産力の比，したがって（利潤最大化の状態では）生産要素の相対価格 $(\frac{w}{r})$ の変化率」の比（の絶対値）を表している。ある生産要素の価格が上昇するとその生産要素の投入量は減少するので上記の比の値が負であるから弾力性が正となるように先頭にマイナスをつけてある。σ が一定であるから η の値も一定である，CES とは「一定の代替の弾力性 (constant elasticity of substitution)」を意味する。

　ここで σ の値を 0 に近づけたときの労働・資本の限界生産力を考えてみると

$$f_L = \alpha\frac{x}{L}$$

$$f_K = \beta\frac{x}{K}$$

となる。これらはコブ・ダグラス型生産関数

$$x = f(L, K) = L^{\alpha}K^{\beta},\ \alpha + \beta = 1$$

から得られるものと同一である。したがってコブ・ダグラス型生産関数は CES 生産関数において $\sigma \to 0$, したがって $\eta \to 1$ としたときの極限であると考えることができる。

第 4 章

ゲーム理論入門

■この章のキーワード　戦略，静学的なゲーム，標準型ゲーム，最適反応，ナッシュ均衡，混合戦略，純粋戦略，動学的なゲーム，ゲームの樹，展開型ゲーム，部分ゲーム，部分ゲーム完全均衡，繰り返しゲーム，不完備情報ゲーム，完全ベイジアン均衡，シグナル，Separating 均衡，Pooling 均衡，オークションの理論，ベイジアン・ナッシュ均衡，シグナリングゲーム，合理的な均衡，コア，仁，シャープレイ値，企業立地の問題

4.1　ゲームおよびゲーム理論

1994 度のノーベル経済学賞をジョン・ナッシュ，ラインハート・ゼルテン，ジョン・ハルサーニの 3 人のゲーム理論家が受賞した（その後もオーマン，シェリングが受賞している)。ゲーム理論は経済学の一分野として，また各分野における経済学研究の重要な分析手法としてその地位を確立したように思われる。

ゲーム理論でいうゲームとは，トランプ・将棋・麻雀などの遊び（仕事でしている人達もいるが）のゲーム，あるいは野球・サッカーなどスポーツのゲームばかりではなく，それらも含めて複数の個人あるいは組織が自分の行動だけでなく相手の行動が自分の利益に（プラスまたはマイナスに）影響する状況において，それぞれが自分の利益をなるべく大きくしようとして行動を選択するというように設定された枠組みを意味する。ゲームに登場する個人または組織を**プレイヤー** (player) と呼ぶ。

政治や経済にはゲームに当てはまる状況が多い。経済に例をとって一つのゲームを考えてみよう。

ゲーム 1　ある産業に属する 2 つの企業（それらを企業 A，B とする）が生産・販売する財の価格を決める問題を考えてみよう。両方の企業が価格を低くすると販売量は増えるが利潤は小さくなり，両企業が価格を高くすると販売量は減るが互いの利潤は低い価格のときよりも大きくなる。しかし企業 A（あるいは B）が高い価格をつけているときに企業 B（あるいは A）が価格を下げると，相手の顧客を奪って一層大

企業Ｂの戦略

企業Ａの戦略		高価格	低価格
	高価格	5, 5	1, 7
	低価格	7, 1	2, 2

表 4.1　ゲーム 1–寡占のゲーム

きな利潤を稼ぐことができると仮定する。

これは寡占（の中でも企業数が 2 つの最も簡単な複占のケース）の一例であるが，一方の企業が選ぶ行動が他方の企業の利潤にも影響を与えるゲームになっている。このとき各企業は実際にどのような行動を選択するか，すなわち価格を選ぶであろうか。ゲーム理論では，それぞれの状況において選ばれる行動を**戦略** (strategy) と呼ぶ[*1]。また各企業がそれぞれ自分の利潤の最大化を図って実際に選ぶであろう戦略の組合せを**均衡** (equilibrium) と呼ぶ。どのようなゲームでどのような均衡が実現すると考えられるか。それを分析するのがゲーム理論である。以下主にプレイヤーが 2 人（企業ならば 2 社）の場合を中心に解説して行くが，一般的には 3 人以上のプレイヤーの存在も考える。

4.2　静学的なゲームとナッシュ均衡

4.2.1　静学的なゲーム・標準型ゲームと最適反応

上で見た寡占ゲームの例（ゲーム 1）をもう少し詳しく考えてみよう。企業 A，B が生産する財は同種の財ではあるが差別化されたものであるとする。両企業が作る財が完全に同じ財（同質財，消費者から見て区別できないもの）の場合には，一方が他方より少しでも安い価格をつければ（情報を入手するのが簡単で，買い物に行くための費用などもかからないとすると）すべての消費者は価格が安い方の財を買い，高い価格をつけている企業の財はまったく売れなくなる。しかし差別化された財の場合は消費者によって好みの違いがあるため価格に差があってもすべての消費者が一方の財に集中してしまうことはなく，価格の変化に伴って需要は徐々に変化するであろう。企業 A の財の価格が上がると，その財に対する好みがあまり強くない消費者は企業 B の財に移っていくかもしれないが，好みの強い消費者は企業 A の財を買い続けるであろうから，企業 A はすべての需要を失うわけではない。このような製品差別化された寡占ゲームの例を表 4.1 に示した。表の各桝目の数字は，左側が企業 A の利潤を右側が企業 B の利潤を表している。各プレイヤーがそれぞれ選択した戦略を実行した結果として得るものをゲーム理論では**利得** (payoff) と呼

[*1] 次節で取り扱う静学的なゲームでは，純粋戦略を考えている限り行動と戦略は同じものであるが，後の節で考える動学的なゲームでは行動と戦略の意味は異なる。

ぶ[*2]。企業間のゲームでは利潤が利得になっているが，何が利得であるかはそのゲームによって異なる[*3]。各企業はこのゲームの構造を知っていて，自分の利潤が最大となるように行動するが，相手と協力すべく相談したりはできないものと仮定する。したがって**相手の行動は与えられたものと考えて**自らの行動を選択しなければならない。このようにゲームのプレイヤーが互いに協力できない状況でそれぞれの戦略を選択するようなゲームを**非協力ゲーム** (non-cooperative game) と呼ぶ。またこのゲームでは 2 つの企業が同時に戦略を選択するゲームになっているので同時決定ゲームと呼ぶことができるが，時間的に同時であるがどうかが問題ではなく，各企業は相手がどの戦略を選んだかを知ることができない状況で自分の戦略を選ばなければならないということを意味する。このようなゲームにおいては，ゲームの中で時間の流れを考えていないので**静学的なゲーム** (static game) と呼ばれる。また表 4.1 のようにゲームの構造を行列で表すような表し方を**標準型ゲーム** (normal form game) と言う[*4]。

各プレイヤーは相手が選ぶ戦略に対応して自分にとって最適な，すなわち自分の利得が最も大きくなる戦略を選ぼうとする。あるプレイヤーにとって，**相手のプレイヤーが選ぶ戦略を与えられたものとして**自分にとって最適な戦略を**最適反応** (best response) と呼ぶ。表 4.1 のゲームでは最適反応は具体的に次のようになる。

(1). 企業 A の最適反応
  (i) 企業 B が高価格を選んだ場合 → 低価格を選ぶのが最適
    高価格を選ぶと利潤は 5，低価格を選ぶと利潤は 7。
  (ii) 企業 B が低価格を選んだ場合 → 低価格を選ぶのが最適
    高価格を選ぶと利潤は 1，低価格を選ぶと利潤は 2。
(2). 企業 B の最適反応
  (i) 企業 A が高価格を選んだ場合 → 低価格を選ぶのが最適
    高価格を選ぶと利潤は 5，低価格を選ぶと利潤は 7。
  (ii) 企業 A が低価格を選んだ場合 → 低価格を選ぶのが最適
    高価格を選ぶと利潤は 1，低価格を選ぶと利潤は 2。

相手のある戦略に対して，自分がある戦略を選んでも別の戦略を選んでも利得が等しいということもありうる。その場合は両方とも最適反応になるので一般に最適反応は一つとは限らない。

[*2] 通常ゲーム理論では利得は「期待効用定理」の条件を満たすフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数で表されるものと仮定する。

[*3] 選挙での勝利をめざす 2 つの政党間の，有権者に示す政策提案を戦略とするゲームを考えれば，選挙で獲得する得票数ないしは議席数が利得になる。

[*4] **戦略型ゲーム** (strategic form game) とも言う。一般的に標準型ゲームとはプレイヤーの選択可能な戦略の組とそれに対応した利得の組とでゲームを表現するものであり，行列を使うとは限らない。

4.2.2　ナッシュ均衡

ゲーム 1 の均衡を考える。ゲームの均衡というのは，実際にこのゲームが行われたときにプレイヤーが選択するであろうと思われる戦略の組み合わせである。ゲームの均衡について最も基本となる考え方は次のナッシュ均衡である。

ナッシュ均衡　各プレイヤーが選んでいる戦略が，それぞれ相手の戦略に対する最適反応になっている場合, そのような戦略の組み合わせを**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium) と呼ぶ。ナッシュ均衡においては相手が戦略を変えなければ自分だけが一方的に戦略を変えても利得を増やすことはできない（利得が減るとは限らない)。

ゲーム 1 のナッシュ均衡を考えてみよう。このゲームでは企業 A にとっては企業 B がどちらの戦略を選んでも低価格を選択することが最適になっている。同様に企業 B にとっても企業 A がどちらの戦略を選んでも低価格を選択することが最適になっている。したがってこのゲームのナッシュ均衡は企業 A，企業 B の戦略がともに低価格となる組合せであり，そのとき各プレイヤーが得る利得（利潤）は表 4.1 の右下の枠に示されている (2,2) である。

このゲームでは 2 つの企業がカルテルを結んでともに高価格をつけるように協力すれば左上に示されている利潤 (5,5) を実現することができる。しかし，拘束力のある協力関係を結べない非協力ゲームでは相手が高価格をつけると想定すると自分が低価格をつけた方が利潤が大きくなる（それが最適反応）ので両企業ともに低価格をつけ，結果的に低い利潤になってしまう。

支配戦略　このゲームでの低価格戦略のように，あるプレイヤーにとって相手がどのような戦略を選ぼうとも自分にとって最適な戦略がただ一つに決まっている場合，その戦略を**支配戦略** (dominant strategy) と呼ぶ。ここで支配というのは，低価格という戦略が高価格という戦略を支配しているという意味であり，どちらかのプレイヤーが相手を支配しているということではない。

この例のようなゲームは**囚人のジレンマ** (prisoner’s dilemma) と呼ばれる。表 4.1 を表 4.2 のように作り変えてみる。この表の利得は表 4.1 の利得からすべて 7 を引いた数字である。期待効用と同様にこのようにしてもゲームの構造は変わらず，最適反応，ナッシュ均衡も変わらない。「高価格」「低価格」という戦略はそれぞれ「黙秘」「自白」と名前が変わっている。ある犯罪を共同で犯した 2 人の容疑者（取調べ段階で留置場などに入っている囚人）A，B がいて別々に取り調べられている。検察官は「自白すれば罪を軽くしてやる」と言う。自分だけが自白すれば無罪放免（利得は 0)，自分だけが黙秘すると懲役 6 年（利得は −6)，ともに自白すれば懲役 5 年，そしてともに黙秘を貫けば証拠不十分で懲役 2 年になることがわかっているものとする。このゲームでは「自白」が支配戦略であ

		囚人 B の戦略	
囚人Aの戦略		黙秘	自白
	黙秘	-2, -2	-6, 0
	自白	0, -6	-5, -5

表 4.2　囚人のジレンマ

		企業 B の戦略	
企業Aの戦略		規格 X	規格 Y
	規格 X	8, 6	4, 4
	規格 Y	3, 3	6, 8

表 4.3　ゲーム 2–互換性のゲーム

り，ともに自白することがナッシュ均衡である。相手の自白を心配して自白するのではなく，相手がどうであれ自分にとって自白した方が有利なので自白してしまうのである。

ゲーム 1 のように両方のプレイヤーに支配戦略があれば互いにその支配戦略を選ぶという組合せがナッシュ均衡になるが，支配戦略のあるゲームばかりではない。次の例を考えてみよう。

ゲーム 2　企業 A と B がある製品の規格を決める問題を考える。規格に X と Y の 2 種類があり，両方の企業が同じ規格を選ぶと製品の互換性が高くなり消費者にとって便利になるので市場が大きくなって企業は大きな利潤を得られるが，各企業が異なった規格を選ぶと消費者には不便になって市場が小さくなり利潤も少なくなる。また企業 A は規格 X に，企業 B は規格 Y にすぐれた技術を持っていると仮定する。

この状況を表にすると表 4.3 のようになる。先ほどの例と同じく，表の各桝目の中の数字は，左側が企業 A の利潤を右側が企業 B の利潤を表している。このゲームについて各プレイヤーの最適反応を考えると

(1). 企業 A の最適反応
  (i) 企業 B が規格 X を選んだ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
    X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 3。
  (ii) 企業 B が規格 Y を選んだ場合 → 規格 Y を選ぶのが最適
    X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 6。

(2). 企業 B の最適反応
  (i) 企業 A が規格 X を選んだ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
    X を選ぶと利潤は 6，Y を選ぶと利潤は 4。
  (ii) 企業 A が規格 Y を選んだ場合 → 規格 Y を選ぶのが最適

	女性の戦略	
男性の戦略	サッカー	音 楽
サッカー	5, 3	1, 1
音 楽	0, 0	3, 5

表 4.4　両性の闘い

X を選ぶと利潤は 3，Y を選ぶと利潤は 8。

すなわち，各企業とも相手と同じ規格を選ぶのが最適反応になっている。各プレイヤーにとって相手の戦略によって自分の最適な戦略が異なっているので支配戦略はないが，ナッシュ均衡はある。しかもこのゲームの場合ナッシュ均衡は 2 つある。具体的には次のようになる。

(1). **ナッシュ均衡** 1–企業 A，企業 B ともに規格 X を選ぶ。
企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は規格 X であり，企業 B が規格 X を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，お互いに最適反応になっておりこの戦略の組合せはナッシュ均衡である。

(2). **ナッシュ均衡** 2–企業 A，企業 B ともに規格 Y を選ぶ。
企業 A が規格 Y を選んだ場合の企業 B の最適反応は規格 Y であり，企業 B が規格 Y を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 Y なので，お互いに最適反応になっておりこの戦略の組合せはナッシュ均衡である。

この 2 つの均衡のうち，ともに規格 X を選ぶ均衡の方が企業 A にとって有利であり，ともに規格 Y を選ぶ均衡の方が企業 B にとって有利であるが，どちらの方が実現しやすい均衡であるかはわからない。このようにゲームの均衡は一つとは限らない。

このゲームは**両性の闘い**と呼ばれるゲームの一例になっている。表 4.3 を表 4.4 のように作り変える。この表の利得は表 4.3 の利得からすべて 3 を引いたものになっている。互いに連絡を取れない状況におかれた（なぜかは問わない）男女がある日のある時刻にサッカー（のある特定の試合）を見に行くかある音楽コンサートに行くかを決めなければならない。男性はサッカーを，女性は音楽を好むが，何よりも会えなければいけない。利得はそれぞれの状況での 2 人の効用（満足感）を表すものと考えられる。このゲームにはナッシュ均衡が 2 つある。1 つはともにサッカーを見に行くことであり，もう 1 つはともに音楽を聞きに行くことである。

4.2.3　混合戦略

次のゲームを考えてみよう。

企業Aの戦略		企業Bの戦略 製品 X	企業Bの戦略 製品 Y
	製品 X	5, 5	8, 2
	製品 Y	8, 2	5, 5

表 4.5　ゲーム 3–類似品のゲーム

ゲーム 3　企業 A と企業 B がある製品を作っているが，企業 A は独自の技術を使って特徴ある製品を作るのが得意であり企業 B とは異なったタイプの製品を作ろうとしている。一方，企業 B は類似品を作るのが得意で企業 A の製品とよく似た製品を作りたいと思っていると仮定する。製品のタイプを X，Y で表す。

このゲームは表 4.5 のように表現される。やはり左側の数字が企業 A の利潤，右側の数字が企業 B の利潤を表す。このゲームについて各プレイヤーの最適反応を求めると

(1). 企業 A の最適反応
  (i) 企業 B が製品 X を選んだ場合 $\longrightarrow$ 製品 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 5，Y を選ぶと利潤は 8
  (ii) 企業 B が製品 Y を選んだ場合 $\longrightarrow$ 製品 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 5
(2). 企業 B の最適反応
  (i) 企業 A が製品 X を選んだ場合 $\longrightarrow$ 製品 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 5，Y を選ぶと利潤は 2
  (ii) 企業 A が製品 Y を選んだ場合 $\longrightarrow$ 製品 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 2，Y を選ぶと利潤は 5

となる。企業 A は相手とは違うタイプの製品を選ぼうとし，一方企業 B は相手と同じタイプの製品を選ぼうとする。このゲームにはお互いに相手の戦略に対して最適反応になっているような戦略の組み合わせがないのでナッシュ均衡はない。しかし，戦略について異なった考え方をするとナッシュ均衡が存在するようになる。その戦略についての考え方とは以下に述べる混合戦略である。

混合戦略　ゲームのプレイヤーが自分の選択可能な戦略を確率的に選択するとき，各プレイヤーが各戦略に対して割り当てる確率の組合せを**混合戦略** (mixed strategy) と呼ぶ。

上のゲーム 3 であれば，企業 A が確率 1/3 で製品 X を選び，確率 2/3 で製品 Y を選ぶというような戦略を考えることになる。サイコロをころがして 1 から 4 までの目が出れば製品 X，5 または 6 の目が出れば製品 Y というように選べばそのような確率になる。このよう

な混合戦略に対してこれまで考えてきたように行動をはっきり一つに決めて選ぶような戦略を**純粋戦略** (pure strategy) と呼ぶ。混合戦略は純粋戦略を確率的に組み合わせたものであるが，純粋戦略も混合戦略の一種（X を選ぶ確率が 1 あるいは 0 の）と見ることができる。

自分あるいは相手が混合戦略を選んでいる場合は，自分がある戦略（純粋戦略でも）を選んだときに得られる利得は確実なものではなく確率的なものになる。

混合戦略を考えたときでも純粋戦略の場合と同じように，最適反応およびナッシュ均衡が定義される。すなわち，それぞれのプレイヤーが相手の戦略に対して自分にとって最も有利な戦略（最適反応）を選んでいるときの戦略の組合せがナッシュ均衡である。表 4.5 のゲームで混合戦略によるナッシュ均衡を考えてみよう。企業 A が確率 p で製品 X を，確率 $1-p$ で製品 Y を選び，企業 B が確率 q で製品 X を，確率 $1-q$ で製品 Y を選んだ場合に企業 A が獲得する利潤の期待値（平均値）を π_A，企業 B が獲得する利潤の期待値を π_B とすると[*5]

$$\begin{aligned}\pi_A =&5pq+8(1-p)q+8p(1-q)+5(1-p)(1-q)\\ =&5+(3-6q)p+3q \end{aligned}\tag{4.1}$$

および

$$\begin{aligned}\pi_B =&5pq+2(1-p)q+2p(1-q)+5(1-p)(1-q)\\ =&5+(6p-3)q-3p \end{aligned}\tag{4.2}$$

が得られる。企業 A は式 (4.1) が最大となるように p を決め，企業 B は式 (4.2) が最大となるように q を決めるのであるが，(4.1) の $3-6q$ がゼロでなければ，$p=1$（$3-6q>0$ の場合），または $p=0$（$3-6q<0$ の場合）とすることによって企業 A の利潤が最大となるから純粋戦略になる。純粋戦略では均衡がないことを確認済みなので混合戦略の均衡を考えるには $3-6q=0$ となっていなければならない。すると $q=1/2$ を得る。一方 (4.2) の $6p-3$ がゼロでなければ，$q=1$（$6p-3>0$ の場合），または $q=0$（$6p-3<0$ の場合）とすることによって企業 B の利潤が最大となり，純粋戦略となる。混合戦略の均衡を考えるには $6p-3=0$ となっていなければならない。したがって $p=1/2$ を得る。以上のことからゲーム 3 のナッシュ均衡は次のように表現される。

---

*5 期待値は以下のように計算する。『サイコロを 2 個同時に振って両方とも 1 の目が出れば賞金 1200 円，1 と 2 が出れば 300 円それ以外は賞金なし』というゲームを考えると，1 回だけそのゲームをプレイしたときの賞金の期待値は

$$\frac{1}{36}\times 1200+\frac{1}{18}\times 300=50$$

となる。これはサイコロの目が事前の確率通りに出たとして（2 個のサイコロともに同じ目が出る確率はそれぞれの目について $\frac{1}{36}$，異なった目が出る確率はそれぞれの組み合わせについて $\frac{1}{18}$）このゲームを何度もプレイして得られる平均の賞金に等しい。

ゲーム 3 のナッシュ均衡　企業 A，企業 B ともに確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するという戦略の組合せがナッシュ均衡となる。そのとき企業 A が獲得する利潤（の期待値）は 6.5，企業 B が獲得する利潤（の期待値）は 3.5 である。

$q = 1/2$，すなわち企業 B が確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するとき式 (4.1) の $3 - 6q$ がゼロであるから，企業 A にとってはどのような確率で製品 X を選んでも得られる利潤の期待値は同じである。その場合，混合戦略ではなく純粋戦略として製品 X（$p = 1$ のとき）を選んでも製品 Y（$p = 0$ のとき）を選んでも得られる利潤の期待値は等しくなっている。したがって $p = 1/2$ とするのも最適反応である。同様に，$p = 1/2$，すなわち企業 A が確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するとき，式 (4.2) の $6p - 3$ がゼロであるから，企業 B にとってどのような確率で製品 X を選んでも得られる利潤の期待値は同じであり，$q = 1/2$ とするのも最適反応になっている。したがって，$p = 1/2$，$q = 1/2$ は互いに最適反応であるからナッシュ均衡になる。

このように混合戦略が相手のある戦略に対して最適反応になっている場合には，その混合戦略を構成する各純粋戦略自体も最適反応になっている[*6]。そうすると確率 1/2 はそれを選ぶプレイヤーの合理的な判断によって選ばれたものと考えるよりも，そのプレイヤーの戦略についての相手の予想を示すものと考えた方がよい。つまり企業 B にとっては企業 A が確率 1/2 で製品 X を選んでいると予想したときに製品 X と製品 Y が同じ利得をもたらす戦略になり，逆に企業 A にとっては企業 B が確率 1/2 で製品 X を選んでいると予想したときに製品 X と製品 Y が同じ利得をもたらす戦略になる。確率 1/2 はお互いの戦略が最適反応になるためにつじつまの合う予想になっている。

先に見たゲーム 2 も，2 つの純粋戦略によるナッシュ均衡の他に次のような混合戦略によるナッシュ均衡を持つ。

ゲーム 2 の混合戦略によるナッシュ均衡　企業 A は確率 5/7 で規格 X を，確率 2/7 で規格 Y を選び，一方企業 B は確率 2/7 で規格 X を，確率 5/7 で規格 Y を選ぶという戦略の組合せがナッシュ均衡である。

これは以下のようにして示される。

ゲーム 3 の場合と同様に企業 A が確率 p で規格 X を，確率 $1 - p$ で規格 Y を選び，企業 B が確率 q で規格 X を，確率 $1 - q$ で規格 Y を選んだ場合に企業 A が獲得する利潤の期待値（平均値）を π_A，企業 B が獲得する利潤の期待値を π_B とすると

[*6] ここでは戦略の数が 2 つのゲームを考えているので混合戦略はその 2 つの戦略をある確率で選ぶものとなっているが，戦略の数が 3 つ（あるいはそれ以上）あるゲームにおいては 3 つすべてからなる混合戦略の他に 3 つの内の 2 つからなる混合戦略も考えることができる。そのような戦略が最適反応になっている場合には，それを構成する 2 つの純粋戦略それぞれも最適反応である。

$$\begin{aligned}\pi_A &= 8pq + 3(1-p)q + 4p(1-q) + 6(1-p)(1-q) \\ &= 6 + (7q-2)p - 3q \end{aligned} \tag{4.3}$$

および

$$\begin{aligned}\pi_B &= 6pq + 3(1-p)q + 4p(1-q) + 8(1-p)(1-q) \\ &= 8 + (7p-5)q - 4p \end{aligned} \tag{4.4}$$

と表される。各企業の最適反応は以下の通りである。

(1). 企業 A の最適反応
  (i) $\frac{2}{7} < q \leqq 1$ のときは $p = 1$ が最適
  (ii) $0 \leqq q < \frac{2}{7}$ のときは $p = 0$ が最適
  (iii) $q = \frac{2}{7}$ のときは p の値は何でもよい
(2). 企業 B の最適反応
  (i) $\frac{5}{7} < p \leqq 1$ のときは $q = 1$ が最適
  (ii) $0 \leqq p < \frac{5}{7}$ のときは $q = 0$ が最適
  (iii) $p = \frac{5}{7}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(1). $p = 1, q = 1$。これは企業 A が X，B も X を選ぶ純粋戦略による均衡である。
(2). $p = 0, q = 0$。これは企業 A が Y，B も Y を選ぶ純粋戦略による均衡である。
(3). $p = \frac{5}{7}, q = \frac{2}{7}$。これはともに（純粋戦略ではない）混合戦略を選ぶ均衡である。

混合戦略によるナッシュ均衡においては企業 A は確率 5/7 で規格 X を確率 2/7 で規格 Y を選び，一方企業 B は確率 2/7 で規格 X を確率 5/7 で規格 Y を選ぶ。この場合には，企業 B にとっては企業 A が確率 5/7 で規格 X を選んでいると予想したときに規格 X と規格 Y が同じ利得をもたらす戦略になり，逆に企業 A にとっては企業 B が確率 2/7 で規格 X を選んでいると予想したときに規格 X と規格 Y が同じ利得をもたらす戦略になる。5/7 と 2/7 がつじつまの合う予想になっている。

ナッシュ (John Nash) はプレイヤーの数や戦略の数が 2 以上の場合も含めて一般的に次のような定理を証明した*7。

ナッシュの定理　混合戦略を考えるとあらゆるゲームに少なくとも一つのナッシュ均衡が存在する。

このナッシュの業績にちなんで**ナッシュ均衡**と呼ばれている。前章で見たクールノー均衡，ベルトラン均衡もナッシュ均衡の一種である。

*7 この定理の証明にはブラウワーの不動点定理（またはそれの拡張版である角谷の不動点定理）が用いられている。詳しくは数理経済学の書物を参照されたい。ブラウワーの不動点定理の証明については上下統合版 pdf ファイルの付録で解説している。

■混合戦略の図解

ゲーム 3 の均衡

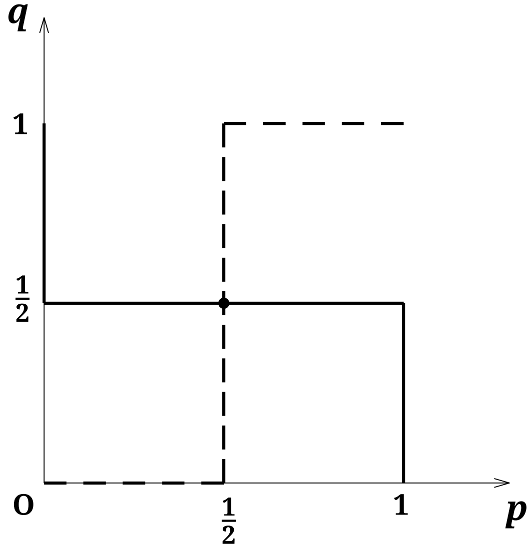
p. 179 の (4.1)，(4.2) よりプレイヤー A の最適反応は

(1). $q < \frac{1}{2}$ のとき $p = 1$。
(2). $q = \frac{1}{2}$ のとき p は任意。
(3). $q > \frac{1}{2}$ のとき $p = 0$。

プレイヤー B の最適反応は

(1). $p < \frac{1}{2}$ のとき $q = 0$。
(2). $p = \frac{1}{2}$ のとき q は任意。
(3). $p > \frac{1}{2}$ のとき $q = 1$。

横軸にプレイヤー A が X を選ぶ確率 p，縦軸にプレイヤー B が X を選ぶ確率 q をとってこれを図に表すと以下のようになる。太線と破線で描いたものがそれぞれプレイヤー A と B の最適反応を表す曲線であり，互いに交わる点がナッシュ均衡となる。このケースでは交点は $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 一つだけで，これが唯一のナッシュ均衡である。



ゲーム 2 の均衡

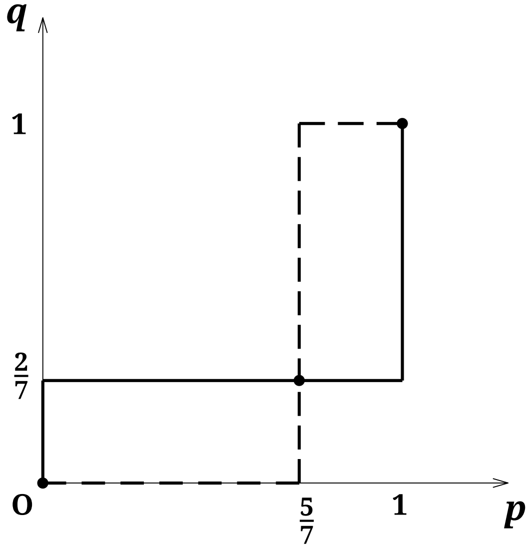
p. 181 の (4.3)，(4.4) よりプレイヤー A の最適反応は

(1). $q<\frac{2}{7}$ のとき $p=0$。
(2). $q=\frac{2}{7}$ のとき p は任意。
(3). $q>\frac{2}{7}$ のとき $p=1$。

プレイヤー B の最適反応は

(1). $p<\frac{5}{7}$ のとき $q=0$。
(2). $p=\frac{5}{7}$ のとき q は任意。
(3). $p>\frac{5}{7}$ のとき $q=1$。

横軸にプレイヤー A が X を選ぶ確率 p，縦軸にプレイヤー B が X を選ぶ確率 q をとってこれを図に表すと以下のようになる。太線と破線で描いたものがそれぞれプレイヤー A と B の最適反応を表す曲線である。交点は $(p,q)=(1,0)$，$(p,q)=(0,1)$，$(p,q)=(\frac{5}{7},\frac{2}{7})$ の三つあり，それぞれがナッシュ均衡である。その内，初めの二つは純粋戦略による均衡である。



演習問題 36 の解答例（上下統合版では 82）

プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 2(1-p)(1-q) = 2 - pq$$

$$\pi_B = 2pq + 3p(1-q) + 3(1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 + 2p + 2q - 3pq = 1 + q(2-3p) + 2p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(1). プレイヤー A の最適反応
  (i) $0 < q \leqq 1$ のときは $p = 0$ が最適。
  (ii) $q = 0$ のときは p の値は任意。

(2). プレイヤー B の最適反応
  (i) $\frac{2}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 0$ が最適。
  (ii) $0 \leqq p < \frac{2}{3}$ のときは $q = 1$ が最適。
  (iii) $p = \frac{2}{3}$ のときは q の値は任意。

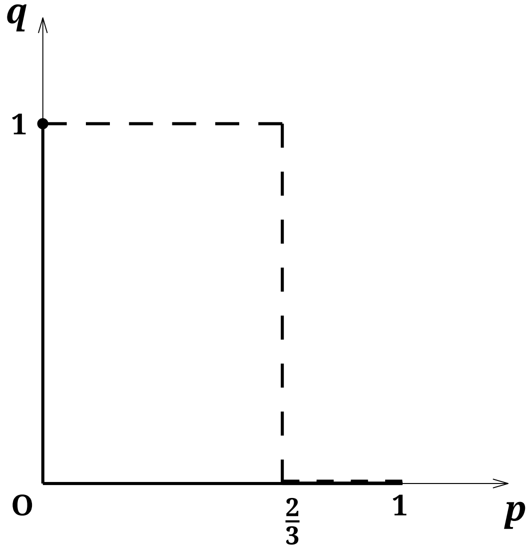
以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(1). $p = 0, q = 1$。これはプレイヤー A が Y，B が X を選ぶ純粋戦略からなる均衡である。

(2). $q = 0$ で $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$。この均衡ではプレイヤー B は純粋戦略として Y を選ぶが，プレイヤー A は $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ の範囲で純粋戦略（X）または混合戦略を選ぶ。したがってこの均衡には次のような均衡も含まれる。

「$p = 1, q = 0$，プレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略からなる均衡」

図解すると以下のようになる。やはり太線と破線で描いたものがそれぞれプレイヤー A と B の最適反応を表す曲線である。太線と破線が重なっている箇所はすべてがナッシュ均衡である。



■ジャンケンゲーム　ジャンケンのゲームを考えよう。プレイヤーを A，B とすると，それぞれ戦略はグー，チョキ，パーの 3 つであり，これらを G, C, P と表す。そのゲームの利得表は表 4.6 のように表現される。

プレイヤーＢの戦略

		G	C	P
プレイヤーＡの戦略	G	0, 0	1,-1	-1, 1
	C	-1, 1	0, 0	1, -1
	P	1,-1	-1, 1	0, 0

表 4.6　ジャンケンゲーム

勝てば利得は 1，負ければ −1，あいこの場合は 0 とする。このゲームに純粋戦略に限定したナッシュ均衡はない。混合戦略を考えよう。プレイヤーＡが G, C, P をそれぞれ確率 $p_A, q_A, 1-p_A-q_A$ で出し，プレイヤーＢが G, C, P を確率 $p_B, q_B, 1-p_B-q_B$ で出すとすると，プレイヤーＡの期待利得は

$$\begin{aligned}\pi_A =& p_A[0p_B + q_B - (1-p_B-q_B)] + q_A[-p_B + 0q_B + (1-p_B-q_B)] \\ &+ (1-p_A-q_A)[p_B - q_B + 0(1-p_B-q_B)] \\ =& p_A(3q_B-1) + q_A(1-3p_B) + p_B - q_B\end{aligned}$$

となる。したがって混合戦略の均衡においては

$$3q_B - 1 = 0$$

$$1 - 3p_B = 0$$

が成り立たなければならない。これらから

$$p_B = q_B = \frac{1}{3}$$

同様にプレイヤーＢの期待利得を考えることによって

$$p_A = q_A = \frac{1}{3}$$

が求まる。つまりグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すような戦略の組が混合戦略を含めたときのナッシュ均衡である。

4.2.4　支配される戦略の逐次消去

図の囚人のジレンマの例を考えてみよう。

B の戦略

		X	Y
A の	X	4, 4	0, 6
戦略	Y	6, 0	2, 2

B が X，Y どちらの戦略を選んでも A は Y を選ぶ方がよい。同様に A がどちらの戦略を選んでも B は Y を選ぶ方がよい。そのとき A，B それぞれについて Y が X を強く支配する（強支配する）と言う（X は Y に強く支配される）。このような場合両プレイヤーにとって相手の戦略に関わらず X は最適反応にはなりえない。したがってナッシュ均衡を構成する戦略には含まれない（混合戦略を考えても同様）から X を省いてゲームを考えてもよいと考えられる。まず A の戦略 X を消去するとゲームは次のようになる。

B の戦略

		X	Y
A の戦略	Y	6, 0	2, 2

ここで B にとっても X は Y に強く支配されているからこれを消すと双方にとって Y だけが残り，ともに Y を選ぶ状態，すなわちナッシュ均衡が得られる。このようにして選ばれる戦略を順に絞りながら均衡を考えて行く方法を「**強く支配される戦略の逐次消去**」と言う。別の例を考える。

Bの戦略

		X	Y
Aの	X	4, 4	0, 6
戦略	Y	6, 2	2, 0

このゲームではAにとってXはYに強く支配される戦略であるが，Bにとってはそうではない。Aがどちらを選ぶかでBの最適反応は異なる。しかしAの戦略Xを消去するとゲームは

Bの戦略

		X	Y
Aの戦略	Y	6, 2	2, 0

となり，この状態ではBにとってYがXに強く支配されているからYを消去すると(Y,X)という戦略の組だけが残りそれがナッシュ均衡になる。これも（と言うよりこのような手順が）強く支配される戦略の逐次消去である。Bがどちらを選んでも（あるいは混合戦略を選んでも）Aは絶対にXを選ばない。AがXを選ばないとするとBにとってYが最適反応になることはありえないので消去してもナッシュ均衡を見つけるのに問題はない。互いの戦略が3つ以上あるゲームにおいてこの手順で戦略を消去した結果2つずつ（あるいはそれ以上）の戦略が残った場合，そのゲームでナッシュ均衡を考えることによってもとのゲームのナッシュ均衡が得られる。さらに別の例を考える。

Bの戦略

		X	Y
Aの	X	4, 4	0, 4
戦略	Y	4, 2	2, 0

このゲームには2つの（純粋戦略による）ナッシュ均衡がある。(X,X)と(Y,X)。また，A, BにとってXもYも他方に強く支配される関係にはなっていない。しかしAにとってはXがYより大きい利得を与えることはなくYの方がXより大きい利得を与えることがある。このような場合AにとってXはYに弱く支配される（弱支配される）と言う。同様にBにとってはYがXに弱く支配されている。弱く支配される戦略を順に消去して均衡を考える手順を「**弱く支配される戦略の逐次消去**」と言う。まずAの戦略Xを消去するとゲームは次のようになる。

Bの戦略

		X	Y
Aの戦略	Y	4, 2	2, 0

このゲームにおいてはBにとってYがXに（強く）支配されているのでこれを消すとナッシュ均衡(Y,X)が得られる。しかしこの方法によってはもう1つのナッシュ均衡が消えて

しまう。このように弱く支配される戦略を消去してゲームの均衡を考えて行く手順によってはすべてのナッシュ均衡を見つけられない可能性がある。

せっかくだから戦略が 3 つのゲームも考えてみよう。

B の戦略

		X	Y	Z
A の	X	4, 4	0, 4	3, 6
戦略	Y	4, 2	2, 0	3, 3
	Z	2, 2	1, 1	1, 0

このゲームの純粋戦略によるナッシュ均衡は (X,Z) と (Y,Z) の 2 つある。A にとって Z は Y に強く支配される戦略であるが，B の戦略にはそのような関係はない（A が Z を選んだ場合を考えればよい)。A の戦略 Z を消去するとゲームは

B の戦略

		X	Y	Z
A の	X	4, 4	0, 4	3, 6
戦略	Y	4, 2	2, 0	3, 3

となる。このゲームでは B にとって X，Y がともに Z に強く支配されているのでそれらを削除するとナッシュ均衡 (X,Z)，(Y,Z) の 2 つの状態しか残らない。一方もとのゲームにおいて A にとって X が Y に弱く支配されているのでそれも消去するとナッシュ均衡 (X,Z) が消えてしまう。ただし B にとって Y が X に弱く支配されているので，それを先に消去するとゲームは

B の戦略

		X	Z
A の	X	4, 4	3, 6
戦略	Y	4, 2	3, 3
	Z	2, 2	1, 0

のようになり A にとって X が Y に弱く支配される関係ではなくなるので Z のみが消去され 2 つのナッシュ均衡はともに残る。このように弱く支配される戦略を消去する順番によっては残る均衡が異なることがある。

4.3 動学的なゲームと部分ゲーム完全均衡

前節では二人のプレイヤーがそれぞれの戦略を同時に 1 回限り選択するという構造をもったゲーム，同時決定ゲームを考えた。先に述べたように**同時に**というのは時間的に同時であるかどうかということではなく，各プレイヤーが相手がどのような戦略を選んだかを知ることができない状況で自分の戦略を選ばなければならないという意味である。それ

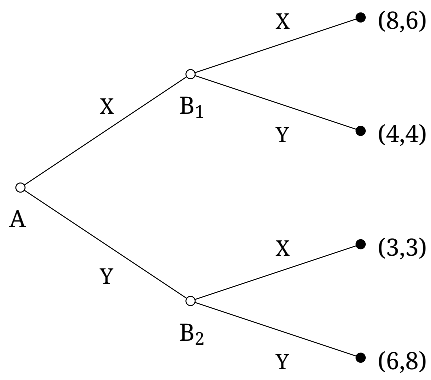


図 4.1　ゲーム 4–動学的な互換性のゲーム（展開型ゲーム）

に対して一方のプレイヤーが先に意思決定をして行動を選び，その結果を見てからもう一方のプレイヤーが行動を選ぶという構造をもったゲームも考えられる。プレイヤーが交互に行動を選ぶのでこのようなゲームは交互行動ゲームと呼ぶことができる。またゲームの進行の中で時間の流れを考えているので**動学的なゲーム** (dynamic game) とも呼ばれる。やはりプレイヤーは互いに相談・協力することができないと仮定するので非協力ゲームである。

この節と次の節では純粋戦略のみを考える。

4.3.1　動学的なゲームとゲームの樹・展開型ゲーム

前節のゲーム 2 をもとにして次の例を考えてみよう。

ゲーム 4　ゲーム 2 と同様に企業 A と企業 B が製品の規格 X または Y を選ぶゲームであるが，企業 A が先にどちらの規格を選ぶかを決め，その結果を見てから企業 B が規格を選ぶ。

ゲーム 4 の構造を図に表すと図 4.1 のようになる。このようにゲームにおける意思決定の流れを樹が枝分かれするように表したものを**ゲームの樹** (game tree) あるいは**展開型ゲーム** (extensive form game) と呼ぶ[*8]。図の点 A は企業 A が戦略を決める時点を，点 B_1 と B_2 は企業 B が戦略を決める時点を示す。A と B_1 あるいは A と B_2 を結ぶ線の上または下に書かれている X や Y は各プレイヤーが選択した戦略を表す。右側に並んでいる 4 つの

[*8] 展開型ゲームは各プレイヤーにとっての行動の選択肢だけではなく，その行動を選ぶ順番やゲームの流れの中での位置関係，意思決定をする時点での情報の状態などがわかるようにゲームを記述するものでありゲームの樹を用いるとは限らない。

		企業Bの戦略			
企業Aの戦略		XX	XY	YX	YY
	規格 X	8,6	8,6	4,4	4,4
	規格 Y	3,3	6,8	3,3	6,8

表 4.7　ゲーム 4–動学的な互換性のゲーム（標準型ゲーム）

黒い点は各プレイヤーがそれぞれの戦略を選んでゲームが終了する状態を表しており，各点の右に書かれている数字は各プレイヤーの利得である。左側の数字が企業 A の利得を右側の数字が企業 B の利得を表す。

このゲームでの企業 A の戦略の選択肢は静学的なゲームの場合と同じく規格 X と規格 Y の 2 つであるが，企業 B は企業 A の行動を見てから自分の行動を決めるので，企業 A が規格 X を選ぶか規格 Y を選ぶかに応じて 4 つの戦略の選択肢を持つ[*9]。企業 B の戦略は具体的には次のように表される。

(1). 戦略 XX
　企業 A が規格 X を選んでも規格 Y を選んでも規格 X を選ぶ
(2). 戦略 XY
　企業 A が規格 X を選べば規格 X を，企業 A が規格 Y を選べば規格 Y を選ぶ。
(3). 戦略 YX
　企業 A が規格 X を選べば規格 Y を，企業 A が規格 Y を選べば規格 X を選ぶ。
(4). 戦略 YY
　企業 A が規格 X を選んでも規格 Y を選んでも規格 Y を選ぶ。

戦略 XY と YX に見られるように，企業 B は企業 A の戦略に応じて同じ規格を選ぶことも異なった規格を選ぶことも可能なので 4 つの選択肢を持つ。このように動学的なゲームで後から戦略を選ぶプレイヤーは静学的なゲームにおけるよりも多くの選択肢を持つことになる。通常静学的なゲーム（同時決定ゲーム）は表を用いた標準型ゲームとして，動学的なゲーム（交互行動ゲーム）はゲームの樹を用いた展開型ゲームで表されることが多いが，動学的なゲームを標準型ゲームとして表すこともできる。ゲーム 4 を標準型ゲームで表現すると表 4.7 のようになる。

4.3.2　部分ゲーム完全均衡

表 4.7 によってゲーム 4 のナッシュ均衡を考えてみよう。まず各プレイヤーの最適反応を調べてみる。

[*9] 戦略とは状況に応じて選ばれる行動の組み合わせであるが，ここでは企業 A が選んだ行動に応じて企業 B が選ぶ行動の組み合わせが企業 B の戦略である。

(1). 企業 A の最適反応
  (i) 企業 B が戦略 XX を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 3
  (ii) 企業 B が戦略 XY を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 6
  (iii) 企業 B が戦略 YX を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 3
  (iv) 企業 B が戦略 YY を選ぶ場合 → 規格 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 6
(2). 企業 B の最適反応
  (i) 企業 A が規格 X を選んだ場合 → 戦略 XX または XY を選ぶのが最適
  XX を選ぶと利潤は 6，XY を選ぶと 6，YX を選ぶと 4，YY を選ぶと 4
  (ii) 企業 A が規格 Y を選んだ場合 → 戦略 XY または YY を選ぶのが最適
  XX を選ぶと利潤は 3，XY を選ぶと 8，YX を選ぶと 3，YY を選ぶと 8

このゲームのナッシュ均衡は次のように 3 つある。

(1). **ナッシュ均衡** 1–企業 A は規格 X を選び，企業 B は戦略 XX を選ぶ。
企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 XX（または XY）であり，企業 B が戦略 XX を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。
(2). **ナッシュ均衡** 2–企業 A は規格 X を選び，企業 B は戦略 XY を選ぶ。
企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 XY（または XX）であり，企業 B が戦略 XY を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。
(3). **ナッシュ均衡** 3–企業 A は規格 Y を選び，企業 B は戦略 YY を選ぶ。
企業 A が規格 Y を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 YY（または XY）であり，企業 B が戦略 YY を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 Y なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。

以上の 3 つのナッシュ均衡はいずれも合理的なものであろうか。ナッシュ均衡 3 について検討してみよう。ナッシュ均衡 3 では，企業 B は図 4.1 の点 B_1 でも点 B_2 でも規格 Y を選ぶという戦略をとる。この均衡で想定されているように『企業 A が規格 Y を選ぶという前提で考えれば』点 B_1 は各企業が均衡戦略に示された行動を選択する限り実際には実現しない状態なので，企業 B はその時点で規格 X を選ぶと考えても規格 Y を選ぶと考えても利得に影響はなく戦略 YY は最適反応になっている。一方企業 A が規格 Y を選ぶにあたっては，もし『自分が規格 X を選んだとき相手は規格 Y で応じてくるであろう』という想定のもとに行動することになっているが，この想定は合理的ではないのではなかろう

か。もし実際に企業 A が規格 X を選んでゲームが点 B_1 に達したとすれば，企業 B にとっては規格 Y よりも規格 X を選んだ方が利潤が大きくなり有利である。したがって『合理的な均衡では点 B_1 で企業 B が規格 X を選ぶという戦略になっていなければならない』。すると企業 A は，規格 X を選べば 8 の規格 Y を選べば 6 の利潤を得られることになり，点 A において規格 X を選ぶであろう。以上のことからナッシュ均衡 3 は合理的ではない。この均衡は，B が「A が X を選んだら Y を選ぶ」という脅しをかけ，A がその脅しを信用していることによって成り立っている。しかし実際に A が X を選ぶと B は Y ではなく X を選ぶ方が利得が大きいので Y を選ぶインセンティブはない。このような脅しは**信用できない脅し** (incredible threat) と言う。以下で述べる部分ゲーム完全均衡は信用できない脅しにもとづくナッシュ均衡を排除する。

次にナッシュ均衡 1 では点 B_1 で企業 B が規格 X を選ぶようになっているのでそれは合理的であるが，企業 A が規格 Y を選びゲームが点 B_2 に達したときに，企業 B が利得が小さい方の規格 X を選ぶことになっておりやはり合理的ではない。これも信用できない脅しである。『合理的な均衡では点 B_2 で企業 B が規格 Y を選ぶという戦略になっていなければならない』。

以上のことから，ゲーム 4 の合理的な均衡はナッシュ均衡 2 であることがわかる。

動学的なゲームの合理的な均衡を定義するのに次に示す部分ゲームの概念が必要となる。

部分ゲーム (subgame)　動学的なゲームにおいて，途中のある時点から先が一つの独立したゲームになっている場合，その途中の時点からのゲームを部分ゲーム (subgame) と呼ぶ。また全体のゲームそのものも一つの部分ゲームと見なされる。

ゲーム 4 にはそれ自身の他に，点 B_1 から始まるゲームと点 B_2 から始まるゲームの 2 つの部分ゲームがある。それぞれ部分ゲーム 1 と部分ゲーム 2 と呼ぶことにする。部分ゲーム 1 におけるプレイヤーの利得は点 B_2 での意思決定の影響を受けない。また部分ゲーム 2 における利得は点 B_1 での意思決定の影響を受けない。すなわち 2 つの部分ゲームは互いに独立している。この 2 つの部分ゲームにおいては企業 A は意思決定をする機会がなく企業 B のみが戦略を選択することができるが，ゲームであることには違いがない。企業 B にとっては点 B_1 では規格 X を，点 B_2 では規格 Y を選ぶのが最適なので，それらの戦略がそれぞれ部分ゲーム 1 と部分ゲーム 2 のナッシュ均衡になる。したがってゲーム 4 の 3 つのナッシュ均衡のうちナッシュ均衡 1 では点 B_2 における企業 B の戦略が部分ゲームのナッシュ均衡になっていない。またナッシュ均衡 3 では点 B_1 における企業 B の戦略が部分ゲームのナッシュ均衡になっていないことがわかる。ナッシュ均衡 2 においては部分ゲーム 1，部分ゲーム 2 ともにナッシュ均衡となる戦略が選ばれている。上で見た均衡の合理性とは戦略が各部分ゲームにおいてナッシュ均衡になっているということである。以上のことから動学的なゲームについて次の均衡概念を得る。

部分ゲーム完全均衡 動学的なゲームにおいて，そのゲームに含まれるすべての部分ゲームにおいてそれぞれナッシュ均衡となるような戦略の組合せを**部分ゲーム完全均衡** (subgame perfect equilibrium) と呼ぶ。

ゲーム 4 の部分ゲーム完全均衡はナッシュ均衡 2 だけである。部分ゲーム完全均衡の概念はゼルテン (Reinhert Selten) によって提唱されたものであり，動学的なゲームにおいてナッシュ均衡がいくつもある場合により合理的な均衡を選び出すのに用いられる。

4.3.3 部分ゲーム完全均衡の見つけ方

上の解説では動学的なゲームを行列を使った標準型ゲームとして表し，そのナッシュ均衡を求めた上でそれぞれの均衡の合理性を検討して部分ゲーム完全均衡を選び出したが，より簡単にゲームの樹を用いて直接部分ゲーム完全均衡を求めることができる。ゲーム 4 は点 A から始まって点 B_1 または B_2 に進むのであるが，逆に点 B_1，B_2 で企業 B にとって最適な戦略を考えることから始めよう。もしゲームが点 B_1 に到達したとすると企業 B は X を選べば利得 6，Y を選べば利得 4 を得るので X を選ぶであろう。これは部分ゲーム 1 のナッシュ均衡である。同様に点 B_2 においては Y を選んだ方が利得が大きいので Y を選ぶことになる。これは部分ゲーム 2 のナッシュ均衡である。以上のような企業 B の行動についての見通しを前提として企業 A は点 A において X か Y を選ぶことになる。X を選んだ場合は企業 B も X を選ぶので A の利得は 8，Y を選ぶと B も Y を選ぶので A の利得は 6 となるから，企業 A は点 A において X を選ぶ。したがって点 A において企業 A が X，点 B_1，B_2 で企業 B はそれぞれ X，Y を選ぶという戦略の組合せが部分ゲーム完全均衡になる。このようにして動学的なゲームの部分ゲーム完全均衡は，ゲームを最後の方からさかのぼって解いていくことによって見つけることができる。このような動学的なゲームの解法は**逆向き推論法** (backward induction)[*10] と呼ばれている。

前章で見た複占におけるシュタッケルベルク均衡は部分ゲーム完全均衡の一種である。シュタッケルベルク均衡は，一方の企業が先に産出量を決め，もう一方がそれを見てから自らの産出量を決める（見てからでないと決められない）から，先に決める企業は相手の反応を読み込んで産出量を決めることになる。このように複占，寡占の問題はゲーム理論を用いて分析できる代表的な経済学のテーマである。

4.3.4 動学的なゲームの応用：銀行の取り付けゲーム

二人の投資家が銀行に D の預金をし，銀行はその資金をある投資プロジェクトに投資している。その預金を満期前（プロジェクトが完成する前）に引き出すか満期まで待つかの選択ができるが，一人が満期前に引き出せばもう一人もそうしなければならない。二人が

[*10] この訳語は R. ギボンズ（福岡正夫他訳）『経済学のためのゲーム理論入門』（創文社）による。

同時に満期前に引き出した場合にはそれぞれ r を受けとり，一人だけが引き出した場合にはその人が D を，もう一人が $2r-D$ を受け取ってゲームが終わる。どちらも満期前に引き出さなければゲームは満期後に進む。ともに満期後に引き出せば R を，一人だけが満期後に引き出せばその人は $2R-D$ を，もう一人が D を受け取ってゲームが終わる。どちらも引き出さなければ銀行は R ずつを返してゲームが終わる。このゲームは満期前と満期後の2段階のゲームになっている。それぞれは標準型ゲームである。$R > D > r > \frac{D}{2}$ と仮定する。

まず満期後を考えると $R > D$ かつ $2R-D > R$ なので二人にとって引き出すことが支配戦略（相手が引き出しても引き出さなくても引き出すことが最適）になっており，ともに引き出すという戦略の組がナッシュ均衡である。利得表は以下の通り。満期後のゲームは全体のゲームの部分ゲームになっている。

		投資家2	
投資家1		引き出す	引き出さない
	引き出す	R, R	2R-D, D
	引き出さない	D, 2R-D	R, R

満期後のナッシュ均衡を前提にすると満期前のゲームの利得表は次のようになる。

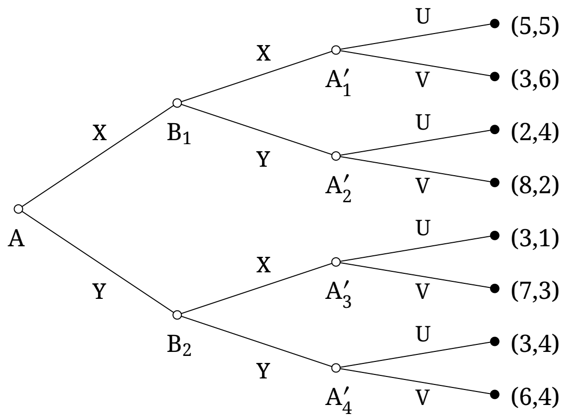
		投資家2	
投資家1		引き出す	引き出さない
	引き出す	r, r	D, 2r-D
	引き出さない	2r-D, D	R, R

$r > 2r-D$，$R > D$ であるから，相手が引き出すとき各投資家の最適反応は「引き出す」，相手が引き出さないときの最適反応は「引き出さない」である。したがってこのゲームには「ともに満期前に引き出す」という戦略の組と「ともに満期前には引き出さず，ともに満期後に引き出す」という戦略の組の二つの純粋戦略によるナッシュ均衡がある。そのナッシュ均衡と満期後の「ともに引き出す」というナッシュ均衡の組がゲーム全体の部分ゲーム完全均衡である。

$R > D$ であるからともに満期まで待つ方がお互いにとって得策であるが，相手が満期前に引き出すのではないかという疑心暗鬼に陥ると自分も引き出すことが最適になってしまうのである。そのような均衡は銀行に対する取り付けと解釈できる。待っていた方が得だから合理的根拠を欠いた取り付けだと言えるかもしれないが，人が取り付けに走れば自分もそうした方がよいという意味では合理的である。満期前のゲームは「協調ゲーム」の例になっている。

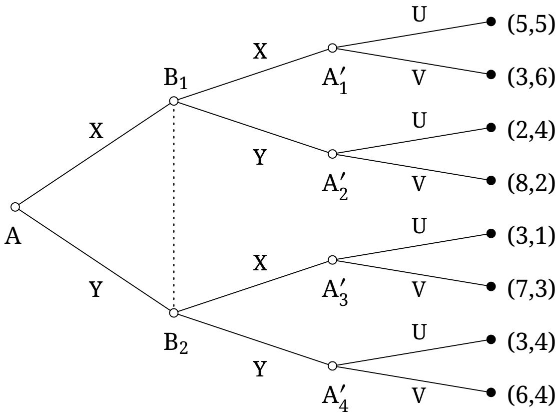
4.3.5　部分ゲーム完全均衡の補足

下の図に表されたゲームを考える。プレイヤー A は A および A_1'，A_2'，A_3'，A_4' のいずれかで行動を選ぶ。つまり A は 2 度選択の機会がある。B の選択の機会は 1 度だけであり B_1，B_2 のいずれかで行動を選ぶ。ゲームを逆向きに考えて行くと A_1' において A は U を，A_2' においては V を，A_3'，A_4' においても V を選ぶ。それを前提にすると B は B_1 において X を，B_2 においては Y を選ぶ。さらにそれを前提にすると A においてプレイヤー A は Y を選ぶ。そのような選択が部分ゲーム完全均衡である。



結果として A は Y と V を選び，B は Y を選んで利得は $(6,4)$（左側が A の利得）が実現するが，部分ゲーム完全均衡を表すには各点における選択のすべてを記述しなければならない。このゲームでは各点から始まるゲームがすべて部分ゲームになっている。

次に下の図に表されたゲームを考える。上のゲームとの違いはプレイヤー B にとってプレイヤー A が X を選んだか Y を選んだかがわからないという点である。B_1，B_2 が点線で結ばれているのは二つの点を B が区別できないという意味であり，B_1 と B_2 からなる集合は B の情報集合と呼ばれる（二つの点を線で結ぶのではなく楕円で囲む書き方もある）。このゲームは，まず A と B が同時に X か Y を選び，その結果を見てから A が U か V を選ぶという構造になっている。

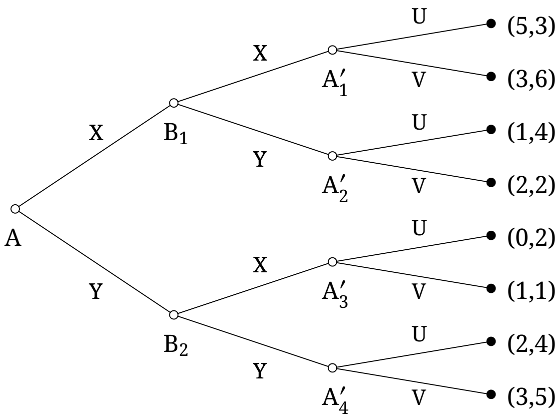


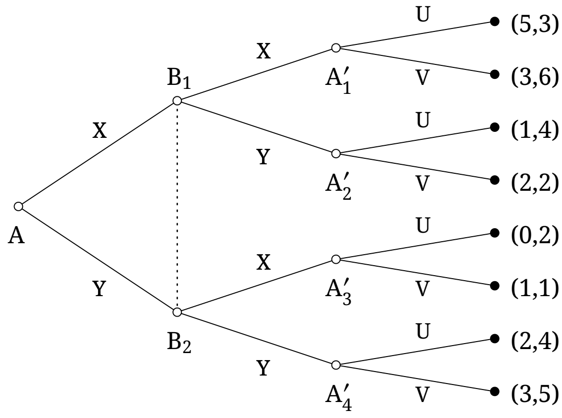
A'_1，A'_2，A'_3，A'_4 における A の意思決定は上のゲームと同じであり，それを前提にすると X と Y の選択は次の標準型ゲームで表される。

		B の戦略	
		X	Y
A の	X	5, 5	8, 2
戦略	Y	7, 3	6, 4

この標準型ゲームには純粋戦略によるナッシュ均衡はない。混合戦略によるナッシュ均衡はあり（A が $\frac{1}{4}$ の確率で，B が $\frac{1}{2}$ の確率でそれぞれ X を選ぶ戦略の組み合わせ），それが（A'_1，A'_2，A'_3，A'_4 における A の意思決定を含めて）このゲームの部分ゲーム完全均衡である。もちろん純粋戦略に限定すれば部分ゲーム完全均衡はない。このゲーム（図に表されたゲーム）では全体のゲームと A'_1，A'_2，A'_3，A'_4 の各点から始まるゲームが部分ゲームになっているが，B_1 または B_2 から始まる部分ゲームはない。

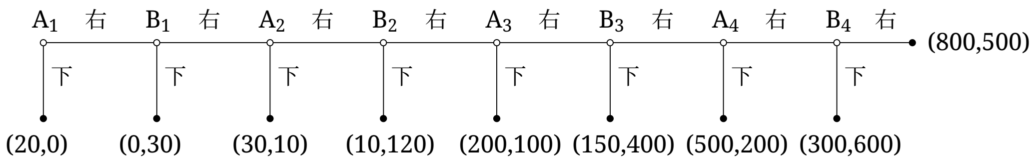
練習問題として次の二つのゲームを考えてみよう。





上のゲームではAもBもXを選ぶ戦略の組が（AによるUまたはVの選択と合わせて）部分ゲーム完全均衡になる。右側のゲームには二つの純粋戦略による部分ゲーム完全がある。確認してみていただきたい。

■ムカデゲーム　図のようなゲームを考えてみよう。



ムカデに似た図なのでムカデゲームと呼ばれる。ムカデの足はもっとたくさんあってもよい。プレイヤーAはA_1，A_2，A_3，A_4で，プレイヤーBはB_1，B_2，B_3，B_4で右か下かを選ぶ意思決定をする。右を選べば（B_4を除いて）ゲームは続き，下を選べばゲームは終わる。左側の数字がAの利得である。逆向きに考えると，まずB_4においてBは右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，それを前提にするとA_4においてAは右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，それを前提にするとB_3においてBは右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，...，というように考えて行くと，結局A_1においてAが下を選んでゲームは終わり，$(20, 0)$という利得が実現する。これがこのゲームの部分ゲーム完全均衡である。本当にそうなるだろうか？ AはA_1で右を選ぶと次にBが下を選ぶのではないかと思って下を選ぶ。一方BはB_1で右を選ぶと次にAが下を選ぶのではないかと思って下を選ぶ，ということになっている。しかしともに少し我慢すれば100を越える利得が得られるのである。実際には何回か右に動き，適当な所で下に降りるという結果になるのではないかと予想されるしそのような実験結果もあるようだが，通常のゲーム理論の論理だけではなく心理学的な要因や，次の最後通牒ゲームと同様に利他的な行動を含めて考える必要があるかもしれない。

■最後通牒（つうちょう）ゲームとその実験について　部分ゲーム完全均衡の応用として最後通牒ゲームというのを紹介しよう。二人のプレイヤー A と B が 1 万円のお金を分け合うことを考える。そのルールは以下のようなものである。

(1). A が 1 円単位で自分と相手の取り分を提案する。自分が x 円取ると提案したとしよう。
(2). それに対して B は受け入れるか拒否するかを回答する。受け入れれば B の取り分は $10000 - x$ 円であり，拒否すると二人とも 1 円ももらえない。そこでゲームは終わる。再提案はない。

動学的なゲームであるが図を描くまでもないだろう。A が提案した後の状況を考えると B は受け入れれば $10000 - x$ 円もらえ，拒否すれば 1 円ももらえないから $x < 10000$ ならば受け入れるのが最適であるが，$x = 10000$ のときには受け入れても拒否しても結果は 1 円ももらえないので受け入れも拒否もどちらも最適な行動である。このとき受け入れを選ぶものと考えよう。すると，それに対応して A は $x = 10000$，すなわち全部自分が取るという提案をするのが最適である。これが一つの部分ゲーム完全均衡である。一方，その提案に対して B が拒否を選ぶとすると A は $x = 9999$，すなわち B に 1 円あげるという提案をすればよい。これが二つ目の部分ゲーム完全均衡である。1 円単位ではなくお金をいくらでも細分化できるならば後者の部分ゲーム完全均衡においても限りなく $x = 10000$ に近づく。

最近はやりの実験経済学でこの最後通牒ゲームの実験が行われている。それによると以下のような事実が報告されている。

(1). プレイヤー B は自分の取り分があまりにも小さい（$10000 - x = 2000$ 程度以下の）提案は受け入れず A を道連れにしてともに 0 になることを選ぶ。
(2). プレイヤー A はそもそも相手にあまり不利な提案はせず，だいたい $x = 5000$ から $x = 7000$ くらいの提案をする。

これらの結果はゲーム理論が間違っていることを意味するのであろうか？ そんなことはない。そうではなくプレイヤーの利得（「効用」というべきかもしれない）が必ずしも自分の取り分だけでは決まらず，自分と相手との取り分の差にも依存するということを考えなければならないのである。上の 2 点について検討してみると。

(1). A の取り分と自分の取り分との差が大きいとプレイヤー B の利得が小さくなるのであまり x が大きい提案は受け入れない。これは人間が自分と比べて人の豊かさを羨む（あるいは妬む）という性質，つまり嫉妬心を持つということを意味すると考えられる。
(2). A にとっても同様に自分の取り分と B の取り分との差が大きいと利得が小さくなるのであまり x が大きい提案はしない。これは人間が必ずしも利己的に行動するばか

りではなく「公平性」や「平等」ということも意識しているということ，つまりより公平な提案をすることによって満足を得るということを意味すると考えられる。ただし，A の行動についてはあまり x が大きい提案は B によって拒否されるだろうという推測によるものであるという側面もあるかもしれない。

なお，このような場合に「人間は必ずしも合理的ではない」と言われることがあるが，それは違う。「利己的でない」ということと「合理的でない」ということとはまったく異なる。ゲーム理論で「合理的」とはプレイヤーが自らの利得を最大化するように行動（あるいは戦略）を選択するということであるが，上で述べたようにその利得が自らの取り分の大きさだけではなく相手との差にもよるとするならば，そのような利得を最大化することこそが「合理的」なのである。金儲け第一主義者にとっては金儲けを追求することが，他人のために尽くす人にとってはそうすることが「合理的」な行動なのである。

実験経済学の参考文献は，川越敏司「実験経済学」（東京大学出版会）。

さて，B が嫉妬心を持ち A が利他愛を持つようなケースをゲーム理論的に考えてみよう。それぞれの利得が次の式で表されるとする。

$$u_A = x_A - \frac{1}{12000}(x_A - x_B)^2$$
$$u_B = x_B - \frac{1}{2}(x_A - x_B)$$

u_A，u_B は各プレイヤーの利得，x_A，x_B はそれぞれの取り分であり $x_A \geq x_B$ を前提とする。各プレイヤーにとって互いの取り分の差が大きいほど利得は小さくなる。B が A の提案を受け入れれば $x_B = 10000 - x_A$ であるが，拒否すれば $x_A = x_B = 0$，したがって $u_A = u_B = 0$ である。A の提案を x として（$x \geq 5000$ とする）B がそれを受け入れたときの利得は $u_B = 10000 - x - \frac{1}{2}(2x - 10000) = 15000 - 2x$，拒否したときの利得は $u_B = 0$ であるから，$x \leq 7500$ のときは受け入れることが最適であり，$x > 7500$ のときには拒否するのが最適である。つまり B は自分の取り分が 2500 円以上でなければ受け入れない。$\frac{1}{2}$ を変えればこの数字も変わる。混合戦略を考えるのは面倒なので = のときは受け入れるものとしよう。それを前提にすると A の利得は

(1). B が提案を受け入れるときは $u_A = x - \frac{1}{12000}(2x - 10000)^2$ である。これは $x = 6500$ のとき最大値 5750 をとる。
(2). B が拒否するときは $u_A = 0$,

となる。したがって A の最適な戦略は $x = 6500$ を選ぶことであり，これは 7500 以下であるからその提案を B が受け入れるという戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる。$\frac{1}{12000}$ を変えれば x の値も変わる。

B が $x = 7500$ 以下の提案しか受け入れないというのが嫉妬心によるものであり，A が $x = 6500$ を提案するというのが利他愛によるものである。A が利他愛を持たない場合（$u_A = x_A$ のとき）は $x = 7500$ を提案する（$x = 7500$ のとき $u_A \approx 5417 > 0$ である）。

4.4 繰り返しゲーム

4.4.1 トリガー戦略

最初に見たゲーム1を繰り返すような動学的ゲームを考えてみる。もう1度利得表を書いてみよう。

		企業Bの戦略	
企業Aの戦略		高価格	低価格
	高価格	5, 5	1, 7
	低価格	7, 1	2, 2

このゲームを静学的なゲームと見た場合のナッシュ均衡は，ともに「低価格」を選ぶ戦略の組であった。このゲームを無限に繰り返すとすると毎回両者が協力して「高価格」を選ぶような戦略の組がナシュ均衡（あるいは部分ゲーム完全均衡）となる可能性がある。企業A，企業Bが次の戦略を選ぶとする。このような戦略はトリガー（引き金）戦略と呼ばれる[*11]。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。2回目以降は前回相手が「高価格」を選んでいれば「高価格」を，「低価格」を選んでいればそれ以降は永遠に「低価格」を選ぶ。

両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回5の利潤を得る。一方の企業から見て相手が「高価格」を選んでいる状況において1度「低価格」を選ぶと利潤7を実現できるが，それ以降は相手が「低価格」に転じるので自分も「低価格」を選ぶのが最適となり永遠にその状態が続くから利潤は毎回2となる。そこで問題になるのは相手を出し抜いて「低価格」を選んで実現される利益と，それ以降利潤2になってしまうことによる損失との比較である。もし企業が将来の利潤を割り引いて考えないのであれば「低価格」を選ぶことは絶対に利益にはならない。すなわちともに「高価格」を選ぶカルテル状態が実現できるが，企業が将来の利潤を割り引く場合は「低価格」を選ぶことが利益になる可能性がある。割引因子 (discount factor) を δ とすると「低価格」を選ぶことが

[*11] トリガー戦略以外にもナッシュ均衡となる戦略はあるが，トリガー戦略は最も単純でわかりやすいものである。協力せず常に低価格を選ぶという戦略もナッシュ均衡となる。相手が常に低価格を選ぶ限り自分がゲームのどこかで高価格を選んでも損をするだけである。

絶対に利益にならない条件は次の通りである[*12]。

$$5[1+\delta+\delta^2+\cdots] > 7+2[\delta+\delta^2+\cdots]$$

これより

$$\frac{5}{1-\delta} > 7+\frac{2\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta > 0.4$$

が求まる。したがって割引因子が 0.4 より大きければ（それ以上に割り引かなければ），ともに上記のトリガー戦略を選ぶことが均衡となり結果として「高価格」を選ぶ協力状態が永遠に続く。割引率 (discount rate) r を $\frac{1}{1+r}=\delta$ と定義するとこの条件は $r<\frac{3}{2}$ となる。つまり割引率が 150% より小さければともにトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となる。

4.4.2 より罰則の弱い均衡

トリガー戦略よりも罰則の弱い均衡をもたらす戦略もある。互いに次のような戦略を選ぶものとする。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。相手が「高価格」を選べば次の回では自分も「高価格」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「低価格」を選んだらその後 2 回は自分も「低価格」を選び，3 回目以降は（その 2 回のゲームでの相手の戦略に関わらず）再び「高価格」を選ぶ。以下同様。

両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回 5 の利潤を得る。相手が「高価格」を選んでいる状況において 1 度「低価格」を選ぶと利潤 7 を実現できるが，それ以降は 2 回だけ相手が「低価格」に転じるのでその間は自分も「低価格」を選ぶのが最適となる。3 回目には相手が「高価格」に転じるがそのとき自分がどうすべきかはそこまでの「低価格」を選ぶ 3 回のゲームでの利得による。それが 3 回とも「高価格」を選んで協力するときの利得よりも大きければ「低価格」を続けるのが最適であり，その場合は相手が「高」「低」「低」を繰り返し，自分は「低」を選び続ける。一方，逆に「高価

*12 等比数列の和の公式によれば

$$5[1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n-1}] > 7+2[\delta+\delta^2+\cdots\delta^{n-1}]$$

が成り立つ条件は

$$\frac{5(1-\delta^n)}{1-\delta} > 7+\frac{2\delta(1-\delta^{n-1})}{1-\delta}$$

である。$n\to\infty$（n が限りなく大きくなる）とすると $\delta^n\to 0$，$\delta^{n-1}\to 0$ なので本文の式が得られる。

格」を選んで協力するときの利得の方が大きければそもそもこのような裏切りをしないことが最適となり，ともに「高価格」を選ぶ協力関係が実現する。そのようになる条件を求める。3 回のゲームで相手が「高」「低」「低」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$7 + 2\delta + 2\delta^2 \tag{4.5}$$

であり，互いに「高」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$5(1 + \delta + \delta^2) \tag{4.6}$$

である。(4.6) が (4.5) より大きくなる条件は $3\delta + 3\delta^2 > 2$ であり，この式から

$$\delta > 0.46$$

が得られる。これはトリガー戦略の場合の $\delta > 0.4$ よりも厳しい条件となっている。ここの戦略では裏切りに対する罰則が弱くなっているので協力が実現しにくくなるのである。

4.4.3　さらに罰則の弱い均衡

しつこいがさらに罰則の弱い均衡をもたらす戦略を考えてみよう。互いに次のような戦略を選ぶものとする。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。相手が「高価格」を選べば次の回では自分も「高価格」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「低価格」を選んだらその後 1 回だけ自分も「低価格」を選び，2 回目以降は再び「高価格」を選ぶ。以下同様。

やはり両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回 5 の利潤を得る。相手が「高価格」を選んでいる状況において 1 度「低価格」を選ぶと利潤 7 を実現できるが，それ以後は 1 回だけ相手が「低価格」に転じるのでその時は自分も「低価格」を選ぶのが最適となる。2 回目には相手が「高価格」に転じるがそのとき自分がどうすべきかはそこまでの「低価格」を選ぶ 2 回のゲームでの利得による。それが 2 回とも「高価格」を選んで協力するときの利得よりも大きければ「低価格」を続けるのが最適であり，その場合は相手が「高」「低」を繰り返し，自分は「低」を選び続ける。一方，逆に「高価格」を選んで協力するときの利得の方が大きければそもそもこのような裏切りをしないことが最適となり，ともに「高価格」を選ぶ協力関係が実現する。2 回のゲームで相手が「高」「低」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$7 + 2\delta \tag{4.7}$$

であり，互いに「高」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$5(1 + \delta) \tag{4.8}$$

である。(4.8) が (4.7) より大きくなる条件は $3\delta > 2$ であり，この式から

$$\delta > \frac{2}{3}$$

が得られる。これは 2 回罰する時の $\delta > 0.46$ よりも厳しい条件となっている。ここの戦略では裏切りに対する罰則がさらに弱くなっているので一層協力が実現しにくくなるのである。

なお繰り返しの回数が無限ではない（有限回）とすると，常に低価格を選ぶ戦略のみが部分ゲーム完全均衡となる。なぜならば，最後のゲームではともに低価格を選ぶことがわかるのでその前のゲームで高価格を選んでも得られるものがなく低価格を選ぶ。その前のゲームでも高価格を選んでも得られるものがないので低価格を選ぶ。というように考えていくと，結局すべての段階でともに低価格を選ぶことになるからである。しかし戦略が 3 つ以上あると少し話が異なる。

4.5 繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡としっぺ返し戦略

4.5.1 トリガー戦略などが部分ゲーム完全均衡になることの確認

囚人のジレンマタイプのゲームを繰り返すことを考える*13。

4.5.2 トリガー戦略

上の説明ではトリガー戦略などがナッシュ均衡になる，詳しく言えば二人のプレイヤーが互いにトリガー戦略を選ぶ組み合わせがナッシュ均衡になることの説明にしかなっていなかった。すなわち

> ともにトリガー戦略を選ぶと結果として永久にお互いに協力（高価格）を選ぶ状態が続く。どこかで一方が裏切って低価格を選んだとすると最初は 7 の利得が得られるがその次からは互いに低価格を選ぶ状態が続き各回の利得は 2 になる。割引因子が 0.4 より大きければ，裏切ることはそのプレイヤーにとって損である。

これは相手がトリガー戦略が選んでいるならば自分も（途中で裏切ったりせず）トリガー戦略を選ぶことが最適であるという意味で，ナッシュ均衡になる説明である。

部分ゲーム完全均衡であるためには次のことが必要である。

> **互いにトリガー戦略を選び協力が続いていたが，ある時点でどちらかが何かの間違いで低価格を選んだときに，それ以降も互いにトリガー戦略を続けることが最適である。**

---

*13 以下の部分は「中級ミクロ経済学」の授業で配ったプリントの内容を後から組み込んだものである。完全に融合せずつぎはぎ感が出ていると思う。それも味わっていただきたい。

つまり，どこかの時点で裏切りが生じたときに，その次の回以降のゲームにおいてともにトリガー戦略を選ぶ組み合わせがナッシュ均衡になっていなければばならない。

さて，プレイヤー B（企業 B）がどこかで何かの間違いで低価格を選んだとする。すると，トリガー戦略に従えばプレイヤー A（企業 A）はそれ以降低価格を選ぶ。B もそれを知っているからやはり低価格を選び，B が裏切った回以降のゲームでは毎回両者が低価格を選ぶことになる。相手が常に低価格を選んでいる限り自分も低価格を選ぶことが最適であるからそれ自体はナッシュ均衡である。したがってトリガー戦略は部分ゲーム完全均衡になる。この議論において最初に B が裏切ったときの B の利得は関係ない。その後が問題である。

4.5.3　さらに罰則の弱い戦略

さらに罰則の弱い戦略とは以下のような戦略であった。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。 2 回目以降は前回に相手が裏切ったときに 1 回だけ低価格で報復し 2 回目からは高価格に戻す。

これが部分ゲーム完全均衡になることを確認する。本文の説明はこの戦略同士がナッシュ均衡になるという説明であった。部分ゲーム完全均衡であるためには，先に裏切ることが得にならないというだけではなく上の議論と同様に（何かの間違いで）裏切りが生じたとしてもこの戦略に従うことが最適でなければならない。

プレイヤー B がどこかで何かの間違いで低価格を選んだとする。すると，この戦略に従えばプレイヤー A はその次の回で低価格を選ぶが 2 回目は高価格に戻す。B もそれを知っているからやはり 1 回目は低価格を選ぶ。B が 1 回目にどちらを選ぶかは 2 回目以降の A の戦略に影響しない（これが次のしっぺ返しと異なる点である）。2 回目以降のゲームを考えると互いにこの戦略に従う限りそこから永久に協力（互いに高価格）が続く。そうなるかどうかは結局そもそもこの戦略がナッシュ均衡となるかどうかということと同じ議論である。したがって割引率が $\frac{2}{3}$ より大きければ両者がこの戦略を選ぶ組み合わせは部分ゲーム完全均衡である。

2 回だけ報復するという戦略についても同様の議論が成り立つ。この場合一方が何かの間違いで低価格を選んだときに 2 回だけともに低価格という状態が続き，3 回目からは高価格に戻る。その 3 回目以降のゲームでも 2 回だけ報復するという戦略がナッシュ均衡になれば全体のゲームの部分ゲーム完全均衡になる。

4.5.4　しっぺ返し戦略 (Tit for tat strategy)

繰り返しゲームではしっぺ返し戦略という戦略がよくとり上げられる。これは次のような戦略である。

> 最初に協力（高価格）を選ぶ。それ以降は前回に相手が選んだ戦略と同じ戦略を選ぶ。

相手が裏切れば裏切り返すが，協力に戻せば次は自分も協力する。

■（割引因子が大きければ）しっぺ返し戦略はナッシュ均衡である。　互いにしっぺ返し戦略を選ぶ組み合わせがナッシュ均衡になることを確認しよう。両者がしっぺ返し戦略を選ぶと高価格による協力が続く。プレイヤー A が途中で裏切って低価格を選んだとして，B がしっぺ返し戦略に従うときに A の裏切りが損になる条件を考える。裏切ったその回において A は 7 の利得を得る。その後は二通りの結果が想定される。一つは A と B が交互に高価格と低価格を選ぶ場合。もう一つは A がそれ以降常に低価格を選び B もしっぺ返し戦略に従って常に低価格を選ぶ場合である。割引因子を δ とすると，前者の場合の裏切った回を含めた A の利得は

$$7+\delta+7\delta^2+\delta^3+7\delta^4+\cdots=\frac{7}{1-\delta^2}+\frac{\delta}{1-\delta^2}=\frac{7+\delta}{1-\delta^2} \tag{4.9}$$

であり，後者の場合の裏切った回を含めた A の利得は

$$7+2\delta+2\delta^2+\cdots=7+\frac{2\delta}{1-\delta}=\frac{7-5\delta}{1-\delta} \tag{4.10}$$

である。一方協力を続けたときの利得は

$$\frac{5}{1-\delta} \tag{4.11}$$

に等しい。(4.11) が (4.9) より大きいための条件は

$$\delta>\frac{1}{2}$$

であり，(4.11) が (4.10) より大きいための条件は

$$\delta>\frac{2}{5}$$

である。したがって $\delta>\frac{1}{2}$ のときしっぺ返し戦略（互いにしっぺ返し戦略を選ぶ組み合わせ）はナッシュ均衡となる。ちなみに $\delta>\frac{1}{5}$ であれば (4.9) が (4.10) より大きい。

$\delta=\frac{1}{2}$ のときもしっぺ返し戦略であってもそうでなくてもよいという弱い意味ではあるがナッシュ均衡になる。

■しっぺ返し戦略は（特殊な場合を除いて）部分ゲーム完全均衡ではない。　しっぺ返し戦略は割引因子がある程度大きければ（割引率がある程度小さければ）ナッシュ均衡であるが（特殊な場合を除いて）部分ゲーム完全均衡にはならない。そのことを確認してみよう。例えばプレイヤー A が，ある時点で何かの間違いで裏切り（低価格）を選んでしまったとする。そのとき両者がしっぺ返し戦略に従うとするとプレイヤー A の利得は A が裏

切って以降（A が裏切った回は含まない），1，7，1，7，1，... となり，プレイヤー B の利得は，7，1，7，1，7，... となる。前者の合計は

$$1 + 7\delta + \delta^2 + 7\delta^3 + \cdots = 1 + \frac{7\delta}{1-\delta^2} + \frac{\delta^2}{1-\delta^2} = 1 + \frac{7\delta + \delta^2}{1-\delta^2} \tag{4.12}$$

後者の合計は

$$7 + \delta + 7\delta^2 + \delta^3 + \cdots = \frac{7+\delta}{1-\delta^2} \tag{4.13}$$

である。もしプレイヤー A がしっぺ返し戦略に従わずその後常に高価格を選び続け，B がしっぺ返し戦略を続けるならば（そのとき B は最初に低価格を選び以後は高価格を選ぶ）A の利得は

$$1 + 5\delta + 5\delta^2 + \cdots = 1 + \frac{5\delta}{1-\delta} = 1 + \frac{5\delta + 5\delta^2}{1-\delta^2} \tag{4.14}$$

となり，一方プレイヤー B がしっぺ返し戦略に従わず常に高価格を選び続け，A がしっぺ返し戦略を続けるならば（そのとき A も毎回高価格を選ぶ）B の利得は

$$5 + 5\delta + 5\delta^2 + \cdots = \frac{5}{1-\delta} = \frac{5+5\delta}{1-\delta^2} \tag{4.15}$$

となる。しっぺ返し戦略が部分ゲーム完全均衡となるためにはナッシュ均衡の条件に加えて (4.12) が (4.14) より大きく（少なくとも等しく），(4.13) が (4.15) より大きく（少なくとも等しく）なければならない。前者，後者の条件はともに

$$\delta \leq \frac{1}{2}$$

である。したがって上のナッシュ均衡の議論と合わせると $\delta = \frac{1}{2}$ のときにのみ，互いにしっぺ返し戦略を選ぶ組み合わせは弱い意味で部分ゲーム完全均衡である。

4.5.5　一般的な囚人のジレンマとしっぺ返し戦略

一般的な囚人のジレンマとは次のようなゲームである。

		B	
		X	Y
A	X	a, a	b, c
	Y	c, b	d, d

ただし $c > a > d > b$，$b + c < 2a$ が成り立つ。本文の例がこの条件を満たすことを確認していただきたい。上の (4.9)，(4.10)，(4.11) はそれぞれ

$$\frac{c + b\delta}{1-\delta^2},\ \frac{c - (c-d)\delta}{1-\delta},\ \frac{a}{1-\delta}$$

となるから，しっぺ返し戦略がナッシュ均衡となる条件は

$$\delta \geq \frac{c-a}{a-b},\ \text{かつ}\ \delta \geq \frac{c-a}{c-d} \tag{4.16}$$

である。一方 (4.12)，(4.13) はそれぞれ

$$b + \frac{c\delta + b\delta^2}{1-\delta^2},\ \frac{c + b\delta}{1-\delta^2}$$

となり，(4.14)，(4.15) はそれぞれ

$$b + \frac{a\delta + a\delta^2}{1-\delta^2},\ \frac{a + a\delta}{1-\delta^2}$$

となるから，しっぺ返し戦略が部分ゲーム完全均衡となるためには (4.16) に加えて

$$\delta \leq \frac{c-a}{a-b}, \tag{4.17}$$

が成り立たなければならない。(4.16)，(4.17) を合わせると

$$\delta = \frac{c-a}{a-b}$$

となり，この条件が成り立つときにのみしっぺ返し戦略は部分ゲーム完全均衡である。しかし，$c-d < a-b$ のときには $\frac{c-a}{c-d} > \frac{c-a}{a-b}$ となり $\delta \geq \frac{c-a}{c-d}$ と $\delta \leq \frac{c-a}{a-b}$ が両立しないので，しっぺ返し戦略は部分ゲーム完全均衡にはならない。本文の例では $b=0$，$d=3$ とするとしっぺ返し戦略は部分ゲーム完全均衡ではなくなる。

4.5.6　一般的な囚人のジレンマでのトリガー戦略

上の一般的な囚人のジレンマゲームにおいてトリガー戦略が均衡となる条件は

$$\frac{a}{1-\delta} > c + \frac{d\delta}{1-\delta}$$

となり

$$\delta > \frac{c-a}{c-d}$$

が得られる。これを覚えておけば囚人のジレンマタイプである限りどのようなゲームにも応用できる。これはしっぺ返し戦略が均衡になるための条件の一方と同じである。

■有限回繰り返しゲーム　囚人のジレンマのようにナッシュ均衡が 1 つしかなければ有限回の繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡は毎回ナッシュ均衡に対応した戦略を選ぶことだけであり，協力を維持することはできない。なぜならば最後の回では協力しても意味がないのでナッシュ均衡が実現する。それがわかればその前の回もナッシュ均衡になる。というように逆向きに考えていくと最初からナッシュ均衡だけしか実現しない。しかしナッシュ均衡が 2 つあるゲームでは有限回の繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡において協力が実現する可能性がある。以下のゲームを n 回繰り返すことを考えよう。

Bの戦略

		X	Y	Z
A 戦	X	4, 4	0, 5	0, 0
の 略	Y	5, 0	2, 2	0, 0
	Z	0, 0	0, 0	0, 0

戦略 Z がなければ通常の囚人のジレンマゲームである。このゲームのナッシュ均衡は (Y, Y)，(Z, Z) の 2 つある。そこで繰り返しゲームにおける次のような戦略を考えよう。

> 最後の回は Y，それ以外は X。もし相手がこの戦略から逸脱したら次の回以降は Z を選ぶ。

n 回の繰り返しゲームにおいて m 回目（$m \leqq N-1$）にこの戦略から逸脱するとして得られる利得は（割引は考えない）

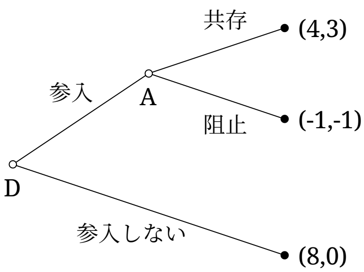
$$4(m-1)+5+(n-m)\times 0=4m+1$$

逸脱しない場合は

$$4(n-1)+2=4n-2$$

である。$m \leqq n-1$ であるから逸脱しない場合の利得の方が大きい。このように複数のナッシュ均衡があれば悪い方のナッシュ均衡を成す戦略を罰則として用いることによって有限回の繰り返しゲームで（最後の回を除いて）協力を実現できる可能性がある。

■チェーンストアパラドックス　部分ゲーム完全均衡の概念が必ずしも常識と一致しない例としてチェーンストアパラドックスというものがある。ある店 (A とする) が 3 つの地域で独占的に販売しているところに各地域で 1 つ 1 つ（B，C，D）の店が参入するかどうかを考えている状況を取り上げる。まず A と D のゲームを考える。



図において A は A 店が，D は D 店が意思決定する時点を表す。まず D が参入するかしないかを決め，それを見て A が受け入れて共存するか，参入を阻止すべく赤字覚悟で商品の値下げをするかを決める。数字は左側が A の右側が D の利潤である。D が参入しなけれ

ば A は大きな利潤を得られる。参入して共存すればそこそこの利潤，A が参入を阻止する行動に出ればともに赤字になる。このゲームにおいて部分ゲーム完全均衡を考えると D が参入したときに A は共存を選んだ方が得なのでそれを選ぶ。そのことがわかれば D は参入した方が得になるから参入する，ということになる。D 以外の店もすべて同じ状況におかれており，B，C，D の順にこのゲームをプレイすると考えると，まず最後のゲームで D が参入し，A は共存を選ぶ。それを前提に C のゲームを考えるとやはり C が参入し，A は共存を選ぶ。同じようにして B が参入し，A は共存を選ぶ。というようにすべての地域において参入と共存が実現するのが部分ゲーム完全均衡である。この結論は地域がいくつあっても成り立つ。しかし，現実には A が B とのゲームにおいて赤字覚悟で参入阻止行動を選ぶことによって後に続く C，D の参入を思いとどまらせようとすることがあると思われるし，その方が常識に叶っているかもしれない。このように部分完全均衡が意味する合理性が日常的な常識とは異なる場合もある。

この状況を説明するのに，参入した後の各店の利潤が確実ではなく，かつその情報を既存店の方が多く持っているというように不完備情報のゲームとして解釈する考え方もある。

4.6 経済学以外の例–アメリカ，ロシアの核戦略

プレイヤー アメリカ，ロシア

戦略，行動 核兵器を持つか，持たないか

(1). 静学的なゲーム 1

アメリカとロシアが同時に戦略（行動）を選ぶ

アメリカの戦略

		持つ	持たない
ロシアの戦略	持つ	-10, -10	15, -15
	持たない	-15, 15	10, 10

数字は左側がロシアの利得，右側がアメリカの利得，ここで利得とは国民が得る経済的利益や精神的満足感などを合わせたもの。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

持つを選ぶと利得は -10，持たないを選ぶと利得は -15。

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，持つ）。

(2). 静学的なゲーム 2

ロシアの戦略 ＼ アメリカの戦略	持つ	持たない
持つ	-10, -10	5, -15
持たない	-15, 5	10, 10

相手が核兵器を持たないときに自分が持つ方がよいのか持たない方がよいのかが上のゲームと異なる。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適
持つを選ぶと利得は 5，持たないを選ぶと利得は 10。

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，持つ），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，持たない）の 2 つ。

このゲームは先に見た企業が製品の規格を選ぶゲームと似ているが，そのゲームとは違って 2 つのナッシュ均衡の一方がアメリカに，一方がロシアに有利なものにはなっておらず，（持たない，持たない）が両者にとってより望ましい均衡である。したがって協調してともに「持たない」を選ぶように促す仕組みがあればその均衡が実現できるかもしれないので**協調ゲーム** (coordination game) と呼ばれる。互いに協力はできないので「協力ゲーム」ではなくあくまでも「非協力ゲーム」である。

次の動学的なゲームはこの（持たない，持たない）という均衡を実現する 1 つの仕組みになるかもしれない。

なおこのゲームには混合戦略による均衡があるかもしれない（演習問題とする）。

(3). 動学的なゲーム

静学的なゲーム 2 において先にロシアが行動を選び，それを見てからアメリカが行動を選ぶ。逆でもよい。

(i) ロシアの戦略は

[1] 持つ

[2] 持たない

の 2 通り。

(ii) アメリカの戦略は

[1] もも：ロシアが持てば持つ，持たなければ持つ。

[2] もな：ロシアが持てば持つ，持たなければ持たない。

[3] なも：ロシアが持てば持たない，持たなければ持つ。

[4] なな：ロシアが持てば持たない，持たなければ持たない。

■標準型ゲームで表す　標準型ゲームとは戦略の組み合わせとそれに対する利得の組み合わせで表現するもの。

アメリカの戦略

ロの		もも	もな	なも	なな
シ戦	持つ	-10,-10	-10,-10	5,-15	5,-15
ア略	持たない	-15,5	10,10	-15,5	10,10

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 →「もも」または「もな」を選ぶのが最適

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 →「もな」または「なな」を選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが「もも」を選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

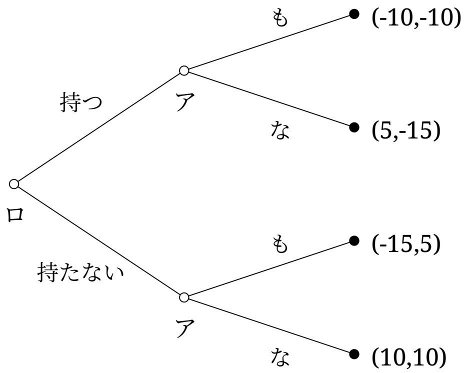
[2] アメリカが「もな」を選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

[3] アメリカが「なも」を選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[4] アメリカが「なな」を選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

■部分ゲーム完全均衡　ナッシュ均衡はここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，もも），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，なな），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，もな）の 3 つ。
しかし（持つ，もも）はロシアが持たないを選んだときにアメリカが持つを選ぶという前提に立っており不合理。これは信用できない脅しである。また（持たない，なな）はロシアが持つを選んだときにアメリカが持たないを選ぶという前提に立っており不合理。合理的なのは（持たない，もな）。
別の方法で確認する。

■展開型ゲームで表す　展開型ゲームとは行動選択の順序を含めて図などを使って表現するもの。



ゲームを後ろから解く。上の「ア」でアメリカは持つを選ぶのが合理的で，下の「ア」では持たないを選ぶのが合理的。そのようなアメリカの行動選択を見越すとロシアは「持たない」を選ぶ。したがって（持たない，もな）が均衡。上下の「ア」から先を 1 つ 1 つのゲーム（部分ゲーム）と見るとそれぞれのゲームで均衡（アメリカが最適な戦略を選ぶよう）になっているのは（持たない，もな）のみ。これが部分ゲーム完全均衡である。
なお静学的ゲーム 1 を動学的なゲームにしても，ともに核兵器を持つのが均衡であることは変わらない。

(4). チキンゲーム
静学的ゲーム 1 に戻って少し設定を変える。利得が次のようであるとする。

アメリカの戦略

ロシアの戦略		持つ	持たない
	持つ	-20, -20	15, -15
	持たない	-15, 15	10, 10

ともに核兵器を持つと戦争の危険性が高まり利得が –20 になる。相手が持たないときに持った方が有利でることは変わらない。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適
持つを選ぶと利得は –20，持たないを選ぶと利得は –15。

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，持たない)，（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，持つ）の 2 つ。静学的ゲーム 2 と同様に均衡は 2 つあるが「持つ」を選んだ方が有利であるという点が異なる。これを行動を順に選ぶ動学的なゲームにすれば先に選ぶ方が「持つ」を選ぶ均衡が部分ゲーム完全均衡となるのは明らかである。

このタイプのゲームは「チキン（弱虫）ゲーム」と呼ばれる*[14]。本来のチキンゲームは次のようなものである。

> 2 人の人が乗った車が崖に向かって走っている。一方が先に逃げればその時点で車は止まり，逃げた方が負け（利得 –15），残った方が勝ちとなる（利得は 15)。どちらも逃げなければ車は崖から落ちて 2 人とも大ケガをする（利得 –20)。たまたま同時に逃げれば引き分けで利得は 10。

「核兵器を持つ」を「逃げない」,「核兵器を持たない」を「逃げる」と変えればゲームの構造はまったく同じである。

このゲームも企業が規格を選ぶゲームに類似したゲームである。ただし互いに異なる規格を選ぶことがナッシュ均衡になる。経済の例としては，2 つの企業がある財の旧製品を売るか新製品を売るかを選択する次のようなゲームが考えられる。

*[14] 英語ではチキン (chicken) という言葉が弱虫を意味するらしい。

企業Ｂの戦略

		新製品	旧製品
企業Ａの戦略	新製品	-20, -20	15, -15
	旧製品	-15, 15	10, 10

互いに新製品を売れば市場を分け合うので開発費をかけた割には売れずに利潤はともに –20。ともに旧製品を売れば消費者はそれしかないからそこそこ売れ，費用はあまりかからないのでともに利潤は 10。一方が新製品，他方が旧製品を売れば新製品を売る企業はたくさん売れるので開発費用を回収してなお利潤は 15，旧製品を売る企業はまったく売れずに利潤は –15 となる。

ナッシュ均衡は（企業Ａ，企業Ｂ）＝（新製品，旧製品）と（企業Ａ，企業Ｂ）＝（旧製品，新製品）である。

チキンゲームには混合戦略による均衡があるかもしれない（演習問題とする）。

4.7　ゼロ・サムゲーム

ゼロ・サムゲームとはプレイヤーの利得の和が常にゼロに等しいようなゲームで通常は 2 人ゲームである。ゲーム理論における利得に定数を足したり引いたり，（正の）定数をかけても同じ構造のゲームになるので利得の和が常に一定であるようなゲームもゼロ・サムゲームである。次の左の例を考えてみよう。

Ｂの戦略

		X	Y
Ａの戦略	X	1, –1	2, –2
	Y	0, 0	–1, 1

Ｂの戦略

		X	Y
Ａの戦略	X	1	2
	Y	0	–1

B の利得は常に A の利得のマイナスなので A の利得だけで右のように表すこともできる。このゲームでナッシュ均衡を求めることができるがゼロ・サムゲームでは別のアプローチもある。しかし，それらは同じ結果をもたらす。

A がある戦略を選んでいるとして，B が A の利得を最も小さくするようにその戦略を選ぶと考える。A が X を選んだときは B が X を選ぶと最悪の結果 1 になり，A が Y を選んだときは B が Y を選ぶと最悪の結果 –1 になる。最悪の結果をなるべく良くしようとすれば A は X を選んだ方がよい。最悪（あるいは最小 min）を最良（あるいは最大 max）にしようとするので**マキシ・ミン戦略**と言う。一方 B がある戦略を選んでいるとして，A が B の利得を最も小さくするようにその戦略を選ぶと考える。ゼロ・サムゲームでは B の利得を小さくするということは A の利得を大きくすることを意味する。B が X を選んだときは A が X を選ぶと B にとって最悪で A にとって最良の結果 1 になり，B が Y を選んだときは A が X を選ぶと B にとって最悪で A にとって最良の結果 2 になる。B にとって最悪の結果をなるべく良くしようとすれば，A にとって最良の結果をなるべく悪くしようとすること

になり，B は X を選んだ方がよい。A の利得を基準にすると最良（あるいは最大 max）を最悪（あるいは最小 min）にしようとするので**ミニ・マックス戦略**と言う。このとき A，B がそれぞれマキシ・ミン戦略 X，ミニ・マックス戦略 X を選んだときの結果はともに 1 である。これをこの**ゲームの値** (value of the game) と呼ぶ。さらに，A が X，B が X を選ぶという戦略の組はこのゲームのナッシュ均衡になっていることを確認していただきたい。

別の例を考えてみよう。

		Bの戦略	
		X	Y
Aの戦略	X	0, 0	1, −1
	Y	2, −2	0, 0

		Bの戦略	
		X	Y
Aの戦略	X	0	1
	Y	2	0

このゲームについてマキシ・ミン戦略とミニ・マックス戦略を調べる。A が X を選んだときは B が X を選ぶと最悪の結果 0 になり，A が Y を選んだときは B が Y を選ぶと最悪の結果 0 になる。このとき A はどちらを選んでもよいから X も Y もマキシ・ミン戦略である。B が X を選んだときは A が Y を選ぶと A にとって最良の結果 2 になり，B が Y を選んだときは A が X を選ぶと A にとって最良の結果 1 になる。A にとって最良の結果をなるべく悪くしようとすると B は Y を選んだ方がよい。A がマキシ・ミン戦略を選んだときの結果が 0 であるのに対して，B がミニ・マックス戦略 Y を選んだときの結果は 1 であって両者は一致しない。この場合は 0 も 1 もゲームの値ではない。また，A が X，B が Y，または A が Y，B が Y を選ぶという戦略の組はナッシュ均衡にはなっていない。このゲームには純粋戦略によるナッシュ均衡はない。あればそのときの結果がゲームの値になる。

そこで混合戦略を考えてみよう。A が X の確率 p，Y の確率 $1-p$ である混合戦略を選び，B が X の確率 q，Y の確率 $1-q$ である混合戦略を選んだとすると A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = p(1-q) + 2(1-p)q = p + 2q - 3pq = -\frac{1}{3}(3p-2)(3q-1) + \frac{2}{3}$$

$$\pi_B = -\pi_A = \frac{1}{3}(3p-2)(3q-1) - \frac{2}{3}$$

となる。A は $p = \frac{2}{3}$ とすることによって q の値に関わらず $\frac{2}{3}$ の利得を確保できる。この $p = \frac{2}{3}$ がマキシ・ミン戦略である。また，B は $q = \frac{1}{3}$ とすることによって p の値に関わらず $-\frac{2}{3}$ の利得を確保できる。A の利得として表すと $\frac{2}{3}$ である。この $q = \frac{1}{3}$ がミニ・マックス戦略でありゲームの値は $\frac{2}{3}$ となる。

このゲームについてナッシュ均衡を求める形に π_A，π_B を書き直してみると

$$\pi_A = p + 2q - 3pq = p(1-3q) + 2q$$

$$\pi_B = -p - 2q + 3pq = q(3p-2) - p$$

が得られる。これらの式からマキシ・ミン戦略とミニ・マックス戦略である $p = \frac{1}{3}$，$q = \frac{2}{3}$ の組み合わせがナッシュ均衡であることがわかる。

　このように混合戦略を考えることによって，どのようなゼロ・サムゲームにおいてもマキシ・ミン戦略を選んだときの結果とミニ・マックス戦略を選んだときの結果が一致してゲームの値が決まるとともに，それらの戦略の組がナッシュ均衡となることを示すことができる。

4.8　不完備情報ゲームと完全ベイジアン均衡

4.8.1　不完備情報ゲーム

　ここまで考えてきたゲームでは，各プレイヤーはゲームの構造だけでなく相手がどのようなプレイヤーであるか，すなわち相手の利得がどのようになっているかが分かっていると仮定していた。しかし，相手がどのようなプレイヤーであるかがよく分かっていない，つまり情報が十分ではない状況で行動しなければならないゲームもあるであろう。そのような，相手がいかなるタイプのプレイヤーであるかについての情報が十分ではないゲームは**不完備情報ゲーム** (incomplete information game) または，このようなゲームではプレイヤーのもっている情報が対称的ではないので**非対称情報ゲーム** (asymmetric information game) と呼ばれる[*15]。具体的に次のゲームを考えてみよう。

ゲーム 5　ある産業で活動する企業 A と企業 B がある。企業 B は企業 A と同種の製品を作って戦いを挑むか，それとも異なる製品を作って正面からの対決を避けるかを選ばなければならない。企業 A について**強いタイプ（タイプ S）**と**弱いタイプ（タイプ W）**の 2 つの可能性があると仮定する。企業 A 自身は自分がどちらのタイプであるかがわかっているが，企業 B にはわからないものとする。企業 A がどちらのタイプであるかによってそれぞれの企業がある戦略を選んだときに得られる利得も異なっている。ここで，企業 B が戦略を選ぶ前に企業 A はある種の投資を行う必要がある。その投資には X，Y の 2 種類（投資 X と投資 Y と呼ぶ）があり，企業 A がタイプ S であるかタイプ W であるかによってその投資にかかるコストが異なる。たとえばタイプ S の場合は独自のアイデアが豊富で個性的な広告を作るのが得意であるのに対して，タイプ W の場合は他社の広告とよく似た広告を出すのが得意であるというように。企業 A がどちらの投資をするかは，投資そのものにかかる費用によって企業 A の利得に影響するが，企業 A と B とのゲームの結果には影響を与えない。したがって企業 A がどちらの投資を選ぶかは企業 B の利得には関係しないものと仮定する。

ゲームが始まる前に企業 B は，企業 A がどちらのタイプであるかについて何らかの情報

[*15] 情報が対称的でないとは，一方のプレイヤーが知っていることを他方のプレイヤーが知らないことを言う。

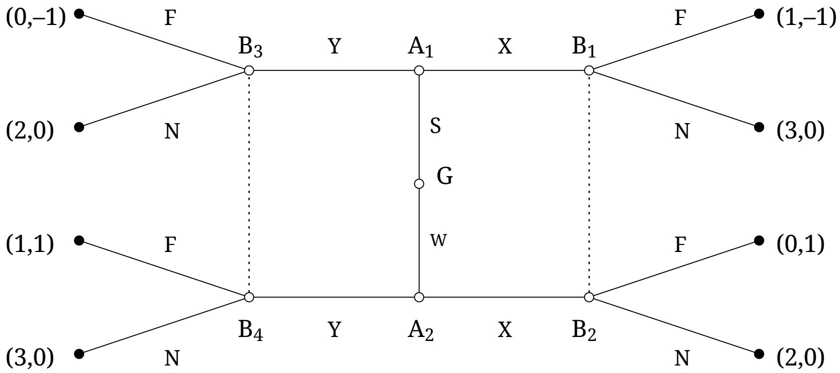


図 4.2　ゲーム 5–不完備情報ゲーム

にもとづいてある確率的な推測を抱いているものする[*16]。具体的に

ゲーム開始前の企業 B の推測　企業 B は，企業 A が確率 2/3 でタイプ S であり，確率 1/3 でタイプ W であるという推測を抱いてる。

と仮定する。一般的には

ゲーム開始前の企業 B の推測（一般的な表現）　企業 B は，企業 A が確率 p でタイプ S であり，確率 $1-p$ でタイプ W であるという推測を抱いてる。

と表現される。この確率は推測の強さを示すものと考えることができる。

このような不完備情報のゲームにおいては，企業 A，B の他に企業 A のタイプを選ぶ，またそれだけの役割を担った第 3 のプレイヤーを考え，それを**自然** (Nature) と名付ける。ゲーム 5 を展開型ゲームで表すと図 4.2 のようになる。点 G は自然が企業 A のタイプを選ぶ点を表す。F は企業 B が A に戦いを挑む (Fight) ということを，N は戦いを避ける (Not fight) ことを意味している。企業 A がタイプ S の場合ゲームは A_1 から出発し，そこで企業 A が投資 X か Y を選び，その結果を見て企業 B が戦いを挑むか避けるかを決める。企業 A が投資 X を選んだ場合ゲームは右に進んで点 B_1 に達し，投資 Y を選んだ場合は左に進んで点 B_3 に達する。企業 A がタイプ W の場合にはゲームは A_2 から出発して企業 A が選ぶ投資に応じて同じように点 B_2 または B_4 へ進む。図の点 B_1 と B_2 とが点線で結ばれているのは，企業 B がこの 2 つの点を区別できないことを意味している。つまり企業 B は企業 A が X を選んだか Y を選んだかはわかるがタイプ S かタイプ W かはわからないの

[*16] ここで言う推測は英語文献では belief という言葉が使われており，『信念』と訳す方がよいのかもしれないが，日本語で信念という言葉が表すほど強い意味ではないので推測と呼ぶことにする。R. ギボンズ（福岡正夫他訳）では信念と訳されている。

で，ゲームが B_1 か B_2 のどちらかに到達していることはわかってもそのいずれであるかはわからない。同様に点 B_3 と B_4 とが点線で結ばれているのも企業 B がこの 2 つの点を区別できないことを意味している。点 B_1 と B_2 からなる集合，および点 B_3 と B_4 からなる集合はともに企業 B の**情報集合**と呼ばれる。あるプレイヤーの情報集合とはそのプレイヤーにとって区別できない（それぞれの点においてプレイヤーが持っている情報が同じであるような）点の集合である。

このようなゲームにおいては，企業 B は直接企業 A のタイプを知ることはできないが企業 A の投資行動を見て間接的にそのタイプを見抜くことができる可能性がある。企業 A の側から見れば自分のタイプを間接的に相手に知らせることができる，あるいは知られてしまう場合があるということである。そのようなとき，企業 A による投資行動がそのタイプの**シグナル**になると言う。あるプレイヤーの行動がそのプレイヤーのタイプのシグナルの役割を果たす可能性があるようなゲームを**シグナリングゲーム** (signaling game) と呼ぶ。ただし，このゲーム 5 の均衡では企業 A の投資はシグナルにはならない。演習問題 99 と次節でそのような例を扱う。

4.8.2　完全ベイジアン均衡

さてこのゲームの均衡を考えるのであるが，まずこのゲームには全体のゲーム以外には部分ゲームがないので部分ゲーム完全均衡の概念は使えない。あるいは，ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡とは同じ意味になる。（全体のゲーム以外の）部分ゲームとはゲームの途中から先が一つの独立したゲームになっていなければならず，その部分ゲーム以外の点におけるプレイヤーの行動や利得の影響を受けてはならない。ゲーム 5 の場合，点 A_1 から先のゲームにおいては企業 B が点 B_1 と B_2，および B_3 と B_4 とを区別できないため，点 A_2 から始まるゲームと完全に分離されていないからそのゲームにおけるプレイヤーの利得の影響を受けることになり部分ゲームにはならない。同様に点 A_2 から始まるゲームも部分ゲームにはならない。また，点 B_1 と B_2 とは企業 B にとって区別できない点であるため，B_1 あるいは B_2 から始まる部分ゲームというのは考えることができない。同様に，B_3 あるいは B_4 から始まる部分ゲームというのも考えられない。部分ゲームはプレイヤーがはっきり区別できる点から出発しなければならない。

企業 B は区別できない点においてどのようにして戦略を選ぶであろうか。もし企業 A が投資 X を選んだとすると，企業 B は自分が点 B_1 か B_2 のどちらかにいるということはわかるがどちらにいるかはっきりはわからない。しかし，はっきりはわからないまでも『多分 B_1 にいるのではないか』とか『まず間違いなく B_2 にいるであろう』とかいうような推測あるいは見通しをもって自分の戦略を選ぶことになるのではないだろうか。具体的には

企業 A が投資 X を選んだときの企業 B の推測　企業 A が投資 X を選んだときに，企業 B はその企業 A がタイプ S である確率は q，タイプ W である確率は $1-q$ というような推測を抱くものとする。

先に，ゲームが始まる前に企業 B は『企業 A は確率 2/3 でタイプ S で，確率 1/3 でタイプ W である』と思っていると仮定した。それはまだゲームが始まっていない段階で入手可能な情報をもとにした推測であったが，企業 A が X，Y いずれかの投資を選んだことが明らかになれば，当初の情報にその情報を加えて新たな推測を立てることになる。その推測がゲームが始まる前の推測と同じ場合もあれば異なることもある。このように新たに獲得した情報を用いて推測を更新していくプロセスをベイズ的な（ベイジアン，Bayesian）プロセスと呼ぶ。

企業 B の推測が上のようなものであるとすると，企業 A が X を選びそれに対応して企業 B が戦略 F を選んだときに企業 B が得られる利得の期待値（平均値）は次のように表される。

$$(-1)q + 1(1-q) = 1 - 2q \tag{4.18}$$

一方，戦略 N を選んだ場合の企業 B の利得の期待値はゼロである。したがって $q < 1/2$ ならば F を選んだ方が，$q > 1/2$ ならば N を選んだ方が利得が大きい。これが『企業 B の最適反応』である。不完備情報ゲームにおいては，最適反応は区別できない点における相手のタイプについてのプレイヤーの推測の値によって異なったものになる可能性がある。

企業 A が Y を選んだ場合はゲームは点 B_3 または B_4 に進むが，そのどちらであるか，すなわち企業 A のタイプについての企業 B の推測を企業 A が X を選んだ場合と同様に表すことができる。それを

企業 A が投資 Y を選んだときの企業 B の推測　企業 A が投資 Y を選んだときに，企業 B はその企業 A がタイプ S である確率は r，タイプ W である確率は $1-r$ というような推測を抱く。

と表現する。すると企業 B が戦略 F を選んだ場合の利得の期待値は

$$(-1)r + 1(1-r) = 1 - 2r \tag{4.19}$$

となる。一方，戦略 N を選んだ場合の企業 B の利得の期待値はゼロである。したがって $r < 1/2$ ならば戦略 F が，$r > 1/2$ ならば N が『企業 B の最適反応』である。

不完備情報ゲームの均衡はプレイヤーの戦略だけではなく，情報が十分でない中で意思決定をするプレイヤーの推測も含めて定義されなければならない。そこで次のような均衡概念を用いる。

完全ベイジアン均衡

(1). 企業 A の戦略は企業 B の戦略に対して最適反応になっている。
(2). 企業 B の戦略は，企業 A が選ぶ戦略に対して企業 B が抱く推測のもとで最適反応になっている。
(3). 企業 A が選ぶ戦略に対して企業 B が抱く推測は，ゲームが始まる前の企業 B の推測と企業 A の均衡戦略に対して整合的な (consistent)（矛盾しない）もの

である。

以上の 3 つの条件を満たす均衡を**完全ベイジアン均衡** (perfect Bayesian equilibrium)（**あるいは完全ベイズ均衡**）と呼ぶ。

最初の 2 つの条件は，企業 B の利得が相手のタイプについての推測にもとづいて計算されるということを除いて，各プレイヤーの戦略が互いに最適反応になっているというナッシュ均衡の条件と同じであるが，最後の条件が完全ベイジアン均衡を特徴づけるものになっている。具体的にゲーム 5 の完全ベイジアン均衡を考えてみよう。

ゲーム 5 には以下の 2 つの完全ベイジアン均衡がある。

完全ベイジアン均衡 1

(1). タイプ S の企業 A もタイプ W の企業 A も投資 X を選ぶ。

(2). 企業 A が X を選んだときは企業 B は戦略 N を選び，Y を選んだときには戦略 F を選ぶ。

(3). 『企業 A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 であり，企業 A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さい（タイプ W である確率は 1/2 より大きい)』という推測を企業 B が持つ。

完全ベイジアン均衡 2

(1). タイプ S の企業 A もタイプ W の企業 A も投資 Y を選ぶ。

(2). 企業 A が X を選んだときは企業 B は戦略 F を選び，Y を選んだときには戦略 N を選ぶ。

(3). 『企業 A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さく（タイプ W である確率は 1/2 より大きい)，企業 A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 である』との推測を企業 B が持つ。

それぞれが完全ベイジアン均衡であることを確認してみよう。

完全ベイジアン均衡 1 **の確認**

(1). 企業 A の戦略の最適性
企業 B の戦略を前提として考えるとタイプ S の企業 A が X を選んだ場合の利得は 3，Y を選んだ場合の利得は 0 であるので X を選ぶのが最適である。同様にタイプ W の企業 A が X を選んだ場合の利得は 2，Y を選んだ場合の利得は 1 であるので X を選ぶのが最適である。

(2). 企業 B の戦略の最適性
企業 A の戦略と企業 B の推測を前提として考えると，企業 A の戦略 X に対して企業 B が N を選んだときの利得の期待値はゼロであり，一方 F を選んだときの利得の期待値は
$$\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{3}(1)=-\frac{1}{3}$$

であるので，N が最適である。また企業 A の戦略 Y に対して企業 B が F を選んだときの利得の期待値は企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さいので

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0$$

より大きく，N を選んだときの利得の期待値はゼロなので，F が最適となる。

(3). 企業 B の推測の整合性
企業 B はゲームが始まる前に企業 A が 2/3 の確率でタイプ S であると思っており，均衡において両方のタイプの企業 A が X を選ぶからその結果を見ただけでは何も新しい情報は得られない。したがって企業 A が X を選んだ場合には，ゲームが始まる前と同じようにタイプ S である確率は 2/3 であると推測しなければならない。投資 Y は均衡においてどちらのタイプの企業 A も選ばない戦略なので，企業 A が Y を選んだ場合に企業 B が抱く推測の整合性は完全ベイジアン均衡の概念では問題にならない。つまりどのような推測を持ってもよい。

完全ベイジアン均衡 2 の確認

(1). 企業 A の戦略の最適性
企業 B の戦略を前提として考えるとタイプ S の企業 A が X を選んだ場合の利得は 1，Y を選んだ場合の利得は 2 であるので Y を選ぶのが最適である。同様にタイプ W の企業 A が X を選んだ場合の利得は 0，Y を選んだ場合の利得は 3 であるので Y を選ぶのが最適である。

(2). 企業 B の戦略の最適性
企業 A の戦略と企業 B の推測を前提として考えると，企業 A の戦略 X に対して企業 B が N を選んだときの利得の期待値はゼロであり，一方 F を選んだときの利得の期待値は，企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さいから

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0$$

より大きいので，F が最適である。また企業 A の戦略 Y に対して企業 B が F を選んだときの利得の期待値は

$$\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{3}(1)=-\frac{1}{3}$$

で，N を選んだときの利得の期待値はゼロなので，N が最適となる。

(3). 企業 B の推測の整合性
企業 B はゲームが始まる前に企業 A が 2/3 の確率でタイプ S であると思っており，均衡において両方のタイプの企業 A が Y を選ぶからその結果を見ただけでは何も新しい情報は得られない。したがって企業 A が Y を選んだ場合には，ゲームが始まる前と同じようにタイプ S である確率は 2/3 であると推測しなければならない。投資 X は均衡においてどちらのタイプの企業 A も選ばない戦

略なので，企業 A が X を選んだ場合に企業 B が抱く推測の整合性は完全ベイジアン均衡の概念では問題にならない。したがってどのような推測を持ってもよい。

以上によって 2 つの均衡が完全ベイジアン均衡であることがわかる。

4.8.3　合理的な (reasonable) 完全ベイジアン均衡

ゲーム 5 には 2 つの完全ベイジアン均衡があるが，どちらも合理的な均衡であろうか。ここで問題になるのは**企業 B の推測の合理性**である。完全ベイジアン均衡の概念では，均衡において企業 A が選ぶ戦略についての企業 B の推測の整合性はチェックしたが，均衡で選ばれない戦略についての推測の合理性は検討していない*17。しかし，均衡で選ばれない戦略についての推測がどのようなものでもよいということではないであろう。特に，『このタイプの企業 A はこの戦略を選んでも得になることはないから選ぶはずがない』と言えるような場合，その戦略を選ぶ確率が正（プラス）であると推測することは合理的ではないことになる。

具体的に完全ベイジアン均衡 2 について考えてみよう。この均衡では，企業 A がもしも均衡戦略ではない投資 X を選んだ場合，『その企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さい，逆に言えばタイプ W である確率が 1/2 より大きい』と企業 B が推測するという前提に立っている。しかしタイプ W の企業 A が合理的に行動するとして投資 X を選ぶことがあるであろうか。タイプ W の企業 A が X を選んだ場合に得ることができる利得の最大値は，企業 B が N を選んだときの 2 である。一方均衡戦略の Y を選べば企業 B が N を選んでくれるのでタイプ W の企業 A は 3 の利得を得ることができる。ということは，タイプ W の企業 A にとっては均衡戦略を捨ててわざわざ X を選ぶ意味がない，あるいはいわゆるインセンティブ (incentive) がないということになる。したがって X を選んだ企業 A が確率 1/2 以上でタイプ W であるというこの均衡での企業 B の推測は合理的ではない。一方，タイプ S の企業 A が投資 X を選んだ場合はどうであろうか。そのとき，企業 B が N を選ぶと企業 A は 3 の利得を得ることができるが，これは均衡におけるこのタイプの企業 A の利得 2 を上回っているので，タイプ S の企業 A には投資 X を選ぶインセンティブがある。したがって企業 B は，企業 A がもしも投資 X を選んでくれればその企業 A はタイプ S に違いないと考えるべきであるということになる。企業 B がそのような推測を持った場合，戦略 N を選んでタイプ S の企業 A との対決を避けることが最適となり完全ベイジアン均衡 2 は均衡ではなくなる。

---

*17 ここでは整合性 (consistency) という言葉と合理性という言葉を区別して使う。推測が整合的であるというのは，ゲームの途中の段階において，ゲームが始まる前に抱いていた推測と始まってから得た情報および想定されている均衡を構成する戦略と矛盾しない推測を持つということである。一方合理性とは，（整合性に加えて）ゲームの構造，特にプレイヤーの利得から見て相手がある戦略を選ぶ可能性があるかどうかを検討した上で理に適った推測を持つということを意味する。

整理すると次のように表現される。

完全ベイジアン均衡の合理性の条件　以下の条件が満たされているときには，企業 B は，均衡戦略とは異なるある戦略を選ぶ企業 A がタイプ W である確率はゼロである（タイプ S である確率は 1 である）という推測を持つべきである。また，そうではない推測にもとづいて成立している完全ベイジアン均衡は合理的な均衡ではない。

(1). タイプ W の企業 A が均衡戦略とは異なるある戦略を選んで得られる**利得の最大値が均衡戦略によって得られる利得より小さい**。

(2). 一方，タイプ S の企業 A がその戦略を選んで得られる利得の最大値は均衡戦略によって得られる利得より大きい。

この条件の中でタイプ S とタイプ W の関係が逆の場合には，タイプ S である確率はゼロであるという推測を持つべきであるということになる。

以上のことから完全ベイジアン均衡 2 は合理的な均衡ではないことがわかる。では完全ベイジアン均衡 1 の方はどうであろうか。この均衡では，企業 A が均衡戦略ではない投資 Y を選んだ場合，企業 B はその企業 A がタイプ W である確率が 1/2 より大きい（1 でもよい）と推測するということが前提となっている。先ほどと同じように考えてみよう。タイプ W の企業 A が Y を選んだ場合に得ることができる利得の最大値は 3 であり，これは均衡における利得 2 より大きい。一方，タイプ S の企業 A が Y を選んだ場合に得ることができる利得の最大値は 2 であり，これは均衡における利得 3 より小さい。したがってタイプ W の企業 A には投資 Y を選ぶインセンティブがあるが，タイプ S の企業 A にはないことになり，企業 A が投資 Y を選んだときに企業 B は，『その企業 A がタイプ W である確率は 1 であるという推測を持つべきである』ということになるが，確率が 1/2 より大きいという推測も合理的なものである。

以上の議論によって，**ゲーム 5 の合理的な均衡は完全ベイジアン均衡 1 である**，という結論を得る。

4.8.4　オークションの理論：ベイジアン・ナッシュ均衡

不完備情報ゲームの 1 つの応用としてオークションの理論を紹介する。ここで扱うゲームは動学的なゲームではなく静学的なゲームである。ある美術品を巡るオークションを取り上げる。オークションと言っても公開の場で行われるものではなく，密封した封筒に自分がつける価格を書いて提出するシールドビッド・オークション (sealed-bid auction)（入札）を考える。誰がこの美術品を落札し，いくらで購入するかについて主に 2 通りの決め方がある。

(1). **シールドビッド・ファーストプライス・オークション** (sealed-bid first-price auction)（以下「ファーストプライス・オークション」と呼ぶ）：最も高い価格をつけた人がその価格で美術品を購入する。

2 人の人，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 がこのオークションに参加する。各プレイヤーがこの美術品から得る価値は v_1（億円）と v_2（億円）であるが，それぞれ相手がどのような評価をしているかはわからない。各々の評価はこの美術品をいくらで買う気持ちがあるかということを表す[*18]。v_1，v_2 は 0 から 1 までのあらゆる値（実数値）をとる可能性があり，またどのような値も同じ確率で起きるものとする。このような確率分布は一様分布 (uniform distribution) と呼ばれる。一様分布においては，たとえば v_1 が 0.2 から 0.5 までの値をとる確率は $\frac{0.5-0.2}{1-0}=0.3$ となる。他も同様である。厳密に 0.2 となる確率は 0 であり，常にある範囲の値をとる確率を考える。各プレイヤーにとって相手の評価は正確にはわからないが上記のような確率分布であることは知っているものとする。このゲームでは両方のプレイヤーが情報の非対称性に直面している。入札に勝ったときの利得は自分の美術品に対する評価額と入札額（支払額）の差に等しく，負けたときの利得は 0 である。一様分布の仮定によって 2 人の入札額が等しくなる確率は 0 である。各プレイヤーは不確実（確率的）な状況で戦略を選択するので期待利得を最大化するように戦略を選ぶ。各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 で表し，以下のような戦略の組がナッシュ均衡であることを証明しよう。

$$p_1=\frac{v_1}{2},\ p_2=\frac{v_2}{2}$$

v_1，v_2 は各プレイヤーのタイプを表すものと考えることができる。それぞれのタイプのプレイヤーがどのような戦略を選ぶかを決めなければならない。この戦略の組がナッシュ均衡であることを示すには，各プレイヤーにとって相手がこの戦略を選んでいるときに自分もそれを選ぶことが最適であることを示せばよい。

プレイヤー 1 が上記の戦略を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が戦略（入札額）p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2>\frac{v_1}{2}$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1}{2}$ は 0 から 0.5 までの値を等しい確率でとる（$0\leqq v_1\leqq 1$ であるから）。したがって $0\leqq p_2\leqq 0.5$ として入札に勝つ確率は $\frac{p_2}{0.5}=2p_2$ である[*19]。$p_2>0.5$ の入札をしても勝つ確率は上がらず（$p_2=0.5$ で勝つ確率は 1 になる）支払額が増えるだけなのでそのような入札は行わない。勝ったときの利得は v_2-p_2 であるから期待利得は

$$2p_2(v_2-p_2)=-2(p_2^2-p_2v_2)$$

となる。これは p_2 の二次関数なので最大値を求める手法により（微分してもよいが）

$$-2\left[\left(p_2-\frac{v_2}{2}\right)^2-\frac{v_2^2}{4}\right]$$

*18 買ってから転売するつもりであれば，同じような情報を持っている限り両者の評価が異なることはないであろう。評価が異なるとすれば各プレイヤーにとっての価値は自分で鑑賞して得られる効用を金額で表したものと見なされる。

*19 負ける確率は $\frac{0.5-p_2}{0.5}=1-2p_2$ である。

と変形され期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2}{2}$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1}{2}$$

が得られる。以上によって上記の戦略の組がナッシュ均衡であることが示された。このゲームのように情報が非対称な静学的ゲームで相手のタイプについての確率的な推測にもとづいて各プレイヤーが期待利得を最大化する戦略を選ぶナッシュ均衡は，**ベイジアン均衡**あるいは**ベイジアン・ナッシュ均衡**と呼ばれる。動学的なゲームの完全ベイジアン均衡に対応する。

■ファーストプライス・オークションの均衡について　プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = p_2(v_2)$$

とする。この逆関数を

$$v_2 = g_2(p_2)$$

と表す。たとえば $p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$ ならば $g_2(p_2) = 2p_2 - 2$ である。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $g_2(p_1)$ に等しい（一様分布の仮定によって)。そのとき期待利得は

$$(v_1 - p_1)g_2(p_1)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) = 0$$

が得られる。プレイヤー 1 の入札額 $p_1 = p_1(v_1)$ がこの式を満たすことが均衡の条件となる。プレイヤー 1 と 2 が同一の行動をとるとすると $p_2(v_2)$ と $p_1(v_1)$ が同じ関数になるのでそれらの逆関数 $g_2(p_2)$ と $v_1 = g_1(p_1)$ も同じ関数となり，微分も同じ関数になる。したがって $g_2'(p_1) = g_1'(p_1)$ が得られるから上の式は

$$(v_1 - p_1(v_1))g_1'(p_1) - g_1(p_1) = 0$$

と書き直される。さらに逆関数の微分の関係より[20],

$$g_1'(p_1) = \frac{1}{p_1'(v_1)}$$

であるから，$g_1(p_1) = v_1$ と合わせて

$$(v_1 - p_1(v_1))\frac{1}{p_1'(v_1)} - v_1 = 0$$

が導かれ，これを整理して

$$(v_1 - p_1(v_1)) - v_1 p_1'(v_1) = 0 \tag{4.20}$$

を得る。この式を満たす関数 $p_1(v_1)$ は

$$p_1 = \frac{v_1}{2}$$

である。実際 $p_1' = \frac{1}{2}$ であるから上の式に代入すると

$$(v_1 - \frac{v_1}{2}) - \frac{1}{2}v_1 = 0$$

が成り立つ（この計算は微分方程式を解くことに相当する)。

■微分方程式のいくらか正式な解法　関数の微分を含む方程式が微分方程式である。

$$x(v_1) = v_1 p_1(v_1)$$

とおくと

$$x'(v_1) = p_1(v_1) + v_1 p_1'(v_1)$$

であるから (4.20) は次のように書き直される。

$$v_1 - x'(v_1) = 0 \text{ すなわち } x'(v_1) = v_1$$

したがって微分の公式を逆に用いて（つまり積分の公式）

$$x_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1^2 + C$$

---

[20] $g_1'(p_1)$ は $\frac{\Delta v_1}{\Delta p_1}$ から得られ，$p_1'(v_1)$ は $\frac{\Delta p_1}{\Delta v_1}$ から得られ，

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta p_1} = \frac{1}{\frac{\Delta p_1}{\Delta v_1}}$$

が成り立つ。

が得られる（C は定数）。これにより

$$p_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{C}{v_1}$$

となる。定数 C は（x を）微分すると消えるので微分方程式の条件だけでは正確に再現できないが，オークションの意味を考えることによって決めることができる。v_1 がごく小さいときにはこの美術品に価値を感じないので p_1 もほとんど 0 になる。よって $C = 0$ でなければならない。以上から

$$p_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1$$

が求まる。

(2). **シールドビッド・セカンドプライス・オークション** (sealed-bid second-price auction)（以下「セカンドプライス・オークション」と呼ぶ）：最も高い価格をつけた人が，2 番目に高い価格をつけた人の入札額で美術品を購入する。
上のファーストプライス・オークションと同じ状況を仮定する。このとき以下のような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示す。

$$p_1 = v_1,\ p_2 = v_2$$

プレイヤー 1 がこの戦略を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が戦略 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > v_1$ となる場合であるが v_1 は 0 から 1 までの値を等しい確率でとるので勝つ確率は p_2 である。勝ったときの利得は $v_2 - v_1$ に等しい。この値は p_2 には関係しない。$p_2 > v_2$ のときはオークションに勝てば利得は負（マイナス）で負けたときは 0 であるから，v_2 以上の p_2 で入札することはない。$v_2 - v_1 < 0$ のときは勝たない方がよいが，$p_2 = v_2$ を入札すれば勝つことはない。一方 $v_2 - v_1 > 0$ のときには勝った方がよいが，このときも $p_2 = v_2$ を入札すれば望み通りになる[*21]。以上によって自分の評価額に等しい額を入札することがお互いに最適であるからそのような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡となる。
セカンドプライス・オークションでは自分の入札額は支払額に影響せず相手の入札額によって支払額が決まるのでオークションに勝つか勝たないかだけを考えて自分の入札額を決めればよい。相手の入札額が自分の評価より高いか低いかによってオークションに勝つ方がよいか負ける方がよいかが決まる。したがって自分の評価に等しい額を入札することが最適な行動となるのである。このセカンドプライス・オークションは公共財の供給に関するグローブズメカニズムとよく似ている。

ファーストプライス・オークションよりセカンドプライス・オークションの方が入札額は高いが，2 番目に高い価格で購入することができるので実際に支払う額も高くなるわけ

[*21] $v_2 = v_1$ となる確率は 0 なので考える必要はないが，$p_2 = v_2$ を入札してそのようなことがあるとすれば勝っても負けても利得はともに 0 である。

ではない。実はどちらのオークションでも支払額の期待値は等しい。ファーストプライス・オークションの場合には入札額が支払額に等しいのでプレイヤー 1 が落札する場合の支払額は $\frac{v_1}{2}$ に等しく，プレイヤー 2 が落札する場合の支払額は $\frac{v_2}{2}$ に等しい。一方セカンドプライス・オークションの場合にプレイヤー 1 が落札するのは $v_1 > v_2$ のときであるが，そのときの支払額は v_2 に等しい。そして $v_1 > v_2$ という条件のもとでの v_2 の期待値は $\frac{v_1}{2}$ である。同様にプレイヤー 2 が落札するのは $v_2 > v_1$ のときであるが，そのときの支払額は v_1 に等しく，$v_2 > v_1$ という条件のもとでの v_1 の期待値は $\frac{v_2}{2}$ である。したがってセカンドプライス・オークションでの支払額の期待値はファーストプライス・オークションでの支払額に等しい。

■3 人以上の場合　人数が 3 人以上の場合についてファーストプライス・オークションを考えてみよう。n 人の人がオークションに参加し，それぞれの評価額はすべて異なっているものとする。プレイヤー $i(i = 1, 2, \cdots, n)$ の評価額を v_i で表す。やはり v_i はそれぞれ 0 から 1 までの値をとり，確率分布は一様分布であるとする。また各 v_i は独立で相関関係はないと仮定する。プレイヤー i の入札額を p_i で表す。このとき次のような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡となる。

$$\text{各プレイヤー } i \text{ について } p_i = \frac{n-1}{n} v_i$$

$n = 2$ のときには上で見た結果と一致する。あるプレイヤー i 以外のすべての人々がこの戦略を選んでいるとき，そのプレイヤー i がオークションに勝つのは他のすべての人々の評価 v_j について $p_i > \frac{n-1}{n} v_j$ が成り立つ場合である。プレイヤー i があるプレイヤー j に勝つ確率は $\frac{n}{n-1} p_i$ であるから，独立かつ一様分布との仮定により $n-1$ 人すべてに勝って落札する確率は $\left(\frac{n}{n-1} p_i\right)^{n-1}$ に等しい。勝ったときの利得は $v_i - p_i$ であるから期待利得は

$$\left(\frac{n}{n-1} p_i\right)^{n-1} (v_i - p_i)$$

と表される。この式を p_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{n}{n-1} \left(\frac{n}{n-1} p_i\right)^{n-2} [(n-1)v_i - np_i] = 0$$

が得られ

$$p_i = \frac{n-1}{n} v_i$$

が求まる。i が誰であっても話は同じであるから上記の戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡である。プレイヤー i が勝ったときの支払額はもちろんこの $\frac{n-1}{n} v_i$ に等しい。

次にセカンドプライス・オークションを考える。2 人の場合と同様に

$$\text{各プレイヤー } i \text{ について } p_i = v_i$$

という戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることが示される。2 人のケースと議論はほとんど変らない。他のプレイヤーがこの戦略を選んでいるとしてプレイヤー i がオー

クションに勝つのはすべての $j \neq i$ について $p_i > v_j$ の場合であり，その確率は p_i^{n-1} である。2 番目に高い人の評価を v_k としてプレイヤー i が勝ったときの利得は $v_i - v_k$ であるが，これは p_i の値には関係しない。ある $j \neq i$ について $v_i < v_j$ のときは勝たない方がよいが $p_i = v_i$ を入札すれば勝つことはない[*22]。一方すべての $j \neq i$ について $v_i > v_j$ のときには勝った方がよいが，$p_i = v_i$ を入札すればそのようになる。したがって上記の戦略の組はベイジアン・ナッシュ均衡である。

3 人以上の人々がいてもセカンドプライス・オークションにおける支払額の期待値はファーストプライス・オークションにおける支払額に等しいことが言える。セカンドプライス・オークションでプレイヤー 1 が落札する場合を考える。話をわかりやすくするためにプレイヤー 1 の評価額が最も高く，以下プレイヤー 2，3，$\cdots$，n の順になっているものとする。すなわち $v_1 > v_2 > \cdots > v_n$ となっている。プレイヤー 1 が落札するが支払額は v_2 に等しいから，v_2 の期待値を求めなければならない。プレイヤー $i(i = 2, 3, \cdots, n)$ の評価額 v_i の期待値を $E(v_i)$ とすれば

$$E(v_i) = \frac{n+1-i}{n+2-i} v_{i-1} \tag{4.21}$$

となる。これを数学的帰納法によって証明しよう。まずプレイヤー n について $v_{n-1} > v_n$ という条件のもとでの v_n の期待値は

$$E(v_n) = \frac{v_{n-1}}{2} \tag{4.22}$$

に等しい。したがってまず $i = n$ のときに (4.21) が成り立つ。次にプレイヤー $n-1$ について $v_{n-2} > v_{n-1} > v_n$ という条件のもとでの v_{n-1} の期待値は

$$E(v_{n-1}) = \frac{v_{n-2} + v_n}{2}$$

と表される。v_{n-2} の値がが決まっているとして，v_n の値も決まっていれば $E(v_{n-1})$ も決まるが v_n が確率的に変る（確率変数であると言う）ということを考慮すれば $E(v_{n-1})$ も確率的に変る。また v_{n-1} 自身も確率的に変る。その上で $E(v_{n-1})$ と $E(v_n)$ の期待値を求めそれらをあらためて $E(v_{n-1})$，$E(v_n)$ と書くことにする。以下同様である。すると

$$E(v_{n-1}) = \frac{v_{n-2} + E(v_n)}{2}$$

と表され，(4.22) より

$$E(v_{n-1}) = \frac{2}{3} v_{n-2}$$

が得られる。したがって $i = n-1$ のときに (4.21) が成り立つ。そこで $i = k$ のときに成り立つと仮定して $i = k-1$ のときにも成り立つことを証明しよう。$i = k$ のときに成り立つ

[*22] ある $j \neq i$ について $v_i < v_j$ であるとは自分以外の誰かの評価が自分の評価を上回っているということである。

から

$$E(v_k) = \frac{n+1-k}{n+2-k}v_{k-1} = \frac{n+1-k}{n+2-k}E(v_{k-1}) \tag{4.23}$$

である（v_{k-1} が確率変数であるということを考慮して）。次にプレイヤー $k-1$ について $v_{k-2} > v_{k-1} > v_k$ という条件のもとでの v_{k-1} の期待値は

$$E(v_{k-1}) = \frac{v_{k-2}+v_k}{2} = \frac{v_{k-2}+E(v_k)}{2}$$

と表される（v_k が確率変数であるということを考慮して）。(4.23) をこれに代入すると

$$E(v_{k-1}) = \frac{v_{k-2} + \frac{n+1-k}{n+2-k}E(v_{k-1})}{2}$$

より

$$E(v_{k-1}) = \frac{n+2-k}{n+3-k}v_{k-2} \tag{4.24}$$

が得られる。したがって (4.21) が一般的に成り立つことが示された。これに $k=3$ を代入すると

$$E(v_2) = \frac{n-1}{n}v_1$$

となるからセカンドプライス・オークションにおける支払額の期待値はファーストプライス・オークションにおける支払額に等しい。

■ダッチ（オランダ式）・オークションとイングリッシュ・オークション　公開で行われるオークションにも主に 2 種類がある。誰も買わないような高い価格から始めて徐々に下げて行き，最初に「買った！」と声を上げた人が落札するのがダッチ・オークションであり，逆に誰もが買う低い価格から始めて徐々に上げて行き，1 人を残して全員が脱落したところでその残った人が落札するのがイングリッシュ・オークションである。ダッチ・オークションはファーストプライス・オークションと同じ結果をもたらし，イングリッシュ・オークションではセカンドプライス・オークションと同じ結果になることが言える。

ファーストプライス・オークションでは各プレイヤーが自分がつける価格を予め決めておいてそれを提出し，最も高い価格を書いた人が落札してその価格で購入する。ダッチ・オークションではどの段階で声を上げるかを決めておいて，その価格になったときに最初に声を上げた人が落札するので 1 番高い価格で声を上げるつもりだった人がその価格で購入することになる。したがってこれらは同じ仕組みのオークションとなり同じ結果をもたらす。

セカンドプライス・オークションにおいても各プレイヤーが自分がつける価格を予め決めておいてそれを提出し，最も高い価格をつけた人が落札するが 2 番目に高い入札額で購入する。イングリッシュ・オークションでは低い価格から始まってせり上がって行くので自分がつけるつもりだった入札額よりも価格の方が高くなった人が脱落して行き，最後に残った人が落札するから最も高い入札額を予定していた人が落札する。しかし購入価格は

その人の入札額ではなく，2 番目に高い入札額を考えていた人が脱落したときの価格であるからその 2 番目に高い人の入札予定額に等しくなる。したがってこれらは同じ仕組みのオークションとなり同じ結果をもたらす。

■オークションゲームの補足説明（微分方程式を用いた議論の簡易版）　2 人のプレイヤーによるある美術品をめぐるシールドビッド・ファーストプライス・オークションにおいて，プレイヤー 1，2 の評価 v_1，v_2（確率変数）が 5 から 8 までの一様分布となっているものと仮定する。各プレイヤーは相手の評価を正確には知らないがその分布は知っている。プレイヤー 1，2 の入札額がそれぞれ v_1，v_2 の一次関数になっていると考えて議論を進める。プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = av_2 + b \ (a,\ b \text{ は正の定数})$$

とする。この関数の逆関数は

$$v_2 = \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$$

と表される。プレイヤー 1 の入札額も同じ関数 $p_1 = av_1 + b$ で表され，その逆関数は $v_1 = \frac{1}{a}p_1 - \frac{b}{a}$ であるとする。プレイヤー 2 が落札するのは $p_2 > p_1$ となる場合であるが，それは

$$p_2 > av_1 + b$$

が成り立つときである。この式から

$$v_1 < \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$$

が得られる。v_1 は 5 から 8 までの値を等しい確率でとるので $5 \leqq \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a} \leqq 8$ として $v_1 < \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$ となる確率は

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a} - 5\right] = \frac{p_2 - (b+5a)}{3a}$$

に等しい。落札したときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$(v_2 - p_2)\frac{p_2 - (b+5a)}{3a}$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$-2p_2 + b + 5a + v_2 = 0$$

が得られる。したがって

$$p_2 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{b+5a}{2}$$

を得る。これと上記の $p_2 = av_2 + b$ とから a，b それぞれは $a = \frac{1}{2}$，$b = \frac{5}{2}$ と求まる。したがって

$$p_2 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{5}{2}$$

が得られる。p_1 も同様である。このようにして求められる均衡はベイジアン・ナッシュ均衡と呼ばれる。

4.9　シグナリングゲーム

経済学で代表的な教育と労働市場についてのシグナリングゲームの例を検討してみよう。

4.9.1　労働市場のシグナリングゲーム

次のようなゲームを考える。

ゲーム 6　何人かの労働者がいる。労働者に 2 つのタイプ，能力（生産性）が低いタイプと高いタイプがある。それぞれタイプ 1，タイプ 2 と呼ぶことにする。具体的にタイプ 1 の労働者の生産性は 1，タイプ 2 の労働者の生産性は 2 であると仮定する。各々の労働者自身は自分のタイプについて知っているが，その労働者を雇う側の企業にはわからないものとする。ある一人の労働者について企業は，彼がタイプ 1 であると思えば賃金 1 を支払い，タイプ 2 であると思えば賃金 2 を，どちらのタイプかわからない場合はその労働者の能力について何らかの確率的な推測をもち，その確率に応じた労働者の生産性の期待値（平均値）に等しい賃金を支払う。企業数は 2 つ以上あるものとする。

ゲームが始まる前に企業は労働者のタイプについてある確率的な推測を抱いているが，それはすべての企業に共通であるとする。ここでは具体的に

ゲーム開始前の企業の推測　企業は，労働者が確率 1/2 で能力が低く（タイプ 1），確率 1/2 で能力が高い（タイプ 2）という推測を抱いている。

と仮定する。すべての企業が共通の推測を持つということについては，その推測が何らかの統計的な調査などによる客観的なデータにもとづいていると考えればよい。

労働者は自分のタイプを直接企業に知らせることはできないが，どの程度の教育を受けるかによって間接的に知らせることができるかもしれない。ここでは受ける教育のレベルを 0 から 2 までの数字で表現する。たとえば 0 はまったく教育を受けない，あるいは義務教育以上の教育を受けないことを意味し，0.5 は高校まで，1 は大学卒業，1.5 は有名大学卒業，2 は超有名大学卒業などと解釈できる。これらの区切りのよい数字だけではなく 0.8 は大学中退，1.8 は有名大学を優秀な成績で卒業などと適当に解釈すればよい。教育を受けるためにはコストがかかるが，それは入学金や授業料などの経済的コストだけではなく，入学するために必要な受験勉強に費やす時間と肉体的，精神的エネルギーなどのコストも含まれる。そして『能力の高い労働者の方が高いレベルの教育を受けるために要する

コストは小さい』ものと仮定する。逆に言えば『能力の低い労働者にとってのコストの方が大きい』わけである。これは教育がシグナルの役割を果たすために必要な条件である。また，ここでは分析を簡単にするために『教育そのものは労働者の能力に影響を与えない』ものと仮定する。つまり，能力の高い労働者はレベルの高い教育を受けても受けなくても高い能力を持ち，能力の低い労働者は教育を受けても受けなくても低い能力しか持たないということである。したがって，教育を受けることは労働者の高い能力のシグナルとしての役割しか果たさない。労働者が選択する教育のレベルを e で表し，教育を受けるためのコストはタイプ 1 の労働者については $1.05e$，タイプ 2 の労働者については $0.4e$ であると仮定する。なお教育レベルの値はどんな実数でもよいのではなく 0.1 を最小単位として表されるものとする。

このゲームは以下のような 2 段階からなる。

(1). 第 1 段階
　労働者が自分が受ける教育のレベルを決める。
(2). 第 2 段階
　その労働者の選択を見て企業が支払う賃金を決める。

企業数が一つならばその企業は非常に低い賃金を支払って労働者からいわゆる搾取することができるかもしれないが，複数の企業が競争している状態であれば，生産性以下の賃金しか支払っていない企業は他の企業にその労働者を奪われてしまうことになるので，生産性（の期待値）に等しい賃金を支払わなければならない。したがってゲームの第 2 段階では，企業が利潤最大化を求めて意思決定をするというよりも企業間の競争によって賃金が決まると考えるべきである。

労働者の利得は賃金から教育にかかるコストを引いたものである。すべての労働者は自分自身のタイプに関する情報を，すなわち能力が高いか低いか，を除いて同じ状況におかれている。以下ではある一人の労働者と企業とのゲームを考える。

4.9.2　完全ベイジアン均衡–Separating 均衡と Pooling 均衡

このゲームの完全ベイジアン均衡を考える。次のような二種類の完全ベイジアン均衡がある。

Pooling 均衡

(1). タイプ 1 の労働者，タイプ 2 の労働者ともに教育レベル $e = 0$ を選ぶ。
(2). 企業は $e = 0$ を選んだ労働者にもそれ以外の教育レベルを選んだ労働者にも一律に賃金 1.5 を支払う。
(3). 企業は労働者がいかなる教育レベルを選ぼうとも，その労働者は確率 1/2 で能力が高く，確率 1/2 で能力が低いという推測を持つ。

Separating 均衡

(1). タイプ 2 の労働者は教育レベル $e = 1$ を選び，タイプ 1 の労働者は教育レベル $e = 0$ を選ぶ。

(2). 企業は $e \geqq 1$ を選んだ労働者に賃金 2 を支払い，$e < 1$ を選んだ労働者に賃金 1 を支払う。

(3). 企業は $e \geqq 1$ を選んだ労働者は確率 1 で（間違いなく）能力が高く，$e < 1$ を選んだ労働者は確率 1 で能力が低い（能力が高いということはありえない）という推測を持つ。

最初の均衡のように異なったタイプの労働者が同じ戦略を選ぶような均衡を Pooling **均衡**（『一括均衡』と訳される），2 番目の均衡のように異なったタイプの労働者が異なった戦略を選ぶような均衡を Separating **均衡**（『分離均衡』と訳される）と呼ぶ。それぞれが完全ベイジアン均衡であることを確認してみよう。

Pooling 均衡の確認

(1). 労働者の戦略の最適性
$e = 0$ 以外の教育レベルを選んでも $e = 0$ を選んだときより高い賃金を得ることはできない。教育にはコストがかかるからどちらのタイプの労働者にとっても $e = 0$ を選ぶことが最適である。

(2). 企業の戦略の最適性
労働者の能力についての企業の推測を前提とすれば，上で述べた企業間の競争の結果実現する賃金としては最適である。

(3). 企業の推測の整合性

(i) 労働者が $e = 0$ を選んだ場合
企業はゲームが始まる前から 1/2 の確率で労働者の能力が高いと推測していたが，どちらのタイプの労働者も均衡において $e = 0$ を選ぶので何も新しい情報を得られないからその推測を変える理由はない。したがって 1/2 の確率で能力が高いという推測は整合的である。

(ii) 労働者が $e = 0$ 以外を選んだ場合
均衡においてどちらのタイプの労働者も $e = 0$ を選ぶので，それ以外の教育レベルが選択された場合の企業の推測については完全ベイジアン均衡の概念では何も制約はない。つまり，企業と労働者の戦略の最適性に合致したものならばどのような推測を持ってもかまわない。したがって，確率 1/2 で能力が高いという推測も整合的である。

Separating 均衡の確認

(1). 労働者の戦略の最適性
企業の戦略を前提にすると，タイプ 2 の（能力の高い）労働者が $e = 1$ の教育を選んだときに得られる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 0.4 = 1.6$ であり，$e = 0$ を選んだ場合の利得は 1 である。また，$e = 1$ より大きい e を選んでも得られ

る賃金は高くならない。したがってタイプ 2 の労働者にとって $e = 1$ という戦略は最適である。一方タイプ 1 の（能力の低い）労働者が $e = 1$ を選んで得られる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 1.05 = 0.95$ であり，$e = 0$ を選んだ場合の利得は 1 であるからタイプ 1 の（能力の低い）労働者は $e = 0$ を選ぶ。

(2). 企業の戦略の最適性
均衡における労働者の戦略と企業の推測を前提とすれば，$e \geqq 1$ を選んだ労働者は能力が高く，$e < 1$ を選んだ労働者の能力は低いことになるので，それぞれに 2 と 1 の賃金が支払われるのは企業間の競争の結果としては最適である。

(3). 企業の推測の整合性
均衡戦略では能力の高い労働者が $e = 1$ を選び，能力の低い労働者が $e = 0$ を選ぶから，労働者が $e = 1$ を選んだときと $e = 0$ を選んだときの企業の推測は整合的である。$e = 1$ と $e = 0$ 以外の教育レベルが選ばれた場合の企業の推測については完全ベイジアン均衡の概念では何も制約はない。

以上によって，Pooling 均衡，Separating 均衡ともに完全ベイジアン均衡であることが確認された。

4.9.3 合理的な均衡–シグナルとしての教育

このゲームでも 2 つの完全ベイジアン均衡が得られたが，それらの均衡における企業の推測が合理的であるかどうかを検討する必要がある。問題になるのは均衡において労働者が選ばない戦略についての企業の推測であり，均衡で選ばれる戦略については完全ベイジアン均衡における企業の推測の整合性の検討によってその合理性は確認されている。

まず Pooling 均衡の合理性を検討してみよう。この均衡は労働者が $e = 0$ 以外の教育を選んだ場合にも確率 1/2 でその労働者がタイプ 2 である（能力が高い）という推測を企業が抱いているという前提にもとづいている。考えるべきはこの均衡においてタイプ 1 の（能力が低い）労働者がどの程度の教育レベルを選ぶインセンティブを持つであろうかということである。もしタイプ 1 の労働者が $e > 0$ の教育を受けることを選び，それに対して企業がその労働者がタイプ 2 の労働者であると思った場合，彼が得ることのできる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 1.05e$ である。これがタイプ 1 の労働者が e の教育レベルを選んで得られる最大の利得ということになる。$e > \frac{10}{21} \approx 0.48$ であればその値はこのタイプの労働者の均衡における利得 1.5 より小さい。したがってこの Pooling 均衡においてタイプ 1 の労働者はそれ以上の教育レベルを選ぶインセンティブを持たない。

一方タイプ 2 の労働者が e の教育レベルを選び，企業がその労働者がタイプ 2 の労働者であると思った場合に得られる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 0.4e$ であるが，$e < 1.25$ であればその値はこのタイプの労働者の均衡における利得 1.5 より大きい。したがって前節の完全ベイジアン均衡の合理性の条件を適用すると，企業は，『もし労働者が均衡戦略とは異なって $e > 0.48 (\geqq 0.5)$ の教育レベルを選んだ場合にはその労働者はタイプ 2 であ

る（能力が高い）という推測をもつべきである』ということになる。企業がそのような推測を持つとすれば $e > 0.48$ の教育を受けた労働者に支払われる賃金は 2 になり，タイプ 2 の労働者の最適な戦略は $e > 0.48$ の教育レベルを選ぶことになるので Pooling 均衡は均衡ではなくなる。したがって Pooling 均衡は合理的ではない。

Separating 均衡においては，上で見たようにタイプ 1 の労働者は $e = 1$ 以上の教育レベルを選ぶインセンティブをもたないので $e \geqq 1$ ならばタイプ 2 であるという推測は合理的である。またタイプ 2 の労働者が $e < 1$（$e \leqq 0.9$）の教育レベルを選んだ場合には，タイプ 1 の労働者によってまねをされる可能性がある[*23]ので自分がタイプ 2 であることを企業に知らせることはできないから選ばない。したがって，Separating 均衡は合理的な均衡である。

以上の分析から，**ゲーム 6 の合理的な均衡は Separating 均衡である**，という結論が得られる。

Separating 均衡においては，高いレベルの教育を受けることによって能力の高い労働者が間接的に自分の能力を企業に認識させることができるので，教育が労働者の能力のシグナルの役割を果たしている。

4.10　協力ゲームの理論

協力ゲームとはゲームのプレイヤーが互いに話し合ったり相談したりできる状況で適当な解を見出そうとするものである。ここでは代表的な協力ゲームの理論について基本的な部分を紹介しよう。

4.10.1　コア

次のような例を考える。

隣り合わせに建っている 3 軒の家 A，B，C が近くまでパイプラインで来ている温泉を家に引き込みたいと考えているとする。各自が引けばパイプラインからの距離や家の構造などによって A は 70 万円，B は 55 万円，C は 65 万円かかる。しかし 2 軒あるいは 3 軒共同で引けば経費を安くすることができる。具体的に A と B が共同で引けば 119 万円，B と C なら 112 万円で引くことができ，単独で引くよりも合計では安くなる。一方 A と C は離れているために共同で引いても経費を下げられずメリットはない。さらに 3 軒共同で引けば 170 万円で引くことができるものとする。A と B が協力すればそれぞれ単独で引くよりも合わせて 6 万円安くすることができるので，その協力による価値を

$$v(\{A, B\}) = 6$$

[*23] タイプ 1 の労働者が $e = 0.9$ を選んで，企業がその労働者はタイプ 2 であると思って賃金 2 を支払うと，労働者の利得は $2 - 1.05 \times 0.9 > 1.055$ となり Separating 均衡の利得を上回る。

と表す。このように複数のプレイヤーが協力することを**提携**と呼ぶ。またその提携によって得られる価値を表す関数を**特性関数**と呼ぶ。上の式は提携 $\{A, B\}$ の特性関数の値が 6 であることを意味する。同様に考えると

$$v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 0$$

となる。A と C の 2 人の提携では節約はできない。また 3 人全員の提携 $\{A, B, C\}$ の特性関数の値は

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

である。単独ではもちろん節約できないので，そのことを $v(\{A\}) = 0$, $v(\{B\}) = 0$, $v(\{C\}) = 0$ と表す。3 人で一緒に引けばそれぞれが単独で引くよりも 20 万円節約できる。特性関数の値から

$$v(\{A, B\}) > v(\{A\}) + v(\{B\})$$

$$v(\{B, C\}) > v(\{B\}) + v(\{C\})$$

が得られ，さらに

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{A, B\}) + v(\{C\})$$

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{B, C\}) + v(\{A\})$$

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{A, C\}) + v(\{B\})$$

が成り立つ。これらの式は A，B がそれぞれ単独で引くよりは協力した方がよいことを（B，C も同様），また A，B2 人，あるいは B，C2 人または A，C2 人が協力するよりも 3 人で協力した方がよいことを意味する。そこで 3 人が協力して温泉を引いたとき，その経費をどのように分担するか，逆に言えば協力することによって節約できる分をどのように分けるのが適当であるかを，ある基準にもとづいて検討してみよう。全体で節約される 20 万円の A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とする。まず節約される 20 万円すべてを 3 人に配分し，かつ各自の取り分がマイナスでは誰も参加しないので次の 2 つの条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 20 \text{（全体合理性）}$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \text{（個人合理性）}$$

3 人の提携を実現するには単独で引く場合と比べた場合はもちろん，2 人で協力して引く場合よりもよりよい結果が実現されなければならない。そうでなければその 2 人は提携から抜けて 2 人だけで温泉を引くことを選ぶであろう。したがって上記の条件に加えて

$$x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 8$$

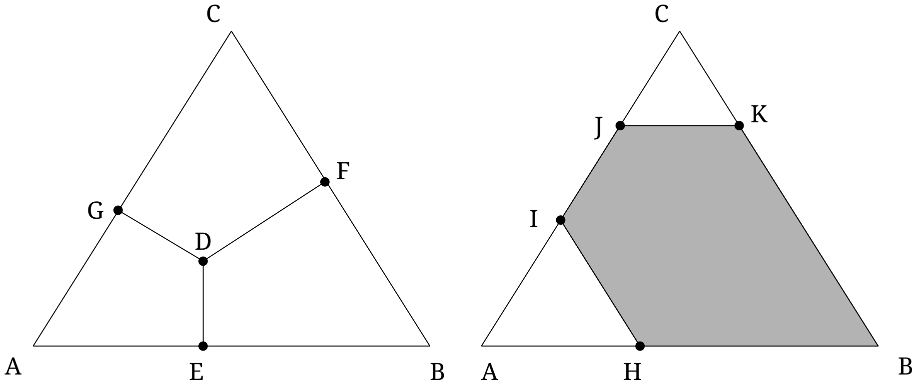


図 4.3　コアの図解

が成り立たなければならない。これらの条件を満たす配分 (x, y, z) の集合を**コア** (core) と呼ぶ。コアがなるべく狭い方が限られた配分だけが望ましい配分の候補になるが，この例ではそうはならない。$x + y \geqq 6$，$y + z \geqq 8$ なので $z \leqq 14$，$x \leqq 12$ でなければならないが，$v(\{A, C\}) = 0$ によって $x + z \geqq 0$ であればよいので y に制約はない。したがって $(x, y, z) = (0, 20, 0)$ というような配分も $(x, y, z) = (6, 0, 14)$ というような配分もコアに含まれてしまう。次の「仁」ではさらに満たすべき条件をつけ加えてコアの中から最も望ましい配分を見つけ出す方法を考えてみよう。コアが存在しないゲームもある。仁はコアが存在すればそのコアに含まれているが，コアが存在しなくても仁は存在する。詳しくは仁の説明の中で述べる。

「仁」の説明で用いる「不満」という言葉を使えば，コアはすべての提携が正の不満を持たない配分の集合である。

■コアの図解　コアの図解を紹介する。

$v(\{A, B\}) = 6, v(\{B, C\}) = 8, v(\{A, C\}) = 0, v(\{A, B, C\}) = 20, v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

の例を考え，A，B，C の配分を x，y，z で表す。コアの条件は

$$x + y + z = 20,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 8$$

であるが，$x + y \geqq 6$ は $z \leqq 14$ に，$y + z \geqq 8$ は $x \leqq 12$ に対応する。さて，図のような正三角形を描く。

まず左の図を見ていただきたい。E，F，G はそれぞれ D から各辺に下ろした垂線の足である。正三角形であるから DE，DF，DG の和は一定である（簡単に証明できる）。それぞれ $DF = x$，$DG = y$，$DE = z$，$DE + DF + DG = 20$ とすると D は上の配分を表していることがわかる。D と BC の距離がプレイヤー A の，D と AC の距離が B の，D と AB

の距離が C の配分である，D はこの三角形内（辺と頂点を含む）のどこにでもとれる。例えば点 A を D とすると $(x, y, z) = (20, 0, 0)$ という配分を，AB 上のある点を D とすると $z = 0$ となる配分を表す。コアの条件 $x + y \geqq 6$, $y + z \geqq 8$ は，それぞれ $DE \leqq 14$, $DF \leqq 12$ を意味するからそれらを満たす領域は右の図のように表される。図の網掛けした部分がコアである。H，I，J，K はそれぞれ $(x, y, z) = (12, 8, 0)$，$(x, y, z) = (12, 0, 8)$，$(x, y, z) = (6, 0, 14)$，$(x, y, z) = (0, 6, 14)$ という配分を表している。

4.10.2　仁 (nucleous)

単独または 2 人の提携で実現できる価値と全員が提携したときに得られる各自の配分（または 2 人の配分の和）との差を「不満」と呼ぶことにする。今の例では次のように表される。

$$
\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 6 - (x + y)\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 8 - (y + z)\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = -(x + z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z
\end{aligned}
$$

たとえば配分 $(x, y, z) = (6, 0, 14)$ に対する不満は上から $0, -6, -20, -6, 0, -14$ となる。マイナスの不満とは満足度を表すと考えればよい。上の式をすべて足し合わせると

$$14 - 3(x + y + z) = -46$$

となるから不満の合計は一定である。しかしそれに偏りがあることは望ましくない。より公平な配分を考えるにはできるだけ不満を均等化することが求められるであろう。そこでまず不満の内最も大きいものをなるべく小さくすることを考える。最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$6 - (x + y) \leqq m,\ 8 - (y + z) \leqq m,\ -(x + z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$x + y + z = 20$ より $-(x + y) = z - 20$, $-(y + z) = x - 20$, $-(x + z) = y - 20$ であるから上記の条件は

$$-m \leqq x \leqq 12 + m,\ -m \leqq y \leqq 20 + m,\ -m \leqq z \leqq 14 + m$$

と書き直される。ここで $m = -6$ とすると

$$6 \leqq x \leqq 6,\ 6 \leqq y \leqq 14,\ 6 \leqq z \leqq 8$$

となる。これらを満たす (x, y, z) は存在する。しかし $m = -7$ とすると最初の条件が $7 \leqq x \leqq 5$ となり，それを満たす x はないから -6 が最大の不満を最小化した値である。

これで $x = 6$ および $y + z = 14$ が決まる。その前提で各提携（1 人の場合も提携と呼ぶことにする）の不満を求めると

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = -y \\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = -6 \\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = -6 - z \\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -6 \\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y \\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z
\end{aligned}$$

が得られる。-6 が 2 つあるので 3 番目に大きい不満ができるだけ小さくなるように考えよう。すると $y + z = 14$ という条件のもとで $y = 7$, $z = 7$ が得られる。したがって $(x, y, z) = (6, 7, 7)$ が最も望ましい配分である。このようにして求められた配分を「仁」と呼ぶ。プレイヤーの数が多く 3 番目に大きい不満を最小化することで配分が確定しない場合にはさらに 4 番目，5 番目 $\cdots$ と配分が確定するまで続ける。

「仁」は不満を均等化する配分ではなく，「最大の不満を最小化し，その上で次の不満を最小化する。さらに次の不満を最小化する」というプロセスを配分が確定するまで続けて得られる配分である。不満の合計は一定なので不満を完全に均等化するような配分があればそれが仁となるが，そのような不満があるとは限らない。なお，不満を均等化するというのはもちろん配分を均等化することではない。

■コアが存在しない場合の仁　仁は不満を最小化するという条件で求められるものであり，コアの条件を課すわけではないのでコアがなくても仁は存在する。ただしその場合は正の不満が残ることになるので，一部のグループが全体の提携から抜けることも考えられる。

特性関数が次のようであるとする。

$$v(\{A, B\}) = 7,\ v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 6,\ v(\{A, B, C\}) = 10$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とするとこれらがコアに含まれるためには次の条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 10$$

$$x + y \geqq 7,\ y + z \geqq 8,\ x + z \geqq 6$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$x+y \geqq 7$, $y+z \geqq 8$ なので $z \leqq 3$, $x \leqq 2$ でなければならない。しかしそれでは $x+z \geqq 6$ が成り立たない。したがってこのゲームにはコアが存在しない。しかし仁は定義できる。このゲームでは各提携の不満は次のように表される。

$$\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=7-(x+y)$$
$$\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=8-(y+z)$$
$$\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=6-(x+z)$$
$$\{A\}:\ v(\{A\})-x=-x$$
$$\{B\}:\ v(\{B\})-y=-y$$
$$\{C\}:\ v(\{C\})-z=-z$$

すべて足し合わせると

$$21-3(x+y+z)=-9$$

となってやはり一定である。最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$7-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 6-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$m=\frac{1}{3}$ とすると

$$x+y \geqq \frac{20}{3},\ y+z \geqq \frac{23}{3},\ x+z \geqq \frac{17}{3},\ x \geqq \frac{1}{3},\ y \geqq \frac{1}{3},\ z \geqq \frac{1}{3}$$

が得られ，これらの式から

$$x=\frac{7}{3},\ y=\frac{13}{3},\ z=\frac{10}{3}$$

が求まる。このとき

$$x+y=\frac{20}{3}<7,\ y+z=\frac{23}{3}<8,\ x+z=\frac{17}{3}<6$$

であるから 2 人ずつの提携には不満が残る。

$m=\frac{1}{3}$ を求める。

$$7-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 6-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

と $x+y+z=10$ より

$$-m \leqq x \leqq 2+m,\ -m \leqq y \leqq 4+m,\ -m \leqq z \leqq 3+m$$

が得られる。先の例と同じ手順で $m=-1$ が最小化された最大の不満となりそうに思われるが，一方で不等式の右辺の和は 10 以上でなければならないので $9+3m \geqq 10$ から

$$m \geqq \frac{1}{3} > -1$$

となる。この $\frac{1}{3}$ が最小化された最大の不満である。

先の例では

$$-m \leqq x \leqq 12+m,\ -m \leqq y \leqq 20+m,\ -m \leqq z \leqq 14+m$$

の右辺の和が 20 以上であるという条件 $46+3m \geqq 20$ より $m \geqq -\frac{26}{3}(<-6)$ となるので $m=-6$ が最小化された最大の不満であることに問題はない。

■より簡単な例–2 人の共同事業　もっと簡単な例を考えてみよう。2 人の人，A，B がいてある共同事業をしたときの収益の分け方を話し合っているものとする。共同事業をすれば 2000 万円の収益が得られるが，それぞれ 1 人 1 人が単独で行えば A が 100 万円，B は 200 万円の収益しか得ることができない。このゲームの特性関数は

$$v(\{A\})=100,\ v(\{B\})=200,\ v(\{A,B\})=2000$$

と表される。共同事業を行ったときの A，B の取り分を x_A，x_B とする。これらは次の条件を満たさなければならない。

$$x_A+x_B=2000,\ x_A \geqq 100,\ x_B \geqq 200$$

この条件を満たす x_A，x_B の集合がこのゲームのコアをなす。$(x_A,x_B)=(1800,200)$，$(x_A,x_B)=(100,1900)$ などコアに含まれる配分はたくさんある。次に仁を求めよう。このゲームでは提携は $\{A\}$，$\{B\}$，$\{A,B\}$ の 3 つしかないが，2 人の提携に対する 1 人だけの提携の不満は

$$\{A\}:\ v(\{A\})-x_A=100-x_A$$
$$\{B\}:\ v(\{B\})-x_B=200-x_B$$

となる。2 人の不満を最小にするにはその不満を均等にすればよい。したがって

$$x_B-x_A=100$$

が成り立つことが求められる。これから $(x_A,x_B)=(950,1050)$ という配分が仁であることがわかる。

4.10.3　シャープレイ値

仁を計算したものと同じ例を用いる。ここで紹介するシャープレイ値 (Shapley value) は仁とは異なった観点から望ましい配分を求めようとするものである。シャープレイ値では提携が形成される際の各プレイヤーの貢献度が重要な意味を持つ。例えば提携 $\{A,B\}$ に C が加われば提携 $\{A,B,C\}$ が作られる，そのときの C の貢献度は $v(\{A,B,C\})-v(\{A,B\})=$

14 となる。A が 1 人だけいるところに B が加われば提携 $\{A, B\}$ が作られる，そのときの B の貢献度は $v(\{A, B\}) - v(\{A\}) = 6$ である。また A 単独の提携については $v(\{A\})$ の値を貢献度とする。A が 1 人だけいるところに B が加わり，さらに C が加わって全員の提携が作られる過程を $A \to AB \to ABC$ と表す。同様にして B が 1 人だけいるところに C が加わり，さらに A が加わって全員の提携が作られる過程は $B \to BC \to ABC$ と表される。このときの提携 $\{B, C\}$ における C の貢献度は $v(\{B, C\}) - v(\{B\}) = 8$，提携 $\{A, B, C\}$ における A の貢献度は $v(\{A, B, C\}) - v(\{B, C\}) = 12$ である。このような過程は全部で 6 つある。まず各提携における各プレイヤーの貢献度を次のような一覧表で表してみる。

	A	B	C
$\{A, B, C\}$	20-8=12	20-0=20	20-6=14
$\{A, B\}$	6	6	–
$\{A, C\}$	0	–	0
$\{B, C\}$	–	8	8
$\{A\}$	0	–	–
$\{B\}$	–	0	–
$\{C\}$	–	–	0

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	0	6	14
$A \to AC \to ABC$	0	20	0
$B \to AB \to ABC$	6	0	14
$B \to BC \to ABC$	12	0	8
$C \to AC \to ABC$	0	20	0
$C \to BC \to ABC$	12	8	0

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均（期待値）を求めると A，B，C それぞれ 5，9，6 である。この値の組がシャープレイ値であり，それにもとづいた配分 $(x, y, z) = (5, 9, 6)$ が貢献度を基準とした望ましい配分ということになる。

■より簡単な例–2 人の共同事業　仁の所で考えた A，B2 人の共同事業の例を見てみよう。共同事業から得られる収益は 2000 万円で，それぞれ 1 人 1 人が単独で行えば A が 100 万円，B は 200 万円の収益しか得ることができないと想定されていて，特性関数は

$$v(\{A\}) = 100,\ v(\{B\}) = 200,\ v(\{A, B\}) = 2000$$

のように表された。共同事業を行ったときの A，B の取り分を x_A，x_B とする。2 人の場合は提携の作り方が $A \to AB$ と $B \to AB$ しかない。貢献度を表にすると

	A	B
$A \to AB$	100	1900
$B \to AB$	1800	200

この表からシャープレイ値は $(950, 1050)$ であることがわかる。この配分は仁によるものと一致する。

シャープレイ値の公理

シャープレイ値は次の 4 つの条件（公理）を満たす唯一の解であることが知られている。

(1).「全体合理性」
全員の提携によって実現する利得のすべてが全員に配分されるということである。本文の表からもわかるように全員の提携が作られるプロセスにおける各プレイヤーの貢献度の和は全員の提携から得られる利得に等しい。したがって貢献度の平均値をもとに配分を決めるシャープレイ値は全体合理性を満たす。

(2).「ナルプレイヤー (null player) のゼロ評価」
ナルプレイヤーとはいかなる提携の形成にあたっても何の貢献もしないプレイヤーを意味する。あるプレイヤーを含む提携の特性関数の値と，そのプレイヤーだけを除いた提携の特性関数の値とが常に等しいとき，そのプレイヤーはナルプレイヤーとなる。この条件はそのようなナルプレイヤーの配分はゼロであることを要求する。すべての提携においてあるプレイヤーの貢献度がゼロならばそのシャープレイ値もゼロであるからこの条件は満たされている。

(3).「対称性：貢献度の等しいプレイヤーに対する配分はすべて等しくする」
プレイヤー i と j の貢献度が等しいというのは，i，j を含まない任意の提携に i が加わってできる提携の特性関数の値と j が加わってできる提携の特性関数とが等しいことを意味する。貢献度の平均値をもとに配分を決めるシャープレイ値はこの条件も満たす。

(4).「加法性」
同じプレイヤーの集合からなる 2 つのゲーム G_1，G_2 における任意の提携 S の特性関数をそれぞれ $v_1(S)$，$v_2(S)$，各ゲームにおけるプレイヤー i のシャープレイ値を $\varphi_i(v_1)$，$\varphi_i(v_2)$ とするとき

$$v(S) = v_1(S) + v_2(S)$$

という特性関数を持つゲーム G におけるプレイヤー i のシャープレイ値 $\varphi_i(v_1 + v_2)$ は

$$\varphi_i(v_1 + v_2) = \varphi_i(v_1) + \varphi_i(v_2)$$

に等しい。

各プレイヤーの G における各提携についての貢献度は G_1，G_2 における貢献度の和に等しくなるからシャープレイ値はこの条件を満たす。

■コア，仁，シャープレイ値の問題の例　3 人のプレイヤー A，B，C がいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\}) = 1,\ v(\{B\}) = 0,\ v(\{C\}) = 2$$

$$v(\{A, B\}) = 6,\ v(\{B, C\}) = 7,\ v(\{A, C\}) = 11$$

$$v(\{A, B, C\}) = 25$$

(1). **コア**

3 人で提携を結んだときの A，B，C の取り分を x，y，z とする。コアの条件は次のように表される。

$$x + y + z = 25,\ x \geqq 1,\ y \geqq 0,\ z \geqq 2$$

$$x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 7,\ x + z \geqq 11$$

これらの条件を満たす配分の集合がコアである。条件より $1 \leqq x \leqq 18$, $0 \leqq y \leqq 14$, $2 \leqq z \leqq 19$ でなければならない。

(2). **仁**

各提携の不満は以下のようである。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 6 - (x + y)\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 7 - (y + z)\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 11 - (x + z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = 1 - x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = 2 - z
\end{aligned}$$

最大の不満の大きさを m とすると

$$6 - (x + y) \leqq m,\ 7 - (y + z) \leqq m,\ 11 - (x + z) \leqq m,\ 1 - x \leqq m,\ -y \leqq m,\ 2 - z \leqq m,$$

が得られる。$x + y + z = 24$ よりこれらの条件は次のように書き直される。

$$1 - m \leqq x \leqq 18 + m,\ -m \leqq y \leqq 14 + m,\ 2 - m \leqq z \leqq 19 + m$$

x，y，z の式がそれぞれ等式になる場合を考えると，$1 - m = 18 + m$，$-m = 14 + m$，$2 - m = 19 + m$ より各々 $m = -\frac{17}{2}$，$m = -7$，$m = -\frac{17}{2}$ を得る。この内最大のものは $m = -7$ であるから，これが最小化された最大の不満である。そうすると

$$8 \leqq x \leqq 11,\ 7 \leqq y \leqq 7,\ 9 \leqq z \leqq 12$$

となり $y = 7$ が決まる。$m = -\frac{17}{2}$ とすると $\frac{17}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2}$ となり矛盾が生じる。
$y = 7$ とすると各提携の不満は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = -1 - x\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = -z\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 11 - (x + z) = -7\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = 1 - x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -7\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = 2 - z
\end{aligned}$$

値が決まっていない不満の最大値を最小化することを考えると $1 - x$ と $2 - z$ を等しくすることになるので $x = \frac{17}{2}$，$z = \frac{19}{2}$ が求まる。したがって仁となる配分は $(x, y, z) = (\frac{17}{2}, 7, \frac{19}{2})$ である。

(3). **シャープレイ値**

各提携における各プレイヤーの貢献度は次の表で表される。

	A	B	C
$\{A, B, C\}$	25-7=18	25-11=14	25-6=19
$\{A, B\}$	6	5	–
$\{A, C\}$	9	–	10
$\{B, C\}$	–	5	7
$\{A\}$	1	–	–
$\{B\}$	–	0	–
$\{C\}$	–	–	2

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	1	5	19
$A \to AC \to ABC$	1	14	10
$B \to AB \to ABC$	6	0	19
$B \to BC \to ABC$	18	0	7
$C \to AC \to ABC$	9	14	2
$C \to BC \to ABC$	18	5	2

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均を求めると A，B，C それぞれ $\frac{53}{6}$，$\frac{19}{3}$，$\frac{59}{6}$ であるからシャープ

レイ値にもとづく配分は $(x, y, z) = (\frac{53}{6}, \frac{19}{3}, \frac{59}{6})$ である。

4.11　企業立地の問題：ホテリングのモデル

ごく簡単なモデルで企業立地の問題を考えてみる。東西に範囲の決まった（有限の長さを持つ）1 本の道路の両側に一定の密度で（均等に）人が住んでいるものとする。2 つのアイスクリーム屋（かき氷屋でもよい）A，B がこの道路のどこかに店を出す。道路の長さを 1，人口も全体として 1 とし，店の大きさは無視する。したがって同じ場所に店を出すことも可能である。アイスクリームの価格は一定で 1 であるとする。また費用は 0 であると仮定する。A，B それぞれが店を出す場所を西の端からの距離で表し，x_A，x_B と書く $(0 \leqq x_A \leqq 1, 0 \leqq x_B \leqq 1)$。人々は自分の家から近い店に行く。同じ距離ならば確率 $\frac{1}{2}$ でどちらの店にも行くものとする。$x_A < x_B$（A の方が西）とすると A，B が獲得できるお客さんの数（それが利潤に等しい）π_A，π_B はそれぞれ

$$\pi_A = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$\pi_B = 1 - x_B + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = 1 - \frac{x_A + x_B}{2}$$

となる。A が B と同じ場所に店を出したとすると利潤は等しく

$$\pi_A = \pi_B = \frac{1}{2}$$

である。また A が B を越えて東側に店を出した $(x_A = x_B + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ として，ε はごく小さい数) ときの利潤は

$$\pi_A = 1 - \frac{2x_B + \varepsilon}{2}$$

であり，逆に B が A を越えて西側に店を出した $(x_B = x_A - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ として) ときの利潤は

$$\pi_B = \frac{2x_A - \varepsilon}{2}$$

である。A にとって最適な戦略を考えてみよう。$x_A < x_B$ の範囲で考えるとなるべく B に近い所に立地した方が利潤が大きくなるので最適な戦略は $x_B - \varepsilon$ であり，そのときの利潤は $\frac{2x_B-\varepsilon}{2} = x_B - \frac{\varepsilon}{2}$，B と同じ場所に立地したときの利潤は $\frac{1}{2}$，B より東側に立地したときの利潤は $1 - \frac{2x_B+\varepsilon}{2} = 1 - x_B - \frac{\varepsilon}{2}$ であるから，A の最適反応は次のようになる。

(1). $x_B < \frac{1}{2}$ のとき B より東側に隣接して（ε の距離で）立地するのが最適
(2). $x_B = \frac{1}{2}$ のとき B と同じ場所に立地するのが最適
(3). $x_B > \frac{1}{2}$ のとき B より西側に隣接して立地するのが最適

次に B について考えてみよう。$x_A < x_B$ の範囲で考えるとなるべく A に近い所に立地した方が利潤が大きくなるので最適な戦略は $x_A + \varepsilon$ であり，そのときの利潤は

$1-\frac{2x_A+\varepsilon}{2}=1-x_A-\frac{\varepsilon}{2}$，A と同じ場所に立地したときの利潤は $\frac{1}{2}$，A より西側に立地したときの利潤は $\frac{2x_A-\varepsilon}{2}=x_A-\frac{\varepsilon}{2}$ であるから，B の最適反応は次のようになる。

(1). $x_A<\frac{1}{2}$ のとき A より東側に隣接して（ε の距離で）立地するのが最適
(2). $x_A=\frac{1}{2}$ のとき A と同じ場所に立地するのが最適
(3). $x_A>\frac{1}{2}$ のとき A より西側に隣接して立地するのが最適

それぞれ相手が中央よりも西側にいるときにはそれに隣接して東側に立地するのが最適であるが，お互いにそうすることはできないのでナッシュ均衡にはならない。同じように相手が中央よりも東側にいるときにはそれに隣接して西側に立地するのが最適であるが，お互いにそうすることはできないのでナッシュ均衡にはならない。したがってナッシュ均衡は「ともに中央に立地する ($x_A=x_B=\frac{1}{2}$)」という戦略の組み合わせである。

この議論は政党が選択する政策の問題に応用されている。ある政策に対する政党の提案について 1 本の線分上に並べられるような対立軸，有権者の考え方の違いがあるものとしよう（昔で言う左翼，中道，右翼のように）。それを 0 から 1 までの数字で表し，その間に有権者の考え方が均等に分布している（均等でなければ適当に目盛りを変えて均等に分布するようにすればよい）。有権者の人数が n 人（わかりやすくするために n は奇数であるとする）であるとすると 0 から順番に数えて中央に位置する（$\frac{n+1}{2}$ 番目の）人は丁度真ん中の位置（$\frac{1}{2}$ の所）に位置する考え方を持つ。このときある 1 つの提案を巡って賛否を問うと，中央の人が賛成ならば過半数が賛成となって可決され（左翼的な案でも，右翼的な案でも），中央の人が反対ならば過半数が反対となって否決される。このように 1 つの提案が可決されるか否決されるかは中央の人がその案に賛成か反対かで決まる。このことを「中位投票者定理 (median voter theorem)」と呼ぶ。

2 つの政党 A，B があって上で仮定したような対立軸がある問題についてそれぞれが提案を行う。各政党はより多くの支持者を獲得しようと考える。各投票者は自分の考えに近い方の案を選ぶ。これはゲームとしてはアイスクリーム屋の立地の問題と同じ構造をしており，相手の政党が左翼的な案を出してくればそれより少し右翼的な案を出せば勝てるし，逆に相手が右翼的な案を出してくればそれより少し左翼的な案を出せば勝てる。結局，ともに中間の案を出すことがナッシュ均衡となる。したがって二大政党体制においては両政党の政策が似通ってきてともに中間的なものになるとされる。

4.12　鹿狩ゲームと危険支配

プレイヤー 2

プレイヤー 1		ソフト X	ソフト Y
	ソフト X	4, 4	0, 2
	ソフト Y	2, 0	3, 3

表のゲームを考える。(X, X) と (Y, Y) がナッシュ均衡であり，(X, X) がパレート効率的である。Y を選んでいるプレイヤーは相手が X でも多少の利得が得られるのに対して X を選んでいるプレイヤーは相手が X でなければ利得を得ることはできない。それだけ X を選ぶことは危険を伴う。

(Y, Y) という均衡は危険支配的 (risk dominant) であると言う。この例のようなゲームは stag hunt ゲーム（鹿狩ゲーム）と呼ばれる。二人の狩人が鹿または兎を取りに行く。ともに同じ戦略を選べば協力して獲物を得られるが，異なる戦略を選んだ場合は兎だけが少し取れて鹿は取れない。X が鹿を，Y が兎を取りに行く戦略と考える。ともに鹿を取りに行くのが望ましい均衡である（利得支配的 (payoff dominant) と言う，パレート効率性の意味で優れているということでもある）が，鹿を取りに行くと何も取れない可能性があるので利得の構造によってはともに兎を取りに行く均衡が危険支配的になる。

■危険支配の一般的な議論　次のゲームを考える。

プレイヤー 2

プレイヤー 1		X	Y
	X	a_1, a_2	b_1, c_2
	Y	c_1, b_2	d_1, d_2

(X, X), (Y, Y) ともにナッシュ均衡であるとする。したがって，$a_1 > c_1$, $d_1 > b_1$, $a_2 > c_2$, $d_2 > b_2$ である。プレイヤー 1 の立場に立って相手（プレイヤー 2）が確率 q で X を，確率 $1 - q$ で Y を選ぶとする。このゲームにおいてプレイヤー 1 が X，Y を選んだときの期待利得はそれぞれ

$$E(X) = qa_1 + (1 - q)b_1$$

$$E(Y) = qc_1 + (1 - q)d_1$$

であり，$E(X) > E(Y)$ となるのは

$$q(a_1 - c_1) + (1 - q)(b_1 - d_1) > 0$$

すなわち

$$q > \frac{d_1 - b_1}{(a_1 - c_1) + (d_1 - b_1)} = \bar{q}$$

のときである。一方，プレイヤー 2 の立場に立って相手（プレイヤー 1）が確率 p で X を，確率 $1 - p$ で Y を選ぶとすると

$$1 - p > \frac{a_2 - c_2}{(a_2 - c_2) + (d_2 - b_2)} = 1 - \bar{p}$$

であればプレイヤー 2 にとって Y を選んだときの期待利得が X を選んだときの期待利得より大きい。$\bar{q} < 1 - \bar{p}$ ならば上の式が成り立つ可能性の方が下の式が成り立つ可能性よ

り大きいので，プレイヤー 2 が Y にこだわることによって招く危険（リスク）がプレイヤー 1 が X にこだわることによって招く危険（リスク）より大きいと言える。逆に見ればこのとき $\bar{p} < 1 - \bar{q}$ が満たされるのでプレイヤー 1 が Y にこだわることによって招く危険（リスク）がプレイヤー 2 が X にこだわることによって招く危険（リスク）より大きい。このときともに X を選ぶ均衡がともに Y を選ぶ均衡に対して危険支配的となる。その条件は

$$\frac{d_1 - b_1}{(a_1 - c_1) + (d_1 - b_1)} < \frac{a_2 - c_2}{(a_2 - c_2) + (d_2 - b_2)}$$

であるが，両辺の分子・分母が正（なぜか？）なので

$$\frac{(a_1 - c_1) + (d_1 - b_1)}{d_1 - b_1} > \frac{(a_2 - c_2) + (d_2 - b_2)}{a_2 - c_2}$$

と書け

$$(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) > (d_1 - b_1)(d_2 - b_2)$$

となる。この式は各プレイヤーが X を選ぶ均衡から自らはずれることによって失う利得の積が Y を選ぶ均衡から自らはずれることによって失う利得の積より大きいことを意味している。逆の場合 Y を選ぶ均衡が X を選ぶ均衡に対して危険支配的である。

対称的なゲームであれば，$a_1 = a_2$，$b_1 = b_2$，$c_1 = c_2$，$d_1 = d_2$ なので，これらを a，b，c，d とすると上記の条件は

$$a - c > d - b$$

となる。これは各プレイヤーにとって相手が X，Y を等しい確率で選ぶと想定したときに X を選ぶ方がよいという条件になっている。

上の例では $a = 4$，$b = 0$，$c = 2$，$d = 3$ であるから，ともに Y を選ぶ（兎を取りに行く）均衡が危険支配的である。そうなるのは相手が兎を取りに行っているときに自分が鹿を取りに行った場合の損失が大きいからである。

演習問題

1. p を価格，x を需要または供給として，ある財の需要曲線が

$$p = 240 - 2x$$

供給曲線が

$$p = 6x + 16$$

のように表されるとき，この財の均衡価格と均衡取引量を求め，均衡を図示せよ。同様に次のような需要・供給曲線について同じ計算をし，均衡を図示せよ。

$$p = 200 - 4x \text{（需要曲線）}$$

$$p = 2x + 20 \text{（供給曲線）}$$

2. ある財の価格が 100 円から 150 円に値上がりしたときの需要の価格弾力性と，逆に 150 円から 100 円に値下がりしたときの需要の価格弾力性とが異なった値をとる可能性があることを例を上げて確認せよ。
3. ある財の価格が 100 円から 200 円に値上がりしたときの供給の価格弾力性と，逆に 200 円から 100 円に値下がりしたときの供給の価格弾力性とが異なった値をとる可能性があることを例を上げて確認せよ。
4. 需要曲線のシフトが財の価格や取り引き量に与える効果について，供給曲線の傾きが大きいときと小さいときとでどのように異なるかを図を描いて説明せよ。また第 1 問で用いられているものと同様の需要・供給曲線を使って数値例を 1 つ作れ。需要曲線のシフトは平行移動と考えればよい。
5. 供給曲線のシフトが財の価格や取り引き量に与える効果について，需要曲線の傾きが大きいときと小さいときとでどのように異なるかを図を描いて説明せよ。また第 1 問で用いられているものと同様の需要・供給曲線を使って数値例を 1 つ作れ。供給曲線のシフトは平行移動と考えればよい。
6. 消費税の税率が引き下げられたときに財の価格や取り引き量がどのように変化するかを需要曲線，供給曲線のシフトの考え方にもとづいて検討せよ。また，消費税の税率の引き下げと合わせて所得税の増税が行われた場合にはどうなるか。

7. 発泡酒（あるいは第３のビール）にかかる税金を引き上げた場合に，発泡酒とビールの価格や販売量に与える影響を検討せよ。市場メカニズムにもとづいた取引を前提とする。
8. どのような場合に，またなぜワルラスの調整過程が安定，不安定になるかを図を描いて説明せよ。
9. どのような場合に，またなぜマーシャルの調整過程が安定，不安定になるかを図を描いて説明せよ。
10. くもの巣の調整過程はどのような場合に，またなぜ安定，不安定になるかを図を描いて説明せよ。
11. p を価格，x を需要または供給として，ある財の需要曲線が
$$p = 240 - 2x$$
供給曲線が
$$p = 6x + 16$$
のときのくもの巣の調整過程の安定性を等比数列を用いて分析せよ。
12. p を価格，x を需要または供給として，ある財の需要曲線が
$$p = 200 - 4x$$
供給曲線が
$$p = 2x + 20$$
のときのくもの巣の調整過程の安定性を等比数列を用いて分析せよ。
13. X 財と Y 財の消費を考える。同じ人の 2 つの無差別曲線は交わってはならない。なぜか？ 図を描いて説明せよ。
14. 無差別曲線は「線」であって幅があってはならない。なぜか？
15. X 財と Y 財の消費を考える。異なる 2 人の無差別曲線を同じ図に描いたときにこれらは交わってもよい。傾きの大きさの違いは何を表していると考えられるか？
16. 所得消費曲線（所得の変化と消費の変化の関係を表す曲線）が右上がりであるが直線ではないケースを，いくつかの無差別曲線と予算制約線を用いて図に描いてみよ。
17. X 財の消費量を横軸に，Y 財の消費量を縦軸にとって，X 財が下級財となるケースを図示せよ。
18. 横軸に X，縦軸に Y の消費量をとって，Y の価格が下落した場合の代替効果と所得効果を図を描いて説明せよ。
19. 横軸に X，縦軸に Y の消費量をとって，Y の価格が上昇した場合の代替効果と所得効果を図を描いて説明せよ。

20. 横軸に X，縦軸に Y の消費量をとって，X の価格が上昇した場合の代替効果と所得効果を図を描いて説明せよ。
21. 横軸に X，縦軸に Y の消費量をとって，Y がギッフェン財になっているケースを図で表してみよ。
22. 下級財とギッフェン財の関係，意味の違いを代替効果，所得効果に着目して説明せよ。
23. 「序数的効用」，「基数的効用」の意味と違いを説明せよ。
24. 現在の消費，将来の消費によって効用を得る消費者の無差別曲線を図に描き，人によってその傾きが異なる場合，その違いの意味を説明せよ。
25. 現在の消費，将来の消費によって効用を得る消費者について，利子率が上昇したときに貯蓄が減少するケース，増加するケースを，代替効果，所得効果に着目して図を描いて説明せよ。
26. 現在の消費，将来の消費によって効用を得る消費者について，利子率が下落したときに貯蓄が減少するケース，増加するケースを，代替効果，所得効果に着目して図を描いて説明せよ。
27. 余暇と消費（あるいは所得）に関する無差別曲線と予算制約線によって個人の労働供給を分析する図において，予算制約線はどのようにして導かれるか？
28. 賃金率の上昇によって労働供給が減少するケースを図に描くとともに，そのときの代替効果，所得効果について説明せよ。
29. 2 人の消費者 A，B，2 つの財 X，Y からなる交換経済を考える。初期において消費者はともに両財をいくらか保有しているが A は Y 財を，B は X 財を多く持っているものとする。X 財の価格が上昇したときに Y 財の消費量が増加するケースを消費者 A，B それぞれについて図を描いて説明せよ。
30. 交換経済の均衡について

    (1) 交換経済の均衡はパレート効率的（最適）である。

    (2) あるパレート効率的な点は初期保有量を適当にとることによって交換経済の均衡となるようにすることができる。

    が成り立つが，第 29 問のような 2 人の消費者からなるケースについて，各個人の消費を表す（無差別曲線，予算制約線によって描かれた）図からこの (1)，(2) を証明する図を導き出す手順を説明し，これらが成り立つことを示せ。
31. 2 人の消費者 A，B，2 つの財 X，Y からなる交換経済を考える。A，B の X 財，Y 財の消費量をそれぞれ x_A，x_B，y_A，y_B，初期保有量を $\bar{x}_A$，$\bar{x}_B$，$\bar{y}_A$，$\bar{y}_B$ と表すが，具体的に

    $$\bar{x}_A = 8,\ \bar{x}_B = 12,\ \bar{y}_A = 24,\ \bar{y}_B = 12$$

    であるとする。また A，B の効用関数がそれぞれ $x_A y_A$，$x_B y_B^2$ であると仮定する。このとき交換経済の均衡相対価格を求めよ。

32. x，y を X 財，Y 財の消費量，p_x，p_y をそれぞれの価格，消費者の効用関数を $u = xy^3$，予算制約式を $p_x x + p_y y = 12000$ としてラグランジュ乗数法を用いて効用最大化問題を解き，それが最大化（極大化）であることを確認せよ。
33. 前問と同じ設定において消費者の効用関数が $u = x^2 y^3$，予算制約式が $p_x x + p_y y = 20000$ のときにラグランジュ乗数法を用いて効用最大化問題を解き，それが最大化（極大化）であることを確認せよ。
34. 第 32 問をもとに，$p_x = 200$，$p_y = 300$ と仮定し，消費者の効用 $u = xy^3$ を一定の値 648 にして必要な予算を最小化する問題を解き，それが最小化であることを確認せよ。
35. 3 つの効用関数，$U = xy$，$U = 3xy + 120$，$U = x^2 y^2$ から導かれる無差別曲線が同一であることを確認せよ。x，y は X 財，Y 財の消費量（需要）である。
36. 上の問題において，X 財，Y 財の価格がそれぞれ $p_x = 100$，$p_y = 200$ で消費者の所得が 12000 のとき，上記の 3 つの効用関数から導かれる消費量が同じであることをラグランジュ乗数法を用いて確認せよ。またそれらの解が確かに効用最大化になっていることを確認せよ（1 つのケースだけでよい)。
37. ある人は働いて得た賃金をすべて Y 財の購入に使うものとする。1 年間に働く日数を $L (0 \leqq L \leqq 365)$ とすると働かない日は余暇であり，余暇の日数 x を $x = 365 - L$ で定義する。Y 財の消費量を y とするとこの人の効用は

$$u = x^2 y^3$$

と表されるものとする。Y 財の価格は 5,000 円，労働 1 日当りの賃金は 10,000 円であるとする。この人の効用を最大化する労働日数を求めよ。
38. 働いて得た賃金をすべて Y 財の購入に使う人がいる。1 年間に働く日数を $L (0 \leqq L \leqq \bar{L})$ として余暇の日数 x を $x = \bar{L} - L$ で定義する。Y 財の消費量を y とするとこの人の効用は

$$u = xy^2$$

と表されるものとする。Y 財の価格は 8,000 円，労働 1 日当りの賃金も 8,000 円であるとする。この人の効用を最大化する労働日数を求めよ。$\bar{L}$ は 1 年間の日数を表す。
39. 所得のすべてを X 財と Y 財の消費に使う個人について効用関数が

$$u = (x - 5)^3 (y - 10)^2 \text{（x は X 財の消費量，y は Y 財の消費量）}$$

であるとする。この人の所得が 100，X 財の価格が 3，Y 財の価格が 1 であるとき，効用を最大化する各財の消費量を求めよ。
40. 所得のすべてを X 財と Y 財の消費に使う個人について効用関数が

$$u = (2x - 3)^2 (y - 10) \text{（x は X 財の消費量，y は Y 財の消費量）}$$

であるとする。この人の所得が 164，X 財の価格が 4，Y 財の価格が 1 であるとき，効用を最大化する各財の消費量を求めよ。

41. 所得のすべてを今期，来期の消費に使う個人を考え，その効用関数が

$$u = C_1^2 C_2^3（C_1 \text{は今期の消費額，} C_2 \text{は来期の消費額}）$$

であるとする。今期，来期の所得がそれぞれ 100，120，（借り入れおよび貯金の）利子率が 0.2（20%）であるとき，効用を最大化する C_1，C_2 を求めよ。
また，改めて今期，来期の所得をそれぞれ 0，m，利子率を r であるとして間接効用関数を導き，ロイの恒等式を確認せよ。
さらにやはり今期，来期の所得をそれぞれ 0，m，利子率を r として支出最小化問題を解きマッケンジーの補題を確認せよ。

42. 所得のすべてを今期，来期の消費に使う個人を考え，その効用関数が

$$u = C_1^3 C_2（C_1 \text{は今期の消費額，} C_2 \text{は来期の消費額}）$$

であるとする。今期，来期の所得がそれぞれ 240，120，（借り入れおよび貯金の）利子率が 0.25（25%）であるとき，効用を最大化する C_1，C_2 を求めよ。
また，改めて今期，来期の所得をそれぞれ m，0，利子率を r であるとして間接効用関数を導き，ロイの恒等式を確認せよ。
さらにやはり今期，来期の所得をそれぞれ m，0，利子率を r として支出最小化問題を解きマッケンジーの補題を確認せよ。

43. 83 ページで述べた支出関数の導出を図を描いて説明せよ。

44. X，Y，Z，W の 4 財がある。各財の消費量，価格を x，y，z，w，p_x，p_y，p_z，p_w，所得を m とする。効用関数が

$$u = x^5 y^4 z^2 w$$

であるとき効用最大化問題と支出最小化問題を解き，通常の需要関数，補償需要関数を求めよ。

45. ある事故を保障する保険を考える。事故が起きたときの損害額は 20 であり，次の 2 つのタイプの人々がいるものとする。
   (i) タイプ 1：事故を起こす確率は $\frac{1}{10}$，効用関数は $u_1 = 800 + 160x - 4x^2$
   (ii) タイプ 2：事故を起こす確率は $\frac{1}{2}$，効用関数は同じ $u_2 = 800 + 160x - 4x^2$

   事故が起きないときの経済的利益は $x = 20$，起きたときは $x = 0$ である。保険会社は上記の 2 つのタイプの人々がいること，それぞれが事故を起こす確率，および効用関数は知っているが誰がどのタイプかはわからない（もちろん本人はわかっている）ものとする。またタイプ 1 の人々よりタイプ 2 の人々の方が人数が多く，その比は 1 : 2 であることがわかっている。
   以下の問に答えよ。

(i) 全額保障される保険があるとしてタイプ 1，タイプ 2 の人々はそれぞれいくらまで保険料を払うか？ またタイプ 1 とタイプ 2 の人々が同数いるとしてこの保険は採算がとれるか？ 両方のタイプの人々が加入するように保険料を決めるものとする。

(ii) 2 種類の保険を作り各タイプの人々が異なる保険を購入するように仕向ける方法を具体的に考えよ。

46. 生産関数 $x = \sqrt{LK}$（x は産出量，L，K は労働，資本投入量）から等産出量曲線（等量曲線）を導け。
47. 等産出量曲線は右上がりか，右下がりか？ またなぜか？
48. 同じ財の 2 つの等産出量曲線は交わってはならない。なぜか？
49. 異なる 2 つの財の等産出量曲線を同じ図に描いたとき，それらは交わってもよい。そのとき 2 つの等産出量曲線の傾きの大きさの違いが意味することを説明せよ？
50. 企業の費用最小化問題において賃金が安くなったときの生産方法の変化を図示して説明せよ。
51. 企業の費用最小化問題において資本レンタル（資本の報酬）が低くなったときの生産方法の変化を図示して説明せよ。
52.「労働」と「資本」が企業の生産要素であると見なしたとき，資本の価格とは何を指すと考えられるかを述べよ。
53. 限界費用が平均費用より大きいときに産出量の増加によって平均費用はどうなるか？ 理由を含めて説明せよ。小さいときはどうか？
54.

$$C(x) = 3x^2 + 100$$

で表される費用関数を持つ企業について財の価格が 48 のときの利潤を最大にする産出量とそのときの利潤を微分を用いずに求めよ。x は産出量であり，完全競争を前提とする。

55. 完全競争市場において財を生産・販売しているある企業の費用関数が

$$c = x^3 - 7x^2 + 2x + 4 \text{（x は産出量）}$$

であるとする。またこの企業の財の価格は 26 である。

(i) 利潤を最大化する産出量を求めよ。

(ii) 1 単位当りある額の従量税が課されたときに産出量が 1 減る場合，その従量税がいくらであるか求めよ。

56. 完全競争における企業の利潤を次のように表す。

$$\pi = px - wL - rK$$

$$\text{ただし } x = 6L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}} \text{（生産関数）}$$

x：財の産出量，p：財の価格，L：労働投入量，K：資本投入量：w：賃金率，
r：資本レンタル（資本の価格）

(i) 利潤を最大にする L，K の値，およびそのときの利潤を求めよ。

(ii) 利潤を最大にするような労働，資本の投入量と財の産出量を $\tilde{L}(p,w,r)$，$\tilde{K}(p,w,r)$，$\tilde{x}(p,w,r)$ と表す。またそのときの利潤を $\tilde{\pi}(p,w,r)$ と表す。このとき

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial p}=\tilde{x}(p,w,r),\quad \frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial w}=-\tilde{L}(p,w,r),\quad \frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial r}=-\tilde{K}(p,w,r)$$

が成り立つことを示せ。

57. 本文で述べたように短期の費用が

$$C(x)=K+\frac{x^2}{K}$$

で表されるとき，長期の費用は

$$C_L(x)=2x$$

と表される。短期の費用，長期の費用の関係を図を描いて説明せよ。ただし，K は生産設備の大きさ，x は産出量である。

58. ある企業の短期費用関数が

$$c=(3x-K)^3+K^3+8\ (K\text{ は生産設備，}x\text{ は産出量})$$

であるとする。K は短期には調整できないが長期には調整可能である（調整費用はかからない)。この企業の長期費用関数を求めよ。

59. 完全競争市場における長期均衡とはどのような状態を指すか，図を描いて説明せよ。また，その長期均衡において企業の株主はどのような状態に置かれているかを述べよ。

60. 独占企業にとっての価格と限界収入の違いを言葉および図で説明せよ。

61. 独占企業と完全競争における企業の行動の違いについて言葉で説明せよ。

62.

$$C(x)=4x^2+300\ (x\text{ は産出量})$$

で表される費用関数を持つ独占企業について，財の需要曲線が次のように与えられるとき利潤を最大にする産出量とそのときの利潤の大きさを微分を用いずに求めよ。

$$p=280-3x\ (x\text{ は需要})$$

63. 独占的競争の均衡を図示し，その均衡において限界費用曲線がどのような形になっていなければならないかを理由を含めて説明せよ。

64. 独占的競争と完全競争の共通点および相違点について説明せよ。
65. X 財を生産する競争的な企業 A があり財の価格は 160，費用関数は産出量を x として

$$c_A = 2x^2$$

で表される。一方 Y 財を生産する競争的な企業 B があって財の価格は 120，費用関数は産出量を y として

$$c_B = y^2 + xy$$

であるとする。

(i) 各企業が利潤を最大化するときの産出量を求めよ。
(ii) 両企業の利潤の合計を最大化するような各企業の産出量を求めよ。
(iii) (ii) の状態を実現するのに必要な企業 A に対する産出量 1 単位当りの税を求めよ。

66.

$$p = 20 - X$$

で表される需要関数のもとでのクールノーの複占モデルにおいて，企業 A の費用が $c(x) = 3x$，企業 B の費用が $c(y) = y$ で表される場合の各企業の産出量を求め，反応曲線を図示せよ。x，y は企業 A，B の産出量であり，X はその和である。
67. n 社の企業が同質財を生産するクールノーの寡占モデルを考える。n は正の整数である。各企業を i で表す。需要関数は

$$p = a - b\sum_{i=1}^{n} x_i,\ a > 0,\ b > 0$$

で表されるものとする。x_i は企業 i の産出量，p は財の価格である。また企業 i の費用関数は

$$c = dx_i + f,\ 0 < d < a,\ f > 0$$

であり，すべての企業に共通であるとする。f は生産しなくても必要となる固定費用である。

(i) 企業 i の利潤を最大化する産出量を求めよ。
(ii) 企業の利潤がゼロとなるような n の値を求め（この n は長期均衡における企業数である），f とその n の値の関係を調べよ。
(iii) 企業数が (ii) の n のときの財の価格を求めよ。f が 0 に近づくとどうなるか？

均衡においてすべての企業の産出量が等しくなることを用いてもよい。
68. 独占とクールノーの寡占における企業行動の違いについて説明せよ。

69. 差別化された財を生産する 2 つの企業 A，B がある。それぞれの産出量，価格を x_A，x_B，p_A，p_B とする。逆需要関数が

$$p_A = 24 - 2x_A + 2kx_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + 2kx_A$$

であり，企業 A，B の費用が

$$c_A = x_A$$

$$c_B = 2x_B$$

で表される。$k = \frac{1}{2}$ の場合と $k = -\frac{1}{2}$ の場合について，クールノー均衡とベルトラン均衡における各企業の産出量，各財の価格を求めよ。

70. 差別化された財を生産する 2 つの企業 A，B がある。それぞれの産出量，価格を x_A，x_B，p_A，p_B とする。逆需要関数が

$$p_A = 24 - 2x_A + x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + x_A$$

であり，企業 A，B の費用はともにゼロであるとする。このときクールノー均衡とシュタッケルベルク均衡（企業 A がリーダー，B がフォローワーとする）における各企業の産出量と利潤を求めよ。

71. ある財の 2 つの地域 1，2 での需要がそれぞれ次のように表される。

$$d_1 = 600 - p_1,\ d_1 \text{は地域 1 での需要},\ p_1 \text{は価格}$$

$$d_2 = 400 - 2p_2,\ d_2 \text{は地域 2 での需要},\ p_2 \text{は価格}$$

1 つの企業が独占的に両地域に財を供給しているとき，利潤を最大化する各地域での価格，供給量を求めよ。ただしこの企業の費用関数は

$$c = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},\ x_1,\ x_2 \text{は各地域での供給量}$$

である。

72.

$$X \text{ 財の限界代替率} < \frac{X \text{ 財の限界費用}}{Y \text{ 財の限界費用}}$$

が成り立つ状態において X 財の生産・消費の減少による Y 財の生産・消費の増加が消費者の効用を増加させることを確認せよ。

73. 2 財 X，Y，2 人の消費者 A，B，1 つの企業からなる経済を考える。個人 A は以下のような特徴を持つ。

効用関数は $u_A = x^2 y$，X 財の初期保有量は 200，Y 財の初期保有量は 0

個人 B は以下のような特徴を持つ。

効用関数は $u_B = xy^2$，X 財の初期保有量は 100，Y 財の初期保有量は 0

x，y は各財の消費量を表す。企業は X 財を入力して Y 財を生産し，その生産関数は

$y = 10\sqrt{2}\sqrt{x}$，x は X 財の投入量，y は Y 財の産出量

である。また企業の利潤は 2 人の個人に均等に分配される。

(i) X 財，Y 財の価格を p_x，p_y としてこの企業の利潤を表し，利潤を最大化する X 財の投入量，Y 財の産出量，およびそのときの利潤を p_x，p_y で表せ。企業は各財の価格を与えられたものとして意思決定を行うものとする。

(ii) 個人 A，B それぞれについて予算制約式（配分される企業の利潤，初期保有量の売却収入を含めて）を書き，p_x，p_y の価格のもとでの（初期保有量を含む）X 財，Y 財の需要を p_x，p_y で表せ。

(iii) 需要と供給を均衡させる価格を求めよ。企業の X 財投入量は需要であり，X 財の供給は 2 人の人々の初期保有量のみである。Y 財の供給はもちろん企業の産出量に等しい。

74. ある企業の生産関数を $x = L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$（$x$ は財の産出量，L，K は労働，資本の投入量），賃金率，資本レンタルをそれぞれ w，r とする。産出量 x が 4 のときの費用最小化問題を解き，それが費用最小化であることを確認せよ。
また，上の計算で求めた労働，資本投入量から費用関数を導き，シェパードの補題が成り立つことを確認せよ。

75. ある企業の生産関数を $x = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$（$x$ は財の産出量，L，K は労働，資本の投入量），賃金率，資本レンタルをそれぞれ w，r とする。やはり産出量 x が 4 のときの費用最小化問題を解き，それが費用最小化であることを確認せよ。
また，上の計算で求めた労働，資本投入量から費用関数を導き，シェパードの補題が成り立つことを確認せよ。

76. n 社からなるクールノー的な寡占を考える。p を財の価格，X を全企業の産出量の合計，需要関数を $p = 240 - 4X$，各企業の共通の費用関数を $c_i = x_i^2 + 100$（x_i は各企業の産出量）として各企業の利潤を最大にする産出量を求めよ。また n が非常に大きい値になって行くとき n 社の産出量の合計はどのような値に近づいて行くか？さらに財の価格がどのような値に近づいて行くかについても答えるとともに，費用関数が $c_i = 4x_i$ のときにも同じ問題を解け。

77. 105 ページの (2.27) 式を用いて (2.26) を導け。

78. 表のゲームにおける各プレイヤーの純粋戦略に限定した最適反応を求めよ。さらに（存在すれば）純粋戦略に限定したナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

		戦略 X	戦略 Y
プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	1, 3	5, 3
ーA	戦略 Y	4, 5	2, 2

79. ある公共財の供給を巡るゲームを考える。2 人のプレイヤー A と B がいて，公共財の需要を大きくする（大）か小さくする（小）かを政府に申告する。申告した需要に基づいて費用負担が決められる。ともに「大」を選べば十分な公共財が供給されるが，一方が「大」を他方が「小」が選んだ場合は「小」を選んだプレイヤーは少ない負担である程度の公共財を得ることができる。「大」を選んだ方は供給される公共財に比べて負担が大きくなる。ともに小を選んだ場合は公共財は供給されない。利得表は次のように表される。

プレイヤー B

プレ		大	小
イヤ	大	a, a	$1, b$
ーA	小	$b, 1$	3, 3

このゲームが「囚人のジレンマ」となるように a，b の値を決め，最適反応，ナッシュ均衡を分析せよ。

80. 前問と同様の公共財の供給を巡るゲームを考える。ともに「大」を選べば十分な公共財が供給され，一方が「大」を選んだ場合も公共財が供給されるがその量は少ない。利得表は次のように表される。

プレイヤー B

プレ		大	小
イヤ	大	a, a	c, b
ーA	小	b, c	3, 3

このゲームにおいてともに「大」を選ぶ戦略の組がナッシュ均衡となるように a，b，c の値を決め，108 ページのグローブズメカニズムとの関連を考えよ。

81. 表のゲームの純粋戦略に限定したナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	3, 4	1, 2
ーA	戦略 Y	5, 1	2, 2

82. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	1, 2	2, 3
ーA	戦略 Y	2, 3	2, 1

83. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	1, 2	3, 1
ーA	戦略 Y	2, 1	1, 3

84. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

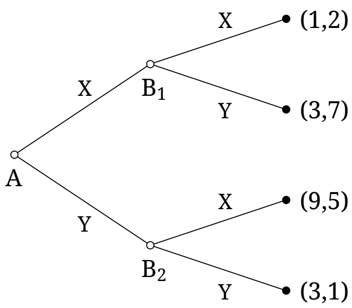
プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	1, 1	3, 2
ーA	戦略 Y	2, 3	1, 1

85. 表のゲームにおいて，A の方が先に戦略を選ぶことができる場合のナッシュ均衡，部分ゲーム完全均衡を求めよ。ゲームの樹ではなく標準型ゲーム（行列表記）を用いて求めること。

プレイヤー B

プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	2, 2	5, 3
ーA	戦略 Y	3, 5	2, 2

86. 上のゲームにおいて，B の方が先に戦略を選ぶことができる場合の部分ゲーム完全均衡をゲームの樹を描いて求めよ。
87. 次の図のゲームの部分ゲーム完全均衡における各プレイヤーの戦略を求め，その理由を説明せよ。



A はプレイヤー A が，B_1，B_2 はプレイヤー B が意思決定する時点を表している。

88. アメリカとロシアの核戦略のゲームの「静学的ゲーム 2」に混合戦略による均衡があるかないか，あればどのような均衡であるかを調べよ。

89. アメリカとロシアの核戦略のゲームの「チキンゲーム」に混合戦略による均衡があるかないか，あればどのような均衡であるかを調べよ。

90. 2 つの企業 1，2 からなる寡占を考える。それらの産出量を x_1，x_2 として逆需要関数が

$$p_1 = 32 - 2(x_1 + kx_2),\ 0 < k < 1$$

$$p_1 = 32 - 2(x_2 + kx_1),\ 0 < k < 1$$

で表される。企業 1 の方が先に産出量を決められる場合の部分ゲーム完全均衡を求めよ。またそのときの各企業の利潤を比較せよ。x_1，p_1，x_2，p_2 はそれぞれ企業 1 が生産する財の産出量，価格，企業 2 が生産する財の産出量，価格である。企業の費用は 0 とする。

91. 2 つの企業 1，2 が差別化された財を生産する寡占を考える。それらの産出量と価格を x_1，x_2，p_1，p_2 として需要関数が

$$x_1 = 48 - 2p_1 + p_2$$

$$x_2 = 48 - 2p_2 + p_1$$

であるとする。また費用は 0 とする。

(i) 2 つの企業が同時に価格を決めるベルトラン的な均衡を求めよ。

(ii) 企業 1 の方が先に価格を決められる場合の部分ゲーム完全均衡を求めよ。また，そのときの各企業の利潤を求めよ。

92. 2 人のプレイヤーによるある美術品をめぐるシールドビッド・ファーストプライス・オークションを考える。それぞれの評価 v_1，v_2 が 2 から 3 までの一様分布となっているとき次の戦略（入札額）の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを証明せよ。

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

p_1，p_2 は各プレイヤーの入札額である。各プレイヤーは相手の評価を正確には知らないが上で示したような一様分布であることは知っている。

93. 上の問題で v_1，v_2 が 1 から 4 までの一様分布となっているとき次の戦略（入札額）の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを証明せよ。

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2},\ p_2 = \frac{v_2 + 1}{2}$$

94. 245 ページの解説に沿って第 92 問のベイジアン・ナッシュ均衡が $p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$ であることを示せ。
95. 245 ページの解説に沿って第 93 問のベイジアン・ナッシュ均衡が $p_1 = \frac{v_1+1}{2},\ p_2 = \frac{v_2+1}{2}$ であることを示せ。
96. 表のゲームを永遠に繰り返すときトリガー戦略

    まず最初に「戦略 X」を選ぶ。2 回目以降は前回相手が「戦略 X」を選んでいれば「戦略 X」を，「戦略 Y」を選んでいればそれ以降は永遠に「戦略 Y」を選ぶ。

    が部分ゲーム完全均衡となるために割り引き因子または割り引き率が満たすべき条件を求めよ。

B

A		X	Y
	X	5, 5	1, 7
	Y	7, 1	2, 2

97. 表のゲームにおいて次の戦略が部分ゲーム完全均衡となるために割り引き因子が満たすべき条件を求めよ。

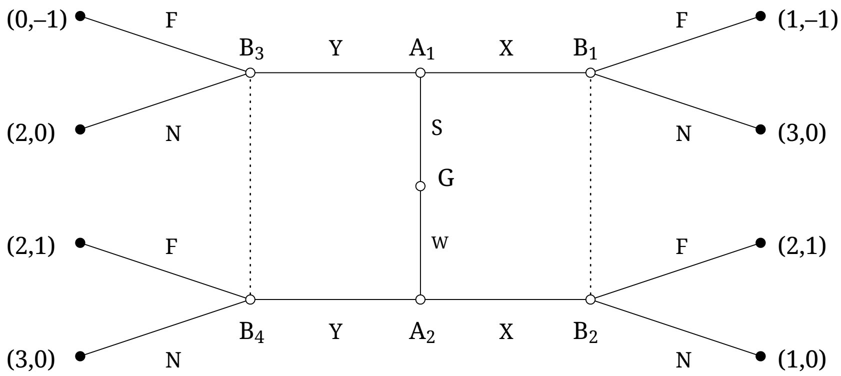
    まず最初に「戦略 X」を選ぶ。相手が「戦略 X」を選べば次の回では自分も「戦略 X」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「戦略 Y」を選んだらその後 2 回は自分も「戦略 Y」を選び，3 回目以降は（その 2 回のゲームでの相手の戦略に関わらず）再び「戦略 X」を選ぶ。以下同様。

B

A		X	Y
	X	4, 4	0, 7
	Y	7, 0	1, 1

98. 237 ページのゲーム 5 について次の問に答えよ。
    (i) タイプ S の企業 A が投資 X を，タイプ W の企業 A が投資 Y を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。
    (ii) タイプ S の企業 A が投資 Y を，タイプ W の企業 A が投資 X を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。
99. 図に表されているような不完備情報ゲームを考える。プレイヤーは A，B，プレイ

ヤー A のタイプは S，W，行動の選択肢は X，Y，プレイヤー B の行動の選択肢は F，N とし，ゲーム開始前に「プレイヤー B は，プレイヤー A が確率 2/3 でタイプ S であり，確率 1/3 でタイプ W であるという推測を抱いてる」とする。プレイヤーの戦略やタイプの意味は問わない。



このゲームには次の 2 つの完全ベイジアン均衡がある。

完全ベイジアン均衡 1(separating 均衡)

(i) タイプ S のプレイヤー A は X を，タイプ W のプレイヤー A は Y を選ぶ。

(ii) プレイヤー A が X を選んだときはプレイヤー B は戦略 N を選び，Y を選んだときには戦略 F を選ぶ。

(iii) 『プレイヤー A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 1 であり，プレイヤー A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率はゼロである』という推測をプレイヤー B が持つ。

完全ベイジアン均衡 2(pooling 均衡)

(i) タイプ S のプレイヤー A もタイプ W のプレイヤー A も Y を選ぶ。

(ii) プレイヤー A が X を選んだときはプレイヤー B は戦略 F を選び，Y を選んだときには戦略 N を選ぶ。

(iii) 『プレイヤー A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さく（タイプ W である確率は 1/2 より大きい），プレイヤー A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 である』との推測をプレイヤー B が持つ。

以下の問に答えよ。

(i) それぞれの均衡が完全ベイジアン均衡であることを示せ。

(ii) それぞれが合理的な均衡であるかどうかを調べよ。

(iii) タイプ S のプレイヤー A もタイプ W のプレイヤー A も X を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

(iv) タイプSのプレイヤーAがYを，タイプWのプレイヤーAがXを選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

100. 大学の入学試験や企業の就職試験における「指定校」の取り扱いについてシグナリングゲームの理論にもとづいて考えてみよ。

101. 3人のプレイヤーA，B，Cがいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\}) = 0,\ v(\{B\}) = 0,\ v(\{C\}) = 2$$

$$v(\{A, B\}) = 6,\ v(\{B, C\}) = 8,\ v(\{A, C\}) = 2$$

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

コアが存在しない場合もある。本文で説明した例と比較してどのようなことが言えるか。

102. 特性関数が次のようであるとする。

$$v(\{A, B\}) = 9,\ v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 7,\ v(\{A, B, C\}) = 11$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

このときコアと仁を求めよ。コアが存在しない場合もある。

略解

1.

$$p = 240 - 2x,\ p = 6x + 16$$

を連立させて解けば $x = 28, p = 184$ が得られる。同様に

$$p = 200 - 4x,\ p = 2x + 20$$

を連立させて解けば $x = 30, p = 80$ が得られる。各自図示せよ。

2. 価格が 100 円のときの需要を 100，150 円のときの需要を 50 とする。100 円から 150 円に値上がりしたときの需要の価格弾力性は

$$-\frac{\frac{50-100}{100}}{\frac{150-100}{100}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

であるが，逆に 150 円から 100 円に値下がりしたときの需要の価格弾力性は

$$-\frac{\frac{100-50}{50}}{\frac{100-150}{150}} = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$$

となる。もっと小さな価格の変化を考えてみよう。価格が 100 円のときの需要を 100，105 円のときの需要を 95 とする。100 円から 105 円に値上がりしたときの需要の価格弾力性は

$$-\frac{\frac{95-100}{100}}{\frac{105-100}{100}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{20}} = 1$$

であるが，逆に 105 円から 100 円に値下がりしたときの需要の価格弾力性は

$$-\frac{\frac{100-95}{95}}{\frac{100-105}{105}} = \frac{\frac{1}{19}}{\frac{1}{21}} = \frac{21}{19} \approx 1.1$$

となるので小さな価格の変化の場合にはどちら向きに考えても需要の価格弾力性の値はあまり変わらない。

3. 価格が 100 円のときの供給を 100，200 円のときの供給を 150 とする。100 円から 200 円に値上がりしたときの供給の価格弾力性は

$$\frac{\frac{150-100}{100}}{\frac{200-100}{100}} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

であるが，逆に 200 円から 100 円に値下がりしたときの供給の価格弾力性は

$$\frac{\frac{100-150}{150}}{\frac{100-200}{200}}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

となる。もっと小さな価格の変化を考えてみよう。価格が 100 円のときの供給を 100，110 円のときの供給を 105 とする。100 円から 110 円に値上がりしたときの供給の価格弾力性は

$$\frac{\frac{105-100}{100}}{\frac{110-100}{100}}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{10}}=\frac{1}{2}\approx 0.5$$

であるが，逆に 110 円から 100 円に値下がりしたときの供給の価格弾力性は

$$\frac{\frac{100-105}{105}}{\frac{100-110}{110}}=\frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{11}}=\frac{11}{21}\approx 0.52$$

となるので小さな価格の変化の場合にはどちら向きに考えても供給の価格弾力性の値はあまり変わらない。

4. （数値例の 1 つ）需要曲線が

$$p=240-2x$$

から

$$p=304-2x$$

に変化したと仮定する。供給曲線が

$$p=6x+16$$

のとき取引量 x は 28 から 36 に変わり，均衡価格 p は 184 から 232 に変わる。一方供給曲線が

$$p=2x+128$$

であるとすると取引量 x は 28 から 44 に変わり，均衡価格 p は 184 から 216 に変わる。後者の方が価格の変化が小さく，取引量の変化が大きい。各自図示していただきたい。

5. （数値例の 1 つ）供給曲線が

$$p=6x+16$$

から

$$p=6x+64$$

に変化したと仮定する。需要曲線が

$$p=240-2x$$

のとき取引量 x は 28 から 22 に変わり，均衡価格 p は 184 から 196 に変わる。一方需要曲線が

$$p = 296 - 4x$$

であるとすると取引量 x は 28 から 23.2 に変わり，均衡価格 p は 184 から 203.2 に変わる。後者の方が価格の変化が大きく，取引量の変化が小さい。各自図示していただきたい。

6. （ヒント）消費税の変化は供給曲線に影響し，所得税の変化は需要曲線に影響する。
7. （ヒント）発泡酒とビールは代替財であると考えられる。
8. （本文を読めばわかる）
9. （本文を読めばわかる）
10. （本文を読めばわかる）
11. 第 0 期の価格を p_0 とすると第 1 期の産出量は供給曲線から

$$x_1 = \frac{1}{6}(p_0 - 16)$$

となり，需要曲線からそのときの価格は

$$p_1 = 240 - \frac{1}{3}(p_0 - 16)$$

と求まる。同様にして p_1 から出発すると

$$p_2 = 240 - \frac{1}{3}(p_1 - 16)$$

が得られるので一般的に第 $n-1$ 期から n 期にかけては

$$p_n = 240 - \frac{1}{3}(p_{n-1} - 16)$$

となる。この式が a を定数として次のように変形されると考えると

$$p_n - a = -\frac{1}{3}(p_{n-1} - a)$$

$a = 184$ となる。すなわち

$$p_n - 184 = -\frac{1}{3}(p_{n-1} - 184)$$

この 184 は均衡価格である。この式から $p_n - 184$ が公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列であることがわかる。この数列は $p = 184$ に収束するのでくもの巣の調整過程は安定である。

12. 第 0 期の価格を p_0 とすると第 1 期の産出量は供給曲線から

$$x_1 = \frac{1}{2}(p_0 - 20)$$

となり，需要曲線からそのときの価格は

$$p_1 = 200 - 2(p_0 - 20)$$

と求まる。同様にして p_1 から出発すると

$$p_2 = 200 - 2(p_1 - 20)$$

が得られるので一般的に第 $n-1$ 期から n 期にかけては

$$p_n = 200 - 2(p_{n-1} - 20)$$

となる。この式は次のように変形される。

$$p_n - 80 = -2(p_{n-1} - 80)$$

80 は均衡価格である。この式から $p_n - 80$ が公比 -2 の等比数列であることがわかる。この数列は収束しない（発散する）のでくもの巣の調整過程は不安定である。

13.（本文を読めばわかる）

14.（本文を読めばわかる）

15.（補足とヒント）2 つの無差別曲線が交わっている点で考える。無差別曲線上の 2 点を結ぶ線分の傾きは消費される財の消費者にとっての相対的な関係，すなわち 1 単位の X 財（または Y 財）消費量が何単位の Y 財（または X 財）消費量で置き換えられるかあるいは相当するかを表しているが，X 財・Y 財消費量のごく小さな変化を考えると 2 点を結ぶ線分はある点における無差別曲線の接線に近づく。その接線の傾きがその点での無差別曲線の傾きである。

16.（ヒント）予算制約線は互いに平行になるように描き，無差別曲線は互いに交わらないように描くこと。

17.（ヒント）上の問題と同じ。

18.（ヒント）Y の価格のみが下落したとき予算制約線の X 軸上の切片は変わらず，Y 軸上の切片のみが変化する。

19.（ヒント）上の問題と同じ。

20.（ヒント）X の価格が下落した場合とでは予算制約線が変化する方向が異なる。

21.（ヒント）Y の価格の変化に伴って Y の需要がどのように変化すればよいかを考えること。

22.（ヒント）所得効果の方向と代替効果，所得効果の大きさの関係を考えること。

23.（ヒント）消費量の変化による個人の効用の変化，異なる人々の効用の比較などについて考えてみること。

24.（ヒント）現在の消費と将来の消費に対する好みがどのようなことを意味するかを考えてみること。

25.（ヒント）利子率の変化と現在の消費との関係，現在の消費と貯蓄の関係を考えること。
26.（ヒント）上の問題と同じ。
27.（ヒント）余暇と労働供給の関係，および賃金率と消費，労働供給の関係を考えよ。
28.（ヒント）代替効果，所得効果それぞれが労働供給を増やすか減らすかを考えること。
29.（ヒント）予算制約線は価格の変化によって初期保有量を示す点を支点として回転するように変化することに留意すること。
30.（ヒント）本文を読めばわかると思うが，2 人の消費者の無差別曲線が接するような点がパレート効率的であること，その点で両者の無差別曲線に共通に接する直線（の傾き）が均衡（相対）価格を表すことに留意すること。
31. X，Y の価格を p_x，p_y とすると消費者 A，B の予算制約式はそれぞれ次のように表される。

$$p_x x_A + p_y y_A = 8p_x + 24p_y$$

$$p_x x_B + p_y y_B = 12p_x + 12p_y$$

ラグランジュ関数を作るとそれぞれ

$$\mathcal{L}_A = x_A y_A + \lambda(p_x x_A + p_y y_A - 8p_x - 24p_y)$$

$$\mathcal{L}_B = x_B y_B^2 + \lambda(p_x x_B + p_y y_B - 12p_x - 12p_y)$$

となるから，次のような効用最大化条件が得られる。

$$y_A + \lambda p_x = 0,\ x_A + \lambda p_y = 0$$

$$y_B^2 + \lambda p_x = 0,\ 2x_B y_B + \lambda p_y = 0$$

したがって

$$p_x x_A = p_y y_A,\ 2p_x x_B = p_y y_B$$

を得る。これらの式と予算制約式より消費者 A，B それぞれについて

$$y_A = 4\frac{p_x}{p_y} + 12$$

$$y_B = 8\frac{p_x}{p_y} + 8$$

が得られ，Y 財の需要供給の均衡条件によって

$$12\frac{p_x}{p_y} + 20 = 36$$

が導かれる。したがって均衡相対価格は $\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{3}$ と求まる。X 財については同様の計算によって

$$x_A = 4 + 12\frac{p_y}{p_x}$$

$$x_B = 4 + 4\frac{p_y}{p_x}$$

より需給均衡条件

$$8 + 16\frac{p_y}{p_x} = 20$$

が導かれ $\frac{p_y}{p_x} = \frac{3}{4}$ が得られるが，これは上記の $\frac{p_x}{p_y} = \frac{4}{3}$ と同一である。X 財の市場が均衡すれば Y 財の市場も均衡する（ワルラスの法則）。これは X 財の市場均衡条件に消費者の予算制約式を合わせると Y 財の市場均衡条件が導かれることを意味している。

32. ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = xy^3 + \lambda(p_x x + p_y y - 12000)$$

となる。これを x，y で微分すると

$$y^3 + \lambda p_x = 0$$

$$3xy^2 + \lambda p_y = 0$$

が得られる。この両式から

$$p_y y = 3p_x x$$

を得る。したがって予算制約式から

$$x = \frac{3000}{p_x},\ y = \frac{9000}{p_y}$$

が求まる。予算制約式 $p_x x + p_y y = 12000$ を満たすような x と y の変化 Δx，Δy を考えると $\Delta y = -\frac{p_x}{p_y}\Delta x$ が得られる。効用関数よりこの関係を満たす x，y の変化による効用の変化は

$$\Delta u = y^3\Delta x + 3xy^2\Delta y = (y^3 - 3\frac{p_x}{p_y}xy^2)\Delta x = y^2(y - 3\frac{p_x}{p_y}x)\Delta x$$

と表される。$\Delta x > 0$（X の消費量の増加）として $y - 3\frac{p_x}{p_y}x > 0$ のとき $\Delta u > 0$，$y - 3\frac{p_x}{p_y}x < 0$ のとき $\Delta u < 0$ なので $p_y y = 3p_x x$ を満たす水準よりも x が小さいときに x の増加によって効用が増大し，その水準よりも x が大きいときには x の増加によって効用が減少する。したがって $p_y y = 3p_x x$ が成り立つところで効用が最大化されることがわかる。

33. 前問と同様。ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = x^2y^3 + \lambda(p_x x + p_y y - 20000)$$

となる。これを x，y で微分すると

$$2xy^3 + \lambda p_x = 0$$

$$3x^2y^2 + \lambda p_y = 0$$

が得られる。この両式から

$$2p_y y = 3p_x x$$

を得る。したがって予算制約式から

$$x = \frac{8000}{p_x},\ y = \frac{12000}{p_y}$$

が求まる。予算制約式 $p_x x + p_y y = 20000$ を満たすような x と y の変化 Δx，Δy を考えると $\Delta y = -\frac{p_x}{p_y}\Delta x$ が得られる。効用関数よりこの関係を満たす x，y の変化による効用の変化は

$$\Delta u = 2xy^3\Delta x + 3x^2y^2\Delta y = (2xy^3 - 3\frac{p_x}{p_y}x^2y^2)\Delta x = xy^2(2y - 3\frac{p_x}{p_y}x)\Delta x$$

と表される。$\Delta x > 0$（X の消費量の増加）として $2y - 3\frac{p_x}{p_y}x > 0$ のとき $\Delta u > 0$，$2y - 3\frac{p_x}{p_y}x < 0$ のとき $\Delta u < 0$ なので $2p_y y = 3p_x x$ を満たす水準よりも x が小さいときに x の増加によって効用が増大し，その水準よりも x が大きいときには x の増加によって効用が減少する。したがって $2p_y y = 3p_x x$ が成り立つところで効用が最大化されることがわかる。

34. ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = 200x + 300y + \lambda(xy^3 - 648)$$

となる。これを x，y で微分すると

$$200 + y^3\lambda = 0$$

$$300 + 3xy^2\lambda = 0$$

が得られる。この両式から

$$y = 2x$$

を得る。したがって $xy^3 = 648$ から

$$x = 3,\ y = 6$$

が求まる。$xy^3 = 648$ を満たすような x と y の変化 Δx，Δy を考えると $y^3\Delta x + 3xy^2\Delta y = 0$ より $\Delta y = -\frac{y}{3x}\Delta x$ が得られる。この関係を満たす予算の変化を Δm とすると

$$\Delta m = 200\Delta x + 300\Delta y = 100(2 - \frac{y}{x})\Delta x$$

が得られる。$\Delta x > 0$（X の消費量の増加）として $2 - \frac{y}{x} < 0$ のとき $\Delta m < 0$，$2 - \frac{y}{x} > 0$ のとき $\Delta m > 0$ なので $y = 2x$ を満たす水準よりも x が小さい（$\frac{y}{x}$ が大きい）ときに x の増加によって予算が減少し，その水準よりも x が大きい（$\frac{y}{x}$ が小さい）ときには x の増加によって予算が増加する。したがって $y = 2x$ が成り立つところで予算（支出）が最小化される。

35. $U = xy$，$U = 3xy + 120$，$U = x^2y^2$ が，それぞれ U を定数として $xy = U$，$xy = \frac{1}{3}(U - 120)$，$xy = \sqrt{U}$ となることから同一の無差別曲線が得られることがわかる。

36. ラグランジュ関数はそれぞれ

$$\mathcal{L}_1 = xy + \lambda(100x + 200y - 12000)$$

$$\mathcal{L}_2 = 3xy + 120 + \lambda(100x + 200y - 12000)$$

$$\mathcal{L}_3 = x^2y^2 + \lambda(100x + 200y - 12000)$$

となる。これらを x，y で微分すると

$$y + 100\lambda = 0,\ x + 200\lambda = 0$$

$$3y + 100\lambda = 0,\ 3x + 200\lambda = 0$$

$$2xy^2 + 100\lambda = 0,\ 2x^2y + 200\lambda = 0$$

が得られ，それぞれのケースについて

$$x = 2y$$

が導かれるから，予算制約式によって $x = 60$，$y = 30$ が求まる。

$U = xy$ について最大化を確認する。予算制約式 $100x + 200y = 12000$ を満たすような x と y の変化 Δx，Δy を考えると $\Delta y = -\frac{1}{2}\Delta x$ が得られる。効用関数よりこの関係を満たす x，y の変化による効用の変化は

$$\Delta U = y\Delta x + x\Delta y = (y - \frac{1}{2}x)\Delta x$$

と表される。$\Delta x > 0$（X の消費量の増加）として $y - \frac{1}{2}x > 0$ のとき $\Delta U > 0$，$y - \frac{1}{2}x < 0$ のとき $\Delta U < 0$ なので $x = 2y$ を満たす水準よりも x が小さいときに x

の増加によって効用が増大し，その水準よりも x が大きいときには x の増加によって効用が減少する。したがって $x=2y$ が成り立つところで効用が最大化されることがわかる。

37. 予算制約式は

$$5000y = 10000(365 - x)$$

と表されるから，ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = x^2y^3 + \lambda[5000y - 10000(365 - x)]$$

となる。これを x，y で微分すると

$$2xy^3 + 10000\lambda = 0$$

$$3x^2y^2 + 5000\lambda = 0$$

が導かれる。この両式から

$$xy^3 = 3x^2y^2$$

したがって $y = 3x$ を得る。予算制約式より $x = 146$（$y = 438$）となるから労働日数 $L = 219$ が求まる。ラグランジュ乗数法を用いない場合は以下のように計算する。予算制約式から $y = 730 - 2x$ が得られ，これを効用関数に代入すると

$$u = x^2(730 - 2x)^3$$

となる。これを x で微分してゼロとおくと

$$2x(730 - 2x)^3 - 6x^2(730 - 2x)^2 = 2x(730 - 2x)^2(730 - 5x) = 0$$

が得られ予算制約式と合わせて $x = 146$，$y = 438$ が求まる。

38. 予算制約式は

$$8000y = 8000(\bar{L} - x)$$

と表されるから，ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = xy^2 + \lambda[8000y - 8000(\bar{L} - x)]$$

となる。これを x，y で微分すると

$$y^2 + 8000\lambda = 0$$

$$2xy + 8000\lambda = 0$$

が導かれる。この両式から

$$y^2 = 2xy$$

したがって $y = 2x$ を得る。予算制約式より $x = \frac{1}{3}\bar{L}$（$y = \frac{2}{3}\bar{L}$）となるから労働日数 $L = \frac{2}{3}\bar{L}$ が求まる。

39. 予算制約式は

$$3x + y = 100$$

と表される。ラグランジュ関数を作ると

$$\mathcal{L} = (x-5)^3(y-10)^2 + \lambda(3x + y - 100)$$

となる。これを x，y で微分してゼロとおくと

$$3(x-5)^2(y-10)^2 + 3\lambda = 0$$

$$2(x-5)^3(y-10) + \lambda = 0$$

が得られる。これらの式から

$$(x-5)^2(y-10)^2 = -\lambda$$

$$(x-5)^3(y-10) = -\frac{1}{2}\lambda$$

が導かれるが，この両式から（それぞれ左辺が $(x-5)^3(y-10)^2$ となるようにして）

$$y = 2x$$

を得る。したがって予算制約式から

$$x = 20,\ y = 40$$

が求まる。

ラグランジュ乗数法を用いない場合は以下のように計算する。予算制約式から $y = 100 - 3x$ が得られ，これを効用関数に代入すると

$$u = 9(x-5)^3(30-x)^2$$

となる。これを x で微分してゼロとおくと

$$9(x-5)^2(30-x)[3(30-x) - 2(x-5)] = 9(x-5)^2(30-x)(100-5x) = 0$$

が得られ予算制約式から $x = 20$，$y = 40$ が求まる。$x = 5$，$y = 10(x = 30)$ は効用を最小化する。

40. 前問と同様。予算制約式は

$$4x + y = 164$$

と表される。ラグランジュ関数を作ると

$$\mathcal{L} = (2x - 3)^2(y - 10) + \lambda(4x + y - 164)$$

となる。これを x，y で微分してゼロとおくと

$$2(2x - 3)(y - 10) + 4\lambda = 0$$

$$(2x - 3)^2 + \lambda = 0$$

が得られる。これらの式から

$$(2x - 3)(y - 10) = -2\lambda$$

$$(2x - 3)^2 = -\lambda$$

が導かれるが，この両式から

$$y = 4x + 4$$

を得る。したがって予算制約式から

$$x = 20,\ y = 84$$

が求まる。

41. 予算制約式は次のように表される。

$$C_2 = 120 + 1.2(100 - C_1) = -1.2C_1 + 240$$

ラグランジュ関数を作ると

$$\mathcal{L} = C_1^2 C_2^3 + \lambda(1.2C_1 + C_2 - 240)$$

となる。これを C_1，C_2 で微分してゼロとおくと

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 2C_1 C_2^3 + 1.2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 3C_1^2 C_2^2 + \lambda = 0$$

が得られる。これらの式から

$$C_1 C_2^3 = -0.6\lambda$$

$$C_1^2 C_2^2 = -\frac{1}{3}\lambda$$

が導かれるが，この両式から

$$C_2 = 1.8C_1$$

を得る。したがって予算制約式から

$$C_1 = 80,\ C_2 = 144$$

が求まる。

今期，来期の所得が 0，m，利子率が r であるとすると予算制約式は次のように表される。

$$C_2 = m - (1+r)C_1$$

この式では C_1 の価格が $1+r$ で，C_2 の価格が 1 になっている。ラグランジュ関数を作ると

$$\mathcal{L} = C_1^2 C_2^3 + \lambda[(1+r)C_1 + C_2 - m]$$

となる。これを C_1，C_2 で微分してゼロとおくと

$$2C_1 C_2^3 + (1+r)\lambda = 0$$

$$3C_1^2 C_2^2 + \lambda = 0$$

が得られる。この両式から

$$C_2 = \frac{3}{2}(1+r)C_1$$

を得る。したがって予算制約式から

$$C_1 = \frac{2}{5}\left(\frac{m}{1+r}\right),\ C_2 = \frac{3}{5}m$$

が求まる。これらを効用関数に代入すると間接効用関数が次のように得られる。

$$v = \frac{108}{5^5}\left[\frac{m^5}{(1+r)^2}\right]$$

これを $1+r$，m で微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial(1+r)} = -\frac{216}{5^5}\left[\frac{m^5}{(1+r)^3}\right]$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{540}{5^5}\left[\frac{m^4}{(1+r)^2}\right]$$

となり

$$-\frac{\frac{\partial v}{\partial(1+r)}}{\frac{\partial v}{\partial m}} = \frac{2}{5}\left(\frac{m}{1+r}\right) = C_1$$

が導かれる。これはロイの恒等式の例になっている。

支出最小化を考えよう。$m=(1+r)C_1+C_2$ としてラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}=(1+r)C_1+C_2+\lambda(C_1^2C_2^3-\bar{u})$$

これを C_1，C_2 で微分してゼロとおくと

$$1+r+2C_1C_2^3\lambda=0,\ 1+3C_1^2C_2^2\lambda=0$$

が得られる。この両式から

$$C_2=\frac{3}{2}(1+r)C_1$$

を得る。これより補償需要関数は

$$\tilde{C_1}=\sqrt[5]{\frac{8\bar{u}}{27(1+r)^3}},\ \tilde{C_2}=\sqrt[5]{\frac{9(1+r)^2\bar{u}}{4}}$$

となり，支出関数は

$$m=(1+r)\tilde{C_1}+\tilde{C_2}=\frac{5}{2}\sqrt[5]{\frac{8(1+r)^2\bar{u}}{27}}=\frac{5}{2}\sqrt[5]{\frac{8\bar{u}}{27}}(1+r)^{\frac{2}{5}}$$

と表される。m を $1+r$ で微分すると

$$\frac{\partial m}{\partial(1+r)}=\sqrt[5]{\frac{8\bar{u}}{27(1+r)^3}}=\tilde{C_1}$$

が得られる。これはマッケンジーの補題の例である。

42. 予算制約式は次のように表される。

$$C_2=120+1.25(240-C_1)=-1.25C_1+420$$

ラグランジュ関数を作ると

$$\mathcal{L}=C_1^3C_2+\lambda(1.25C_1+C_2-420)$$

となる。これを C_1，C_2 で微分してゼロとおくと

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_1}=3C_1^2C_2+1.25\lambda=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial C_2}=C_1^3+\lambda=0$$

が得られる。これらの式から

$$2.4C_1^2C_2=-\lambda,\ C_1^3=-\lambda$$

が導かれるが，この両式から $2.4C_2 = C_1$ を得る。したがって予算制約式から

$$C_1 = 252,\ C_2 = 105$$

が求まる。

今期，来期の所得が m，0，利子率が r であるとすると予算制約式は次のように表される。

$$C_2 = (1+r)m - (1+r)C_1,\ \text{あるいは}\ \frac{1}{1+r}C_2 = m - C_1$$

この式では C_1 の価格が 1 で，C_2 の価格が $\frac{1}{1+r}$ になっている。ラグランジュ関数を作ると

$$\mathcal{L} = C_1^3 C_2 + \lambda\left[C_1 + \frac{1}{1+r}C_2 - m\right]$$

となる。これを C_1，C_2 で微分してゼロとおくと

$$3C_1^2 C_2 + \lambda = 0$$

$$C_1^3 + \frac{1}{1+r}\lambda = 0$$

が得られる。この両式から

$$C_2 = \frac{1}{3}(1+r)C_1$$

を得る。したがって予算制約式から

$$C_1 = \frac{3}{4}m,\ C_2 = \frac{1}{4}(1+r)m$$

が求まる。これらを効用関数に代入すると間接効用関数が次のように得られる。

$$v = \frac{27}{256}(1+r)m^4 = \frac{27}{256}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{-1} m^4$$

これを $\frac{1}{1+r}$，m で微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial \frac{1}{1+r}} = -\frac{27}{256}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{-2} m^4 = -\frac{27}{256}(1+r)^2 m^4$$

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{27}{64}(1+r)m^3$$

となり

$$-\frac{\frac{\partial v}{\partial \frac{1}{1+r}}}{\frac{\partial v}{\partial m}} = \frac{1}{4}(1+r)m = C_2$$

が導かれる。これはロイの恒等式の例になっている。

支出最小化を考えよう。$m = C_1 + \frac{C_2}{1+r}$ としてラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = C_1 + \frac{C_2}{(1+r)} + \lambda(C_1^3 C_2 - \bar{u})$$

これを C_1，C_2 で微分してゼロとおくと

$$1 + 3C_1^2 C_2 \lambda = 0,\ \frac{1}{1+r} + C_1^3 \lambda = 0$$

が得られる。この両式から

$$C_2 = \frac{1}{3}(1+r)C_1$$

を得る。これより補償需要関数は

$$\tilde{C_1} = \sqrt[4]{\frac{3\bar{u}}{1+r}},\ \tilde{C_2} = \sqrt[4]{\frac{(1+r)^3\bar{u}}{27}}$$

となり，支出関数は

$$m = 4\sqrt[4]{\frac{\bar{u}}{27(1+r)}} = 4\sqrt[4]{\frac{\bar{u}}{27}}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{\frac{1}{4}}$$

と表される。m を $\frac{1}{1+r}$ で微分すると

$$\frac{\partial m}{\partial \frac{1}{1+r}} = \sqrt[4]{\frac{\bar{u}}{27}}\left(\frac{1}{1+r}\right)^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{(1+r)^3\bar{u}}{27}} = \tilde{C_2}$$

が得られる。これはマッケンジーの補題の例である。

43. 各自図を描いていただきたい。企業の費用最小化の図とよく似ている。

44. (i) 効用最大化：

予算制約式は

$$p_x x + p_y y + p_z z + p_w w = m$$

と書け，ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = x^5 y^4 z^2 w + \lambda(p_x x + p_y y + p_z z + p_w w - m)$$

と表される。これを x，y，z，w で微分してゼロとおくと

$$5x^4 y^4 z^2 w + \lambda p_x = 0$$

$$4x^5 y^3 z^2 w + \lambda p_y = 0$$

$$2x^5 y^4 z w + \lambda p_z = 0$$

$$x^5 y^4 z^2 + \lambda p_w = 0$$

が得られる。これらの式から

$$p_x x : p_y y : p_z z : p_w w = 5 : 4 : 2 : 1$$

を得る。予算制約式より需要関数が次のように求まる。

$$x = \frac{5m}{12p_x},\ y = \frac{m}{3p_y},\ x = \frac{m}{6p_z},\ x = \frac{m}{12p_w}$$

(ii) 支出最小化：
一定の効用を $x^5y^4z^2w = \bar{u}$ とする。ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = p_x x + p_y y + p_z z + p_w w + \lambda(x^5y^4z^2w - \bar{u})$$

と表される。これを x，y，z，w で微分してゼロとおくと

$$p_x + \lambda 5x^4y^4z^2w = 0$$

$$p_y + \lambda 4x^5y^3z^2w = 0$$

$$p_z + \lambda 2x^5y^4zw = 0$$

$$p_w + \lambda x^5y^4z^2 = 0$$

が得られる。これらの式から

$$p_x x : p_y y : p_z z : p_w w = 5 : 4 : 2 : 1$$

を得る。$x^5y^4z^2w = \bar{u}$ より

$$\tilde{x} = \sqrt[12]{\frac{5^7p_y^4p_z^2p_w}{4^5p_x^7}\bar{u}},\ \tilde{y} = \sqrt[12]{\frac{4^7p_x^5p_z^2p_w}{5^5p_y^8}\bar{u}},$$
$$\tilde{z} = \sqrt[12]{\frac{4p_x^5p_y^4p_w}{5^5p_z^{10}}\bar{u}},\ \tilde{w} = \sqrt[12]{\frac{p_x^5p_y^4p_z^2}{5^54^5p_w^{11}}\bar{u}}$$

が得られる。

45. (i) 保険がないときのタイプ 1 の人々の期待効用は

$$2400 \times \frac{9}{10} + 800 \times \frac{1}{10} = 2240$$

であるから，保険料を y とすると

$$800 + 160(20 - y) - 4(20 - y)^2 = 2400 - 4y^2 = 2240$$

より $y = 2\sqrt{10} \approx 6.3$ が求まる。したがって 6.3 までの保険料を支払う用意がある。一方保険がないときのタイプ 2 の人々の期待効用は

$$2400 \times \frac{1}{2} + 800 \times \frac{1}{2} = 1600$$

であるから，保険料を y とすると

$$2400 - 4y^2 = 1600$$

より $y = 10\sqrt{2} \approx 14.1$ が求まる。したがって 14.1 までの保険料を支払う用意がある。保険料を 6.3 以下にしなければタイプ 1 は保険に加入しない。タイプ 1 よりタイプ 2 の人々の方が 2 倍多いので事故が起きる確率は $\frac{11}{30}$ である。事故の損害は 20 であるからその期待値は約 7.3 となり保険料を上回るので採算がとれない。

(ii)（以下は 1 つの例である）次のような 2 つの保険を考えてみよう。

[1] 保険 1：損害保障額は 20 で保険料は 10。全額保障されるので事故が起きたときも起きなかったときも損害は（保険料を含めて）-10。

[2] 保険 2：損害保障額は 5 で保険料は 1。事故が起きたときの損害は（保険料を含めて）-16，起きなかったときは -1。

それぞれの保険を購入したときの各タイプの人々の期待効用を求める。

[1] タイプ 1：保険 1 から得られる効用は確率的ではなく 2000 である。この値は保険を購入しない場合よりも小さい。
一方，保険 2 から得られる期待効用は

$$2396 \times \frac{9}{10} + 1376 \times \frac{1}{10} = 2294 > 2240$$

であるからこれらの人々は保険 2 を購入する。

[2] タイプ 2：保険 1 から得られる効用は確率的ではなく 2000 である。
一方，保険 2 から得られる期待効用は

$$2396 \times \frac{1}{2} + 1376 \times \frac{1}{2} = 1886$$

であるからこれらの人々は保険 1 を購入する。

各保険は保険会社にとって採算がとれるものであり，リスクが大きいタイプ 2 の人が全額を保障される保険を購入する。

46.（ヒント）$x = \sqrt{LK}$ の値が一定のときの L と K の関係を考える。

47.（ヒント）等産出量曲線上のある点よりも右の点，下の点はそれぞれどのような状態を表すかを考えよ。

48.（ヒント）等産出量曲線の意味を考えればわかる。

49.（補足とヒント）2 つの等産出量曲線が交わっている点で考える。等産出量曲線上の 2 点を結ぶ線分の傾きは生産要素の代替関係，すなわち 1 単位の資本（または労働）投入量が何単位の労働（または資本）投入量で置き換えられるかを表しているが，資本・労働投入量のごく小さな変化を考えると 2 点を結ぶ線分はある点における等産出量曲線の接線に近づく。その接線の傾きがその点での等産出量曲線の傾きである。

50.（ヒント）等費用線の傾きの変化を考える。等産出量曲線は変わらない。

51.（ヒント）上の問題と同じ。

52.（ヒント）「資本」とは具体的にどのようなものであり，誰が所有しているか，あるいは誰が「資本」の存在に貢献しているかを考えること。

53.（ヒント）限界費用と平均費用の意味を考えればわかる。微分を使った計算でも確認できる。

54. 企業の利潤は

$$\pi = 48x - 3x^2 - 100$$

と表される。これを変形すると

$$\pi = -3(x-8)^2 + 92$$

が得られる。したがって利潤を最大化する産出量は 8 であり，そのときの利潤は 92 である。

55. (i) 企業の利潤は

$$\pi = 26x - x^3 + 7x^2 - 2x - 4$$

と表される。これを x で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx} = 24 - 3x^2 + 14x = -(3x+4)(x-6) = 0$$

となるから利潤を最大化する産出量は 6 である。

(ii) 1 単位当りの従量税を t とすると企業の利潤は

$$\pi = 26x - x^3 + 7x^2 - 2x - 4 - tx$$

となる。これを x で微分してゼロとおけば

$$\frac{d\pi}{dx} = 24 - 3x^2 + 14x - t = 0$$

が得られるが，$x = 5$ がこの式を満たすので

$$t = 19$$

を得る。

56. ホテリングの補題の例である。

(i)

$$\pi = 6pL^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}} - wL - rK$$

を L，K で微分してゼロとおくと

$$2pL^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{2}} - w = 0$$

$$3pL^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{2}} - r = 0$$

となる。w，r をそれぞれの右辺に移して左辺同士，右辺同士かけ合わせると

$$6p^2L^{-\frac{1}{3}} = rw$$

が得られ，ここから

$$\tilde{L}(p,w,r) = 216p^6(rw)^{-3}$$

が求まる。また $L^{\frac{2}{3}} = 36p^4(rw)^{-2}$ であるから

$$\tilde{K}(p,w,r) = \left(\frac{w}{2p}L^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 324p^6r^{-4}w^{-2}$$

が得られる。このとき企業の産出量は

$$\tilde{x}(p,w,r) = 6 \times 6p^2(rw)^{-1} \times 18p^3r^{-2}w^{-1} = 648p^5r^{-3}w^{-2}$$

で与えられ，利潤は

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(p,w,r) &= 648p^6r^{-3}w^{-2} - 216p^6r^{-3}w^{-2} - 324p^6r^{-3}w^{-2} \\ &= 108p^6r^{-3}w^{-2} \qquad (4.25)\end{aligned}$$

と表される。

(ii) (4.25) より

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial p} = 648p^5r^{-3}w^{-2} = \tilde{x}(p,w,r)$$

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial w} = -216p^6r^{-3}w^{-3} = -\tilde{L}(p,w,r)$$

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial r} = -324p^6r^{-4}w^{-2} = -\tilde{K}(p,w,r)$$

が導かれる。

ここで問題にはないが，産出量を一定とした利潤最大化を考えてみよう。ラグランジュ関数は

$$6px - wL - rK + \lambda(6L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}} - x)$$

となる。これを L，K で微分して 0 とおくと

$$-w + 2\lambda L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{1}{2}} = 0,\ -r + 3\lambda L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{2}} = 0$$

を得る。px は一定なので，この形の利潤最大化は，一定の産出量のもとで $wL+rK$ で表される費用を最小化するのと同じことである。両式から $wL = \frac{2}{3}rK$ が得られる。これから $L = \frac{2r}{3w}K$ となり，$6L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}} = x$（$x$ は一定）に代入すると $6\left(\frac{2r}{3w}\right)^{\frac{1}{3}}K^{\frac{5}{6}} = x$ より

$$K = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{6}{5}}\left(\frac{3w}{2r}\right)^{\frac{2}{5}}x^{\frac{6}{5}} = \left(\frac{w}{144r}\right)^{\frac{2}{5}}x^{\frac{6}{5}},\ L = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{6}{5}}\left(\frac{2r}{3w}\right)^{\frac{3}{5}}x^{\frac{6}{5}} = \left(\frac{r}{54w}\right)^{\frac{3}{5}}x^{\frac{6}{5}}$$

を得る。費用関数は

$$\begin{aligned} c = wL + rK &= \left(\frac{r^3w^2}{54^3}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{6}{5}} + \left(\frac{r^3w^2}{144^2}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{6}{5}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{r^3w^2}{648}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{6}{5}} + \frac{1}{3}\left(\frac{r^3w^2}{648}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{6}{5}} = \frac{5}{6}\left(\frac{r^3w^2}{648}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{6}{5}} \end{aligned}$$

これを w，r で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial w} = \frac{1}{3}\left(\frac{r^3}{648w^3}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{6}{5}} = \left(\frac{r}{54w}\right)^{\frac{3}{5}}x^{\frac{6}{5}} = L$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = \frac{1}{2}\left(\frac{w^2}{648r^2}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{6}{5}} = \left(\frac{w}{144r}\right)^{\frac{2}{5}}x^{\frac{6}{5}} = K$$

となりシェパードの補題が得られる。費用関数 c を x で微分すると限界費用

$$\frac{dc}{dx} = \left(\frac{r^3w^2}{648}\right)^{\frac{1}{5}}x^{\frac{1}{5}}$$

を得る。この限界費用が価格に等しいという利潤最大化条件を考えると，産出量が

$$x = \frac{648p^5}{r^3w^2}$$

となり，上の利潤最大化で求めた産出量と等しいことがわかる。

57.（ヒント）いくつかの K の値について短期の費用曲線を描き，それらをなぞるようにして長期の費用曲線を描く。

58. 短期費用関数を，x を与えられたものとして K で微分してゼロとおくと（x に対する費用最小化）

$$\frac{dc}{dK} = -3(3x - K)^2 + 3K^2 = 9x(2K - 3x) = 0$$

となるから $K = \frac{3}{2}x$ が得られる。これを短期費用関数に代入すると

$$c = \left(3x - \frac{3}{2}x\right)^3 + \left(\frac{3}{2}x\right)^3 + 8 = \frac{27}{4}x^3 + 8$$

が得られる。これが長期費用関数である。

59.（ヒント）長期均衡において何と何が等しいか，また何がゼロになっているか，などに留意して考えること。

60.（ヒント）限界収入とは何を表すかを考え，需要曲線を描いてみる。

61.（ヒント）独占企業にとって限界収入が持つ意味，完全競争において企業が置かれた立場に留意すること。

62. 利潤は

$$\pi = (280 - 3x)x - 4x^2 - 300 = -7x^2 + 280x - 300$$

と表される。これを変形して

$$\pi = -7(x - 20)^2 + 2500$$

となるから利潤を最大化する産出量は 20 であり，そのときの利潤は 2500 である。

63.（本文を読めばわかる）

64.（ヒント）独占的競争と完全競争において各企業が生産する財の関係，均衡における企業の費用や利潤などについて考えること。

65. 外部性が存在するときの企業行動に関する問題である。

(i) 企業 A の利潤は

$$\pi_A = 160x - 2x^2$$

であるから，これを x で微分してゼロとおくと

$$160 - 4x = 0$$

となり $x = 40$ が求まる。一方企業 B の利潤は $x = 40$ として

$$\pi_B = 120y - y^2 - 40y$$

であるから，これを y で微分してゼロとおくと

$$80 - 2y = 0$$

より $y = 40$ を得る。

(ii) 両企業の利潤の合計は

$$\pi = 160x - 2x^2 + 120y - y^2 - xy$$

と表される。これを x, y で微分してそれぞれゼロとおくと

$$160 - 4x - y = 0,\ 120 - 2y - x = 0$$

となり，これらの式を連立させて解けば $x = \frac{200}{7}$, $y = \frac{320}{7}$ が求まる。

(iii) 企業 A に 1 単位当り t の税を課すとするとその利潤は

$$\pi_A = 160x - 2x^2 - tx$$

となる。利潤最大化条件は

$$160 - 4x - t = 0$$

である。$x = \frac{200}{7}$ がこの条件を満たすように t を決めれば $t = \frac{320}{7}$ である。$x = \frac{200}{7}$ ならば企業 B の利潤は

$$\pi_B = 120y - y^2 - \frac{200}{7}y$$

となり，利潤最大化条件は

$$120 - 2y - \frac{200}{7} = 0$$

であるから $y = \frac{320}{7}$ が得られる。

66. 企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (20 - x - y)x - 3x$$

$$\pi_A = (20 - x - y)x - y$$

と表され，利潤最大化条件は

$$17 - 2x - y = 0$$

$$19 - x - 2y = 0$$

となる。したがって企業 A，B の反応曲線の方程式はそれぞれ次のようになる。

$$x = \frac{1}{2}(17 - y)$$

$$y = \frac{1}{2}(19 - x)$$

（各自図示していただきたい）
また均衡産出量はそれぞれ

$$x = 5,\ y = 7$$

と求まる。

67. (i) 企業 i の利潤は

$$\pi_i = (a - b\sum_{i=1}^{n} x_i)x_i - dx_i - f$$

と表されるから，利潤最大化の条件は

$$a - b\sum_{i=1}^{n} x_i - bx_i - d = 0$$

となる。ここですべての企業の費用関数が等しいから均衡産出量も等しくなることを用いると $\sum_{i=1}^{n} x_i = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{a-d}{(n+1)b}$$

が求まる。

(ii) 均衡価格は

$$p = a - bnx_i = \frac{a+nd}{n+1}$$

となるので，均衡における各企業の利潤は

$$\pi_i = \left[\frac{a+nd}{n+1} - d\right]\frac{a-d}{(n+1)b} - f = \frac{(a-d)^2}{(n+1)^2 b} - f$$

に等しい。$\pi_i = 0$ とおくと

$$n = \frac{a-d}{\sqrt{bf}} - 1$$

が得られる。f が大きくなるとこの式を満たす n の値は小さくなる。

(iii) 財の価格は

$$p = \frac{a + d\left[\frac{a-d}{\sqrt{bf}} - 1\right]}{\frac{a-d}{\sqrt{bf}}} = d + \sqrt{bf}$$

となる。f が 0 に近づけば p は d（限界費用の値）に近づく。

68.（ヒント）独占とクールノーの寡占において企業が置かれている状況がどのように異なっているかに留意すること。

69. (i) $k = \frac{1}{2}$ のとき

クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (24 - 2x_A + x_B)x_A - x_A$$

$$\pi_A = (24 - 2x_B + x_A)x_B - 2x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$23 - 4x_A + x_B = 0$$

$$22 - 4x_B + x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = \frac{38}{5},\ x_B = \frac{37}{5}$$

を得る。そのときの各企業が生産する財の価格は

$$p_A = \frac{81}{5},\ p_B = \frac{84}{5}$$

となる。

ベルトラン均衡

逆需要関数から需要関数を求めると

$$x_A = 24 - \frac{2}{3}p_A - \frac{1}{3}p_B$$

$$x_B = 24 - \frac{2}{3}p_B - \frac{1}{3}p_A$$

となる。企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = [24 - \frac{2}{3}p_A - \frac{1}{3}p_B](p_A - 1)$$

$$\pi_B = [24 - \frac{2}{3}p_B - \frac{1}{3}p_A](p_B - 2)$$

と表される。それぞれ p_A，p_B で微分してゼロとおくと

$$74 - 4p_A - p_B = 0$$

$$76 - 4p_B - p_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$p_A = \frac{44}{3},\ p_B = \frac{46}{3}$$

を得，そのときの各企業の産出量

$$x_A = \frac{82}{9},\ x_B = \frac{80}{9}$$

が得られる。

(ii) $k=-\frac{1}{2}$ のとき

クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (24 - 2x_A - x_B)x_A - x_A$$

$$\pi_A = (24 - 2x_B - x_A)x_B - 2x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$23 - 4x_A - x_B = 0$$

$$22 - 4x_B - x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = \frac{14}{3},\ x_B = \frac{13}{3}$$

を得る。そのときの各企業が生産する財の価格は

$$p_A = \frac{31}{3},\ p_B = \frac{32}{3}$$

となる。

ベルトラン均衡

逆需要関数から需要関数を求めると

$$x_A = 8 - \frac{2}{3}p_A + \frac{1}{3}p_B$$

$$x_B = 8 - \frac{2}{3}p_B + \frac{1}{3}p_A$$

となる。企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = [8 - \frac{2}{3}p_A + \frac{1}{3}p_B](p_A - 1)$$

$$\pi_B = [8 - \frac{2}{3}p_B + \frac{1}{3}p_A](p_B - 2)$$

と表される。それぞれ p_A，p_B で微分してゼロとおくと

$$26 - 4p_A + p_B = 0$$

$$28 - 4p_B + p_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$p_A = \frac{44}{5},\ p_B = \frac{46}{5}$$

を得る。そのときの各企業の産出量

$$x_A = \frac{26}{5},\ x_B = \frac{24}{5}$$

が得られる。

70. (i) クールノー均衡

企業 A，B の利潤はそれぞれ

$$\pi_A = (24 - 2x_A + x_B)x_A$$

$$\pi_B = (24 - 2x_B + x_A)x_B$$

と表される。それぞれ x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$24 - 4x_A + x_B = 0$$

$$24 - 4x_B + x_A = 0$$

が得られる。これらを連立させて解いて

$$x_A = x_B = 8$$

を得る。各企業の利潤は次の通りである。

$$\pi_A = \pi_B = 128$$

(ii) シュタッケルベルク均衡

企業 B の行動はクールノー均衡と同一であるから，その反応関数は

$$x_B = 6 + \frac{1}{4}x_A$$

となる。そのとき企業 A の利潤は次のように表される。

$$\pi_A = (30 - \frac{7}{4}x_A)x_A$$

これを x_A で微分してゼロとおくと

$$30 - \frac{7}{2}x_A = 0$$

となり $x_A = \frac{60}{7}$ が得られる。そのとき $x_B = \frac{57}{7}$ であり，各企業が生産する財の価格はそれぞれ

$$p_A = \frac{105}{7} = 15,\ p_B = \frac{114}{7}$$

であるから，各企業の利潤は次のように求まる。

$$\pi_A = \frac{900}{7} = \frac{6300}{49}$$

$$\pi_B = \frac{6498}{49}$$

このとき $\pi_B > \pi_A$ である。

71. 均衡においては需要と供給が（各地域）で等しいから $d_1 = x_1$，$d_2 = x_2$ が成り立つ。需要関数から逆需要関数を求めると，それぞれの地域で

$$p_1 = 600 - x_1$$

$$p_2 = \frac{1}{2}(400 - x_2)$$

となる。したがってこの企業の利潤は

$$\pi = (600 - x_1)x_1 + \frac{1}{2}(400 - x_2)x_2 - \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

と表される。これを x_1，x_2 で微分すると

$$600 - 3x_1 = 0$$

$$200 - 2x_2 = 0$$

が得られるから供給量は $x_1 = 200, x_2 = 100$ となる。また価格はそれぞれ $p_1 = 400$, $p_2 = 150$ である。

72. （ヒント）X 財の生産の減少によって Y 財の生産をどのくらい増やすことができるか。またそれによって消費者の効用がどうなるかを考えよ。

73. (i) 企業の利潤 π は，X 財の投入量を x として

$$\pi = 10p_y\sqrt{2}\sqrt{x} - p_x x$$

と表される。これを x で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx} = 5p_y\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - p_x = 0$$

より

$$x = 50\frac{p_y^2}{p_x^2}$$

$$y = 100\frac{p_y}{p_x}$$

が求まる。そのときの利潤は

$$\pi = p_y y - p_x x = 50\frac{p_y^2}{p_x}$$

である。

(ii) 個人 A の予算制約式は，X 財，Y 財の消費量を x，y として

$$p_x x + p_y y = 200 p_x + 25\frac{p_y^2}{p_x}$$

個人 B の予算制約式は

$$p_x x + p_y y = 100 p_x + 25\frac{p_y^2}{p_x}$$

と表される。個人 A の効用最大化問題を考えるとラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = x^2 y + \lambda(p_x x + p_y y - 200 p_x - 25\frac{p_y^2}{p_x})$$

となるから，これを x，y で微分すると

$$2xy + \lambda p_x = 0$$

$$x^2 + \lambda p_y = 0$$

が得られ，この両式から $p_x x = 2 p_y y$ を得る。したがって予算制約式より

$$x = \frac{400}{3} + \frac{50}{3}\frac{p_y^2}{p_x^2},\ y = \frac{200}{3}\frac{p_x}{p_y} + \frac{25}{3}\frac{p_y}{p_x}$$

が求まる。同様に個人 B のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = xy^2 + \lambda(p_x x + p_y y - 100 p_x - 25\frac{p_y^2}{p_x})$$

となるから，これを x，y で微分すると

$$y^2 + \lambda p_x = 0$$

$$2xy + \lambda p_y = 0$$

が得られ，この両式から $p_y y = 2 p_x x$ を得る。したがって予算制約式より

$$x = \frac{100}{3} + \frac{25}{3}\frac{p_y^2}{p_x^2},\ y = \frac{200}{3}\frac{p_x}{p_y} + \frac{50}{3}\frac{p_y}{p_x}$$

が求まる。

(iii) X 財の需要・供給の均衡条件は

$$\frac{500}{3} + 25\frac{p_y^2}{p_x^2} + 50\frac{p_y^2}{p_x^2} = 300$$

需要の合計は各消費者の需要と企業の投入量の和に等しい（左辺第 3 項が企業の投入量）。この式を整理すると $\frac{p_y^2}{p_x^2}=\frac{400}{225}$ が得られ，分子・分母を逆にして

$$\frac{p_x}{p_y}=\frac{3}{4}$$

が求まる。これが均衡における X，Y の相対価格である。

一方 Y 財の需要・供給の均衡条件は次のように表される。

$$\frac{400}{3}\frac{p_x}{p_y}+25\frac{p_y}{p_x}=100\frac{p_y}{p_x}$$

左辺は消費者の需要の合計，右辺は企業の供給である。この式からも $\frac{p_x}{p_y}=\frac{3}{4}$ が得られる。すなわち X 財の市場が均衡すれば Y 財の市場も均衡するというワルラスの法則が成り立つ。

74. 企業の費用は

$$c=wL+rK$$

と表され，ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}=wL+rK+\lambda(L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}-4)$$

となる。w，r 一定のもとでこれを L，K で微分すると

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial L}=w+\frac{3}{4}L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}\lambda=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial K}=r+\frac{1}{4}L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}}\lambda=0$$

が得られる。この両式から

$$L=\frac{3r}{w}K$$

を得る。生産関数より $L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}=4$ であるから

$$L=4\left(\frac{3r}{w}\right)^{\frac{1}{4}},\ K=4\left(\frac{w}{3r}\right)^{\frac{3}{4}}$$

が求まる。$L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}=4$ を満たすような L と K の変化 ΔL，ΔK を考えると $\frac{3}{4}L^{-\frac{1}{4}}K^{\frac{1}{4}}\Delta L+\frac{1}{4}L^{\frac{3}{4}}K^{-\frac{3}{4}}\Delta K=0$ より $\Delta K=-3\frac{K}{L}\Delta L$ が得られる。この関係を満たす費用の変化を Δc とすると

$$\Delta c=w\Delta L+r\Delta K=(w-3r\frac{K}{L})\Delta L$$

が得られる。$\Delta L>0$（労働投入量の増加）として $w-3r\frac{K}{L}<0$ のとき $\Delta c<0$，$w-3r\frac{K}{L}>0$ のとき $\Delta c>0$ なので $L=\frac{3r}{w}K$ を満たす水準よりも L が小さいときに

L の増加によって費用が減少し，その水準よりも L が大きいときには L の増加によって費用が増加する。したがって $L = \frac{3r}{w}K$ が成り立つところで費用が最小化される。

$L = 4\left(\frac{3r}{w}\right)^{\frac{1}{4}}$，$K = 4\left(\frac{w}{3r}\right)^{\frac{3}{4}}$ を $c = wL + rK$ に代入すると

$$c = 4w^{\frac{3}{4}}(3r)^{\frac{1}{4}} + 4\left(\frac{w}{3}\right)^{\frac{3}{4}} r^{\frac{1}{4}} = 16\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}} w^{\frac{3}{4}} r^{\frac{1}{4}}$$

となる。これを w，r で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial w} = 12\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{1}{4}} = 4\left(\frac{3r}{w}\right)^{\frac{1}{4}} = L$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = 4\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{4}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{3}{4}} = 4\left(\frac{w}{3r}\right)^{\frac{3}{4}} = K$$

が導かれる。これらはシェパードの補題の例になっている。

75. 前問と同様。

企業の費用は

$$c = wL + rK$$

と表され，ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda(L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} - 4)$$

となる。w，r 一定のもとでこれを L，K で微分すると

$$w + \frac{1}{3}L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{2}{3}}\lambda = 0$$

$$r + \frac{2}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{3}}\lambda = 0$$

が得られる。この両式から

$$L = \frac{r}{2w}K$$

を得る。生産関数より $L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} = 4$ であるから

$$L = 4\left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}},\ K = 4\left(\frac{2w}{r}\right)^{\frac{1}{3}}$$

が求まる。$L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} = 4$ を満たすような L と K の変化 ΔL，ΔK を考えると $\frac{1}{3}L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{2}{3}}\Delta L + \frac{2}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{3}}\Delta K = 0$ より $\Delta K = -\frac{1}{2}\frac{K}{L}\Delta L$ が得られる。この関係を満たす費用の変化を Δc とすると

$$\Delta c = w\Delta L + r\Delta K = (w - \frac{r}{2}\frac{K}{L})\Delta L$$

が得られる。$\Delta L > 0$（労働投入量の増加）として $w - \frac{r}{2}\frac{K}{L} < 0$ のとき $\Delta c < 0$, $w - \frac{r}{2}\frac{K}{L} > 0$ のとき $\Delta c > 0$ なので $L = \frac{r}{2w}K$ を満たす水準よりも L が小さいときに L の増加によって費用が減少し，その水準よりも L が大きいときには L の増加によって費用が増加する。したがって $L = \frac{r}{2w}K$ が成り立つところで費用が最小化される。

$L = 4\left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}}$，$K = 4\left(\frac{2w}{r}\right)^{\frac{1}{3}}$ を $c = wL + rK$ に代入すると

$$c = 4w^{\frac{1}{3}}\left(\frac{r}{2}\right)^{\frac{2}{3}} + 4(2w)^{\frac{1}{3}}r^{\frac{2}{3}} = 12\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} w^{\frac{1}{3}}r^{\frac{2}{3}}$$

となる。これを w，r で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial w} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{r}{w}\right)^{\frac{2}{3}} = 4\left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} = L$$

$$\frac{\partial c}{\partial r} = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{w}{r}\right)^{\frac{1}{3}} = 4\left(\frac{2w}{r}\right)^{\frac{1}{3}} = K$$

が導かれる。これらはシェパードの補題の例になっている。

76. ある企業（企業 i とする）の利潤は

$$\pi_i = px_i - x_i^2 - 100 = (240 - 4X)x_i - x_i^2 - 100,$$
$$X = x_1 + x_2 + \cdots x_i + \cdots + x_n$$

と表される。x_i 以外の産出量を一定としてこれを x_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx_i} = 240 - 4x_i - 4X - 2x_i = 0$$

が得られる。均衡においてはすべての企業の産出量が等しいので $X = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{120}{2n+3}$$

が求まる。全企業の産出量の合計は

$$X = nx_i = \frac{120n}{2n+3}$$

であるが，この式は

$$X = \frac{120}{2 + \frac{3}{n}}$$

と変形されるので，n が非常に大きな値になって行くと X は 60 に近づいて行く。そのとき財の価格は 0 に近づく。

各企業（企業 i で代表させる）の費用関数が $c_i = 4x_i$ であるとすると利潤は

$$\pi_i = px_i - 4x_i = (240 - 4X)x_i - 4x_i,\ X = x_1 + x_2 + \cdots x_i + \cdots + x_n$$

と表される。x_i 以外の産出量を一定としてこれを x_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dx_i} = 236 - 4x_i - 4X = 0$$

が得られる。均衡においてはすべての企業の産出量が等しいので $X = nx_i$ であるから

$$x_i = \frac{59}{n+1}$$

が求まる。全企業の産出量の合計は

$$X = nx_i = \frac{59n}{n+1}$$

であるが，この式は

$$X = \frac{59}{1+\frac{1}{n}}$$

と変形されるので，n が非常に大きな値になって行くと X は 59 に近づいて行く。そのとき財の価格は 4 に近づく。

77.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i(x_i, \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}(m_j - x_j))$$

を x_i で微分してゼロとおくと各 i について

$$\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j \frac{\partial u_j}{\partial y} = 0 \tag{4.26}$$

が得られる。x_j の内の 1 つが x_i である。この式から

$$\alpha_j = \frac{1}{p}\frac{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{\partial u_k}{\partial y}}{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}}$$

が得られる。ただし i を j に，j を k に変えてある。これを (4.26) の各 α_j に代入すると

$$\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{1}{p^2}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{\partial u_k}{\partial y}\right)\frac{\frac{\partial u_j}{\partial y}}{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = 0 \tag{4.27}$$

となる。$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{\partial u_k}{\partial y}$ は定数として扱え，かつ (4.26) より $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \frac{\partial u_k}{\partial y} = p\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ であるから，(4.27) の両辺を $\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ で割って整理すれば

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{\partial u_j}{\partial y}}{\frac{\partial u_j}{\partial x_j}} = p$$

が導かれる。これは (2.26) と同一である。

78. プレイヤー A，B それぞれの最適反応を考えよう。

(i) プレイヤー A の最適反応

B が X を選んだときは Y が最適であり，B が Y を選んだときは X が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が X を選んだときは X も Y も最適であり，A が Y を選んだときは X が最適である。

したがってナッシュ均衡は（X, Y）（A が X，B が Y）および (Y, X)（A が Y，B が X）の 2 つある。

79.（1 つの例）

$b > a, a > 3, 2a > b + 1$ となるように a，b を選ぶ。たとえば $a = 6$，$b = 8$ と仮定してみよう。するとこのゲームは次のように表される。

プレイヤー B

プレイヤーA

	大	小
大	6, 6	1, 8
小	8, 1	3, 3

最適反応は次のようになる。

(i) プレイヤー A の最適反応

B が大を選んだときは小が最適であり，B が小を選んだときにも小が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が大を選んだときは小が最適であり，A が小を選んだときにも小が最適である。

したがって「小」が両方のプレイヤーにとって支配戦略となり，ナッシュ均衡は (小, 小) のみである。

80.（1 つの例）

たとえば $a = 8$，$b = 6$，$c = 4$ と仮定してみよう。するとこのゲームは次のように表される。

プレイヤー B

プレイヤーA

	大	小
大	8, 8	4, 6
小	6, 4	3, 3

最適反応は次のようになる。

(i) プレイヤー A の最適反応

B が大を選んだときは大が最適であり，B が小を選んだときも大が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が大を選んだときは大が最適であり，A が小を選んだときも大が最適である。したがってナッシュ均衡は (大, 大) のみである。

グローブズメカニズム（あるいは修正されたグローブズメカニズム）では自分の負担が自分の申告額ではなく相手の申告額によって決まるように設計されている。この例のゲームでは相手が「大」を選べば自分が「大」を選んでも「小」を選んでも公共財が供給されるが「小」を選んだときには公共財の供給量は少なくなる。一方負担は相手の申告「大」によって決まるので利得は下がってしまう。したがって囚人のジレンマのように小を選ぶインセンティブはない。一方相手が小を選んだときには自分が大を選ばなければ公共財は供給されないが，自分の負担は相手の申告によって決まっているので公共財が供給されるべきであるとすれば自分は大を申告すべきである。

81. 最適反応は次のようになる。
 (i) プレイヤー A の最適反応
 B が X を選んだときは Y が最適であり，B が Y を選んだときにも Y が最適である。
 (ii) プレイヤー B の最適反応
 A が X を選んだときは X が最適であり，A が Y を選んだときは Y が最適である。

 したがってナッシュ均衡は (Y, Y)（ともに Y を選ぶ）である。

82. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 2(1-p)(1-q) = 2 - pq$$

$$\pi_B = 2pq+3p(1-q)+3(1-p)q+(1-p)(1-q) = 1+2p+2q-3pq = 1+q(2-3p)+2p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。
 (i) プレイヤー A の最適反応
 [1] $0 < q \leqq 1$ のときは $p = 0$ が最適
 [2] $q = 0$ のときは p の値は何でもよい
 (ii) プレイヤー B の最適反応
 [1] $\frac{2}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 0$ が最適
 [2] $0 \leqq p < \frac{2}{3}$ のときは $q = 1$ が最適
 [3] $p = \frac{2}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。
 (i) $p = 0, q = 1$。これはプレイヤー A が Y，B が X を選ぶ純粋戦略からなる均衡である。
 (ii) $q = 0$ で $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$。この均衡ではプレイヤー B は純粋戦略として Y を選ぶが，

プレイヤー A は $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ の範囲で純粋戦略（X）または混合戦略を選ぶ。したがってこの均衡には次のような均衡も含まれる。

「$p = 1, q = 0$，プレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略からなる均衡」

83. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq+3p(1-q)+2(1-p)q+(1-p)(1-q) = 1+2p+q-3pq = 1+p(2-3q)+q$$

$$\pi_B = 2pq+p(1-q)+(1-p)q+3(1-p)(1-q) = 3-2p-2q+3pq = 3+q(3p-2)-2p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(i) プレイヤー A の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < q \leqq 1$ のときは $p = 0$ が最適

[2] $0 \leqq q < \frac{2}{3}$ のときは $p = 1$ が最適

[3] $q = \frac{2}{3}$ のときは p の値は何でもよい

(ii) プレイヤー B の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 1$ が最適

[2] $0 \leqq p < \frac{2}{3}$ のときは $q = 0$ が最適

[3] $p = \frac{2}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は $p = \frac{2}{3}$，$q = \frac{2}{3}$ のときのみである（p と q の値が等しいのはこのゲームの構造によるものであり混合戦略によるナッシュ均衡において常にそうであるとは限らない）。

84. プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq + 3p(1-q) + 2(1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 + p(2-3q) + q$$

$$\pi_B = pq + 2p(1-q) + 3(1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 + q(2-3p) + p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(i) プレイヤー A の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < q \leqq 1$ のときは $p = 0$ が最適

[2] $0 \leqq q < \frac{2}{3}$ のときは $p = 1$ が最適

[3] $q = \frac{2}{3}$ のときは p の値は何でもよい

(ii) プレイヤー B の最適反応

[1] $\frac{2}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 0$ が最適

[2] $0 \leqq p < \frac{2}{3}$ のときは $q = 1$ が最適

[3] $p = \frac{2}{3}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(i) $p=0, q=1$。これはプレイヤー A が Y，B が X を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(ii) $p=1, q=0$。これはプレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(iii) $p=\frac{2}{3}, q=\frac{2}{3}$。これはともに（純粋戦略ではない）混合戦略を選ぶ均衡である。

また $\frac{2}{3}$ になってしまった。別のゲームを考えてみよう。

プレイヤー B

プレイヤー A		戦略 X	戦略 Y
	戦略 X	1, 1	4, 2
	戦略 Y	3, 5	1, 1

この場合プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq+4p(1-q)+3(1-p)q+(1-p)(1-q) = 1+3p+2q-5pq = 1+p(3-5q)+2q$$

$$\pi_B = pq+2p(1-q)+5(1-p)q+(1-p)(1-q) = 1+p+4q-5pq = 1+q(4-5p)+p$$

となる。このゲームの均衡は次のようになる。

(i) $p=0, q=1$。これはプレイヤー A が Y，B が X を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(ii) $p=1, q=0$。これはプレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略による均衡である。

(iii) $p=\frac{4}{5}, q=\frac{3}{5}$。これはともに（純粋戦略ではない）混合戦略を選ぶ均衡である。

85. プレイヤー A の戦略は X と Y の 2 つであるが，プレイヤー B の戦略は次の 4 つある。

(i) XX：A が X のときは X，Y のときも X

(ii) XY：A が X のときは X，Y のときは Y

(iii) YX：A が X のときは Y，Y のときは X

(iv) YY：A が X のときは Y，Y のときも Y

この動学的なゲームを標準型ゲームで表現すると次の表が得られる。

プレイヤー B

プレイヤー A		XX	XY	YX	YY
	戦略 X	2, 2	2, 2	5, 3	5, 3
	戦略 Y	3, 5	2, 2	3, 5	2, 2

最適反応を考えてみよう。

(i) プレイヤー A の最適反応

B が XX を選んだときは Y が最適であり，B が XY を選んだときは X も Y も最適であり，B が YX を選んだときは X が最適であり，B が YY を選んだときは X

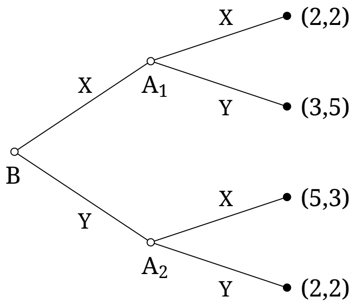
が最適である。

(ii) プレイヤー B の最適反応

A が X を選んだときは YX と YY が最適であり，A が Y を選んだときは XX と YX が最適である。

したがってナッシュ均衡は (X, YY)（A が X，B が YY），(Y, XX)（A が Y，B が XX），(X, YX)（A が X，B が YX）の 3 つある。しかし (X, YY) は A が Y を選んだときに B が Y を選ぶという前提に立っており合理的ではない。また (Y, XX) は A が X を選んだときに B が X を選ぶという前提に立っておりこれも合理的ではない。したがって合理的なナッシュ均衡（部分ゲーム完全均衡）は (X, YX) である。

86. ゲームの樹は次のように描かれる。



左側の数字がプレイヤー A の，右側の数字がプレイヤー B の利得である。B はプレイヤー B が，A_1，A_2 はプレイヤー A が意思決定する時点を表している。A_1 においてA は Y を選び，A_2 においては X を選ぶ。それに対応して B は X を選ぶ。したがって部分ゲーム完全均衡は (YX, X) である。

87. B_1 において B は Y を選び，B_2 においては X を選ぶ。それに対応して A は Y を選ぶ。したがって部分ゲーム完全均衡は (Y, YX) である。

88. アメリカが核兵器を持つ確率を p，ロシアが核兵器を持つ確率を q とする。アメリカ，ロシアの期待利得はそれぞれ次のように表される。

$$\pi_A = -10pq + 5p(1-q) - 15(1-p)q + 10(1-p)(1-q) = 5p(2q-1) - 25q + 10$$

$$\pi_R = -10pq - 15p(1-q) + 5(1-p)q + 10(1-p)(1-q) = 5q(2p-1) - 25p + 10$$

アメリカの最適反応は以下のようである。

(i) $0 \leqq q < \frac{1}{2}$ のとき $p = 0$ が最適

(ii) $\frac{1}{2} < q \leqq 1$ のとき $p = 1$ が最適

(iii) $q = \frac{1}{2}$ のとき p は何でもよい（$0 \leqq p \leqq 1$ の範囲で）

ロシアの最適反応も同様に

(i) $0 \leqq p < \frac{1}{2}$ のとき $q = 0$ が最適

(ii) $\frac{1}{2} < p \leqq 1$ のとき $q = 1$ が最適

(iii) $p = \frac{1}{2}$ のとき q は何でもよい（$0 \leqq q \leqq 1$ の範囲で）

である。したがってナッシュ均衡は以下のようになる。

(i) $p = 0$，$q = 0$。これはアメリカ，ロシア両国が核兵器を持たない純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(ii) $p = 1$，$q = 1$。これはアメリカ，ロシア両国が核兵器を持つ純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(iii) $p = \frac{1}{2}$，$q = \frac{1}{2}$。これは両国が純粋戦略ではない混合戦略を選ぶナッシュ均衡である。

89. アメリカが核兵器を持つ確率を p，ロシアが核兵器を持つ確率を q とする。アメリカ，ロシアの期待利得はそれぞれ次のように表される。

$$\begin{aligned}\pi_A &= -20pq + 15p(1-q) - 15(1-p)q + 10(1-p)(1-q)\\ &= -10pq + 5p - 25q + 10 = 5p(1-2q) - 25q + 10\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_R &= -20pq - 15p(1-q) + 15(1-p)q + 10(1-p)(1-q)\\ &= -10pq - 25p + 5q + 10 = 5q(1-2p) - 25p + 10\end{aligned}$$

アメリカの最適反応は以下のようである。

(i) $0 \leqq q < \frac{1}{2}$ のとき $p = 1$ が最適

(ii) $\frac{1}{2} < q \leqq 1$ のとき $p = 0$ が最適

(iii) $q = \frac{1}{2}$ のとき p は何でもよい（$0 \leqq p \leqq 1$ の範囲で）

ロシアの最適反応も同様に

(i) $0 \leqq p < \frac{1}{2}$ のとき $q = 1$ が最適

(ii) $\frac{1}{2} < p \leqq 1$ のとき $q = 0$ が最適

(iii) $p = \frac{1}{2}$ のとき q は何でもよい（$0 \leqq q \leqq 1$ の範囲で）

である。したがってナッシュ均衡は以下のようになる。

(i) $p = 0$，$q = 1$。これはアメリカが核兵器を持たず，ロシアが持つという純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(ii) $p = 1$，$q = 0$。これはアメリカが核兵器を持ち，ロシアが持たないという純粋戦略のナッシュ均衡に相当する。

(iii) $p = \frac{1}{2}$，$q = \frac{1}{2}$。これは両国が純粋戦略ではない混合戦略を選ぶナッシュ均衡である。

90. 企業 2 の利潤は

$$\pi_2 = [32 - 2(x_2 + kx_1)]x_2$$

であるから x_1 を与えられたものとしてこれを x_2 で微分してゼロとおくと

$$32 - 2kx_1 - 4x_2 = 0$$

より

$$x_2 = 8 - \frac{k}{2}x_1$$

が得られる。これをもとに企業 1 の利潤は

$$\pi_1 = [32 - 2(x_1 + 8k - \frac{k^2}{2}x_1)]x_1$$

と表される。したがって企業 1 の利潤最大化条件は

$$32 - 16k - 2(2 - k^2)x_1 = 0$$

となり

$$x_1 = \frac{8(2 - k)}{2 - k^2}$$

を得る。そのときの企業 2 の産出量は

$$x_2 = 8 - k\frac{4(2 - k)}{2 - k^2} = \frac{4(4 - 2k - k^2)}{2 - k^2}$$

である。また，各企業が生産する財の価格は

$$p_1 = 32 - 2x_1 - 2kx_2 = \frac{8[4 - 2k - 2k^2 + k^3]}{2 - k^2} = 8(2 - k)$$

$$p_2 = 32 - 2kx_1 - 2x_2 = \frac{8[4 - 2k - k^2]}{2 - k^2}$$

であるから，企業 1，2 の利潤はそれぞれ

$$\pi_1 = p_1x_1 = \frac{64(2 - k)^2}{2 - k^2},\ \pi_2 = p_2x_2 = \frac{32(4 - 2k - k^2)^2}{(2 - k^2)^2}$$

となる。これらを比較すると

$$\begin{aligned}\pi_1 - \pi_2 &= \frac{64(2 - k)^2}{2 - k^2} - \frac{32(4 - 2k - k^2)^2}{(2 - k^2)^2} \\ &= \frac{32}{(2 - k^2)^2}[2(4 - 4k + k^2)(2 - k^2) - (4 - 2k - k^2)^2] \\ &= \frac{32k^3}{(2 - k^2)^2}(4 - 3k)\end{aligned}$$

となる。したがって $-1 < k < 1$ であるから $k > 0$ のとき $\pi_1 > \pi_2$，$k < 0$ のとき $\pi_1 < \pi_2$ である。

91. (i) 企業 1，2 の利潤最大化条件は

$$48 - 4p_1 + p_2 = 0$$

$$48 - 4p_2 + p_1 = 0$$

これらより $p_1 = p_2 = 16$ が求まる。

(ii) 企業 2 の反応関数は

$$p_2 = 12 + \frac{1}{4}p_1$$

となるから企業 1 の利潤は

$$\pi_1 = \left(60 - \frac{7}{4}p_1\right)p_1$$

と表される。したがって利潤最大化条件は

$$60 - \frac{7}{2}p_1 = 0$$

となり。$p_1 = \frac{120}{7}$ が得られる。そのとき $p_2 = \frac{114}{7}$ である。需要関数より各企業の産出量は $x_1 = \frac{210}{7}(= 30)$，$x_2 = \frac{228}{7}$ となるので利潤

$$\pi_1 = \frac{25200}{49},\ \pi_2 = \frac{25992}{49}$$

が得られる。このとき $\pi_2 > \pi_1$ であるからフォロワーである企業 2 の利潤の方が大きい。

92. 各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 として，以下の入札額がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示さなければならない。

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

プレイヤー 1 が上記の入札額を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が入札額 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1}{2} + 1$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1}{2} + 1$ は 2 から 2.5 までの値を等しい確率でとる（$2 \leqq v_1 \leqq 3$ であるから）。したがって入札に勝つ確率は $2 \leqq p_2 \leqq 2.5$ として $\frac{p_2 - 2}{0.5} = 2(p_2 - 2)$ である。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$2(p_2 - 2)(v_2 - p_2) = -2(p_2^2 - 2p_2 - p_2v_2 + 2v_2)$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$2p_2 - (2 + v_2) = 0$$

が得られ，期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1$$

を得る。

93. 各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 として，以下の入札額がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示さなければならない。

$$p_1 = \frac{v_1+1}{2},\ p_2 = \frac{v_2+1}{2}$$

プレイヤー 1 が上記の入札額を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が入札額 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1+1}{2}$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1+1}{2}$ は 1 から 2 までの値を等しい確率でとる（$1 \leqq v_1 \leqq 3$ であるから）。したがって入札に勝つ確率は $1 \leqq p_2 \leqq 2$ として $p_2 - 1$ である。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$(p_2 - 1)(v_2 - p_2) = -(p_2^2 - p_2 - p_2 v_2 + v_2)$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$2p_2 - (1 + v_2) = 0$$

が得られ，期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2+1}{2}$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1+1}{2}$$

を得る。

94. プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = p_2(v_2)$$

とする。この逆関数を

$$v_2 = g_2(p_2)$$

と表す。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $g_2(p_1) - 2$ に等しい（一様分布の仮定によって）。そのとき期待利得は

$$(v_1 - p_1)(g_2(p_1) - 2)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) + 2 = 0$$

が得られる。$g_2'(p_1) = g_1'(p_1)$ より上の式は

$$(v_1 - p_1(v_1))g_1'(p_1) - g_1(p_1) + 2 = 0$$

と書き直される。さらに

$$g_1'(p_1) = \frac{1}{p_1'(v_1)}$$

であるから，

$$(v_1 - p_1(v_1))\frac{1}{p_1'(v_1)} - v_1 + 2 = 0$$

が導かれ，これを整理して

$$(v_1 - p_1(v_1)) - (v_1 - 2)p_1'(v_1) = 0$$

を得る。この式を満たす関数 $p_1(v_1)$ は

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1$$

である。実際 $p_1' = \frac{1}{2}$ であるから上の式に代入すると

$$(v_1 - \frac{v_1}{2} - 1) - \frac{1}{2}(v_1 - 2) = 0$$

が成り立つ。

95. プレイヤー 2 の入札額を $p_2 = p_2(v_2)$ とし，その逆関数を $v_2 = g_2(p_2)$ と表す。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $\frac{g_2(p_1)-1}{3}$ に等しい（一様分布の仮定によって）。そのとき期待利得は

$$\frac{1}{3}(v_1 - p_1)(g_2(p_1) - 1)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) + 1 = 0$$

が得られる。以下は上の問題とほぼ同じ。

96. 割り引き因子を δ とすると戦略 Y を選ぶことが利益にならない条件は次の通りである。

$$5(1 + \delta + \delta^2 + \cdots) > 7 + 2(\delta + \delta^2 + \cdots)$$

これより

$$\frac{5}{1-\delta} > 7 + \frac{2\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta > \frac{2}{5}$$

が求まる。したがって割り引き因子が $\frac{2}{5}$ より大きければ（それ以上に割り引かなければ），ともに上記のトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となり戦略 X を選ぶ状態が永遠に続く。このゲームでしっぺ返し戦略が部分ゲーム完全均衡となるのは $\delta = \frac{1}{2}$ のときである。右下の 2 が 3 であれば $\frac{2}{5}$ も $\frac{1}{2}$ になる。それより大きければしっぺ返し戦略は部分ゲーム完全均衡にならない。

97. 割り引き因子を δ とすると，3 回のゲームで相手が「戦略 X」「戦略 Y」「戦略 Y」を選び自分が「戦略 Y」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$7+\delta+\delta^2 \tag{4.28}$$

であり，互いに「戦略 X」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$4(1+\delta+\delta^2) \tag{4.29}$$

である。(4.29) が (4.28) より大きくなる条件は $\delta+\delta^2>1$ であり，この式から

$$\delta>0.62$$

が得られる。

このゲームでトリガー戦略を考えてみよう。戦略 Y を選ぶことが絶対に利益にならない条件は次の通りである。

$$4(1+\delta+\delta^2+\cdots)>7+(\delta+\delta^2+\cdots)$$

これより

$$\frac{4}{1-\delta}>7+\frac{\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta>\frac{1}{2}$$

が求まる。このゲームでしっぺ返し戦略が部分ゲーム完全均衡となるのは $\delta=\frac{3}{4}$ のときである。右下の 1 が 3 であれば $\frac{1}{2}$ も $\frac{3}{4}$ になる。それより大きければしっぺ返し戦略は部分ゲーム完全均衡にならない。

98. (i) そのような完全ベイジアン均衡があるとすると，企業 A が X を選んだときそれが（確率 1 で）タイプ S であり，企業 A が Y を選んだときそれが（確率 1 で）タイプ W であるという推測が企業 B にとって整合的な推測になる。したがって企業 B は X に対しては N を，Y に対しては F を選ぶ。しかし，そうするとタイプ W の企業 A は Y ではなく X を選んだ方が有利となるので均衡の条件を満たさない。よってそのような完全ベイジアン均衡はない。

(ii) そのような完全ベイジアン均衡があるとすると，企業 A が X を選んだときそれが（確率 1 で）タイプ W であり，企業 A が Y を選んだときそれが（確率 1 で）タイプ S であるという推測が企業 B にとって整合的な推測になる。したがって企業 B は X に対しては F を，Y に対しては N を選ぶ。しかし，そうするとタイプ W の企業 A は X ではなく Y を選んだ方が有利となるので均衡の条件を満たさない。よってそのような完全ベイジアン均衡はない。

99. (i) **完全ベイジアン均衡 1 の確認：　プレイヤー A の戦略の最適性**　プレイヤー A が X を選んだときプレイヤー B は N を，Y を選んだときは F を選ぶのでタイプ S のプレイヤー A が X を選んだときに得られる利得は 3，Y を選んだときに得られる利得は 0 であるから X を選ぶのは最適である。またタイプ W のプレイヤー A が X を選んだときに得られる利得は 1，Y を選んだときに得られる利得は 2 であるから Y を選ぶのは最適である。

プレイヤー B の戦略の最適性　プレイヤー B はプレイヤー A が X を選んだときにそれが間違いなくタイプ S であるという推測を持つので N が最適である。またプレイヤー A が Y を選んだときにそれが間違いなくタイプ W であるという推測を持つので F が最適である。

プレイヤー B の推測の整合性　この均衡おいてはタイプ S のプレイヤー A とタイプ W のプレイヤー A が異なる戦略を選ぶから，それぞれに応じて明確な推測を持つことができる。タイプ S のプレイヤー A は X を，タイプ W のプレイヤー A は Y を選ぶので完全ベイジアン均衡 1 に示されている推測は整合的である。

完全ベイジアン均衡 2 の確認：　プレイヤー A の戦略の最適性　プレイヤー A が X を選んだときプレイヤー B は F を，Y を選んだときは N を選ぶのでタイプ S のプレイヤー A が X を選んだときに得られる利得は 1，Y を選んだときに得られる利得は 2 であるから Y を選ぶのは最適である。またタイプ W のプレイヤー A が X を選んだときに得られる利得は 2，Y を選んだときに得られる利得は 3 であるから Y を選ぶのは最適である。

プレイヤー B の戦略の最適性　プレイヤー B はプレイヤー A が X を選んだときにそれが $\frac{1}{2}$ より小さい確率でタイプ S であるという推測を持つので F が最適である。またプレイヤー A が Y を選んだときにそれが確率 $\frac{2}{3}$ でタイプ S であるという推測を持つので N が最適である。

プレイヤー B の推測の整合性　この均衡においてはどちらのタイプのプレイヤー A も Y を選ぶから，プレイヤー A が Y を選んだときのプレイヤー B の推測はゲームが始まる前の確率と同じでなければならない。一方どちらのタイプのプレイヤー A も X を選ばないので，プレイヤー A が X を選んだときのプレイヤー B の推測には制約はなく，どのような推測を持ってもかまわない。

(ii) **完全ベイジアン均衡 1 の合理性**　タイプ S のプレイヤー A とタイプ W のプレイヤー A とが異なる戦略を選ぶのでプレイヤー B の推測の合理性には問題がない。

完全ベイジアン均衡 2 の合理性　問題はプレイヤー A が X を選んだときにプ

レイヤー B が持つ推測が合理的であるかどうかである。この均衡はプレイヤー A が X を選んだときにそれが $\frac{1}{2}$ より大きい確率でタイプ W であるという推測を持つという前提に基づいている。タイプ W のプレイヤー A が X を選んだときに得ることができる最大の利得は 2 であるがそれは均衡の利得 3 よりも小さい。一方タイプ S のプレイヤー A が X を選んだときに得ることができる最大の利得は 3 であり，それは均衡利得 2 よりも大きい。したがってプレイヤー A が X を選んだとき，プレイヤー B はそれが間違いなくタイプ S であるという推測を持つべきであるということになる。そうするとプレイヤー A が X を選んだときプレイヤー B は N を選ぶのが最適となり，完全ベイジアン均衡 2 は均衡ではなくなる。

(iii) そのような均衡があるとすれば企業 A がタイプ S である確率が $\frac{2}{3}$ であるから，両タイプの企業 A が X を選んだとき企業 B は N を選ぶのが最適となる。そうするとタイプ W の企業 A は Y を選んだ方が大きな利得を得られるので均衡とはならない。

(iv) そのような均衡があるとすれば，企業 A が X を選んだとき企業 B は F を，企業 A が Y を選んだとき企業 B は N を選ぶのが最適である。そうするとタイプ W の企業 A は Y を選んだ方が大きな利得を得られるので均衡とはならない。

100.（各自考えてみていただきたい）

101. (i) **コア**

3 人で提携を結んだときの A，B，C の取り分を x，y，z とする。コアの条件は次のように表される。

$$x+y+z=20,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 2$$

$$x+y \geqq 6,\ y+z \geqq 8,\ x+z \geqq 2$$

これらの条件を満たす配分の集合がコアである。条件より $0 \leqq x \leqq 12$，$0 \leqq y \leqq 18$，$2 \leqq z \leqq 14$ でなければならないが $(x,y,z)=(0,18,2)$ や $(x,y,z)=(6,0,14)$ などもコアに含まれる。本文中の例と比較して z（C の取り分）が 2 以上であるという点が異なる。

(ii) **仁**

各提携の不満は以下のようである。

$$\begin{aligned}
&\{A,B\}: \ v(\{A,B\}) - (x+y) = 6 - (x+y)\\
&\{B,C\}: \ v(\{B,C\}) - (y+z) = 8 - (y+z)\\
&\{A,C\}: \ v(\{A,C\}) - (x+z) = 2 - (x+z)\\
&\{A\}: \ v(\{A\}) - x = -x\\
&\{B\}: \ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}: \ v(\{C\}) - z = 2 - z
\end{aligned}$$

最大の不満の大きさを m とすると

$6-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 2-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ 2-z \leqq m,$

が得られる。$x+y+z=20$ よりこれらの条件は次のように書き直される。

$$-m \leqq x \leqq 12+m,\ -m \leqq y \leqq 18+m,\ 2-m \leqq z \leqq 14+m$$

$m=-6$ とすると

$$6 \leqq x \leqq 6,\ 6 \leqq y \leqq 12,\ 8 \leqq z \leqq 8$$

となるから，この -6 が最小化された最大の不満であり，$x=6$，$z=8$ が決まり，さらに $y=6$ が決まる。したがって仁となる配分は $(x,y,z)=(6,6,8)$ である。本文の例と比べると z が 1 大きくなり，y が 1 小さくなっている。$v(\{C\})=2$ および $v(\{A,C\})=2$ によって，C が自らの力で 2 の利得を確保する力を持ったことによって交渉の結果をより有利なものに変えることができたのである。その影響で B の取り分は減った。

(iii) **シャープレイ値**

各提携における各プレイヤーの貢献度は次の表で表される。

	A	B	C
$\{A,B,C\}$	20-8=12	20-2=18	20-6=14
$\{A,B\}$	6	6	–
$\{A,C\}$	0	–	2
$\{B,C\}$	–	6	8
$\{A\}$	0	–	–
$\{B\}$	–	0	–
$\{C\}$	–	–	2

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	0	6	14
$A \to AC \to ABC$	0	18	2
$B \to AB \to ABC$	6	0	14
$B \to BC \to ABC$	12	0	8
$C \to AC \to ABC$	0	18	2
$C \to BC \to ABC$	12	6	2

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均を求めると A，B，C それぞれ 5，8，7 であるからシャープレイ値にもとづく配分は $(x, y, z) = (5, 8, 7)$ である。上記の仁と同様に本文の例と比べると C の取り分が大きくなり，B の取り分が小さくなっている。これはやはり $v(\{C\}) = 2$ および $v(\{A, C\}) = 2$ によって，C が自力で 2 の利得を確保する力を持ったことによるものであると考えられる。

このように協力ゲームにおける自らの取り分を大きくするには，交渉がうまく行かなかったときに自力で確保できる利得を大きくしておくことが有効であると言える。

102. A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とするとこれらがコアに含まれるためには次の条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 11$$

$$x + y \geqq 9,\ y + z \geqq 8,\ x + z \geqq 7$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$x + y \geqq 9$，$y + z \geqq 8$ なので $z \leqq 2$，$x \leqq 3$ でなければならない。しかしそれでは $x + z \geqq 7$ が成り立たない。したがってこのゲームにはコアが存在しない。仁は定義できる。このゲームでは各提携の不満は次のように表される。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 9 - (x + y)\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 8 - (y + z)\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 7 - (x + z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z
\end{aligned}$$

最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$9 - (x + y) \leqq m,\ 8 - (y + z) \leqq m,\ 7 - (x + z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$m=\frac{2}{3}$ とすると

$$x+y \geqq \frac{25}{3},\ y+z \geqq \frac{22}{3},\ x+z \geqq \frac{19}{3},\ x \geqq -\frac{2}{3},\ y \geqq -\frac{2}{3},\ z \geqq -\frac{2}{3}$$

が得られ，これらの式から

$$x=\frac{11}{3},\ y=\frac{14}{3},\ z=\frac{8}{3}$$

が求まる。このとき

$$x+y=\frac{25}{3}<9,\ y+z=\frac{22}{3}<8,\ x+z=\frac{19}{3}<7$$

であるから 2 人づつの提携には不満が残る。

$m=\frac{2}{3}$ を求める。

$$9-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 7-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

と $x+y+z=11$ より

$$-m \leqq x \leqq 3+m,\ -m \leqq y \leqq 4+m,\ -m \leqq z \leqq 2+m$$

が得られる。問題 107 と同じ手順で $m=-1$ が最小化された最大の不満となりそうに思われるが，一方で不等式の右辺の和は 11 以上でなければならないので $9+3m \geqq 11$ から

$$m \geqq \frac{2}{3} > -1$$

となる。この $\frac{2}{3}$ が最小化された最大の不満である。

問題 107 では

$$-m \leqq x \leqq 12+m,\ -m \leqq y \leqq 18+m,\ 2-m \leqq z \leqq 14+m$$

の右辺の和が 20 以上であるという条件 $44+3m \geqq 20$ より $m \geqq -8(<-6)$ となるので $m=-6$ が最小化された最大の不満であることに問題はない。

第 5 章

付録

5.1　ロイの恒等式の一般的証明

財の種類が 2 つのケースについてロイの恒等式を示す。一般的な効用関数についても予算制約式のもとで効用を最大化するような各財の需要が価格と所得の関数として求まり，それらを効用関数に代入して間接効用関数が得られる。所得を m としてその間接効用関数を $v(p_x, p_y, m) = u(x(p_x, p_y, m), y(p_x, p_y, m))$ と表す。$x(p_x, p_y, m)$，$y(p_x, p_y, m)$ は需要関数である。これを p_x で微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial p_x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p_x}$$

が得られる。また v を m で微分すると

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial m} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial m}$$

となる。一方，予算制約式

$$p_x x + p_y y = m$$

を m 一定のもとで p_x で微分すると

$$p_x\frac{\partial x}{\partial p_x} + p_y\frac{\partial y}{\partial p_x} = -x$$

を得る。また m で予算制約式を微分すると

$$p_x\frac{\partial x}{\partial m} + p_y\frac{\partial y}{\partial m} = 1$$

となる。これらの式と効用最大化の条件（限界代替率 = 相対価格）

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Big/\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{p_x}{p_y}$$

から

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial p_x}\right)\Big/\left(\frac{\partial v}{\partial m}\right) = x$$

が導かれる。

$$-\left(\frac{\partial v}{\partial p_y}\right)/\left(\frac{\partial v}{\partial m}\right)=y$$

も同様である。

5.2　マッケンジーの補題の一般的証明

財の種類が 2 つのケースについてマッケンジーの補題を示す。一般的な効用関数についても一定の効用を $\bar{u}$ として支出を最小化する各財の需要，すなわち補償需要を求めることができ，その補償需要を予算を表す式に代入して支出関数が得られる。その支出関数を

$$m(p_x,p_y,\bar{u})=p_x\tilde{x}+p_y\tilde{y}$$

と表す。ここで $\tilde{x}$，$\tilde{y}$ は補償需要関数である。この式を p_x で微分すると

$$\frac{\partial m}{\partial p_x}=\tilde{x}+p_x\frac{\partial\tilde{x}}{\partial p_x}+p_y\frac{\partial\tilde{y}}{\partial p_x}$$

となる。補償需要関数は効用一定のもとで導かれているが，その一定の効用 $\bar{u}$ については

$$u(\tilde{x},\tilde{y})=\bar{u}$$

と表され，これを p_x で微分すると

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial p_x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial\tilde{y}}{\partial p_x}=0 \tag{5.1}$$

が得られる。念のためこの式の各項目は次のように読む。

$\frac{\partial u}{\partial x}$：$x$ のわずかな変化による u の変化と x の変化の比 = x の限界効用

$\frac{\partial\tilde{x}}{\partial p_x}$：$p_x$のわずかな変化による x の補償需要（ = 効用一定のもとでの需要）の変化と p_xの変化の比

$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\tilde{x}}{\partial p_x}$ はこれらの積であり，**p_x のわずかな変化が引き起こす x の補償需要の変化による効用の変化を表す。**p_x が高くなる場合は x の補償需要が減少するので効用の変化は負である。

$\frac{\partial u}{\partial y}$：$y$ のわずかな変化による u の変化と y の変化の比 = y の限界効用

$\frac{\partial\tilde{y}}{\partial p_x}$：$p_x$のわずかな変化による y の補償需要の変化と p_xの変化の比

$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x}$ はこれらの積であり，**p_x のわずかな変化が引き起こす y の補償需要の変化による効用の変化を表す**。p_x が高くなる場合は y の補償需要が増加するので効用の変化は正である。右辺が 0 なのは一定の効用を保つような変化を考えることを意味する。

限界代替率 = 相対価格 の条件（$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial y}} = \frac{p_x}{p_y}$）から

$$p_x \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x} = 0 \tag{5.2}$$

となり

$$\frac{\partial m}{\partial p_x} = \tilde{x}$$

が得られる。同様にして

$$\frac{\partial m}{\partial p_y} = \tilde{y}$$

を得る。

支出関数が（効用一定のもとで）

$$m = p_x \tilde{x} + p_y \tilde{y}$$

と表されるから，x，y を一定とすると

$$\frac{\partial m}{\partial p_x} = \tilde{x}$$

となるのはあたりまえのように思われるがそういう意味ではない。p_x が変化すると $\tilde{x}$ も $\tilde{y}$ も変わる。支出最小化の条件によってその変化が打ち消し合うのである。(5.2) がそれを表している。

間接効用関数と支出関数が互いに逆関数であること

間接効用関数は p_1，p_2，m を与えられたものとして

$$v(p_1, p_2, m) = \max_{x_1, x_2} u(x_1, x_2),\ p_1 x_1 + p_2 x_2 = m$$

を意味する。この値を $\bar{u}$ とする。消費の増加が必ず効用を大きくするのなら $m' < m$ に対して

$$v(p_1, p_2, m') < \bar{u}$$

である。したがって $\bar{u}$ 以上の効用を実現するためには最低 m の予算が必要となり

$$\min_{x_1, x_2}(p_1 x_1 + p_2 x_2) \geq m,\ u(x_1, x_2) \geq \bar{u}$$

が成り立つ。$v(p_1, p_2, m) = \bar{u}$ であるから

$$\min_{x_1, x_2}(p_1 x_1 + p_2 x_2) = m,\ u(x_1, x_2) \geq \bar{u}$$

となるので支出関数

$$e(p_1, p_2, \bar{u}) = m$$

が得られる（m と区別して e で表す)。そのとき $u' > \bar{u}$ に対して

$$e(p_1, p_2, u') > m$$

が成り立つ。もし

$$e(p_1, p_2, u') \leq m$$

ならば，消費の増加が必ず効用を大きくするので予算を少し削っても $\bar{u}$ の効用が実現するはずであり $e(p_1, p_2, \bar{u}) < m$ となってしまう。したがって m の予算で実現可能な効用は $\bar{u}$ であり

$$v(p_1, p_2, m) = \bar{u}$$

となる。

5.3　スルツキー方程式の一般的導出など

5.3.1　スルツキー方程式

X 財の（通常の）需要関数は p_x，p_y および所得の関数であるが，効用水準が $\bar{u}$ のときの支出関数の値（必要最小限の予算）を $m(p_x, p_y, \bar{u})$ とすると

$$x(p_x, p_y, m(p_x, p_y, \bar{u})) = \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u})$$

が得られる。$\tilde{x}$ は補償需要関数である。この式は $\bar{u}$ の効用を実現できる所得において通常の需要と補償需要が一致することを意味する[*1]。通常の需要はその所得が一定であるとして価格と需要の関係を考えるものであり，効用は一定ではない。一方補償需要は効用を一定として価格と需要の関係を考えるものであり，所得は一定ではない。$u = \bar{u}$ を一定としてこれを p_x で微分すると

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} + \frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x}$$

を得る。p_y は変化していない。また m は $\bar{u}$ の効用が実現できるように適当に調整される。この式から

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x} - \frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}$$

[*1] $\bar{u}$ の効用を実現できる最小の支出，すなわち所得のもとで最大限達成できる効用は $\bar{u}$ に他ならない。もし $\bar{u}$ より大きい効用が実現できるとすれば，もともともっと少ない支出で $\bar{u}$ を実現できていたはずである。したがって $\bar{u}$ の効用を実現する補償需要と，その所得のもとで効用を最大化する通常の需要は等しい。

が導かれる。左辺は p_x の変化による x の通常の需要（所得一定のもとでの）の変化を，右辺第 1 項は p_x の変化による x の補償需要の変化，すなわち代替効果を，右辺第 2 項は p_x の変化による実質所得の変化に対応した x の通常の需要の変化，すなわち所得効果を表す。$\frac{\partial m}{\partial p_x}$ は効用を一定に保つために必要な所得の調整を表している。価格が高くなった場合は負，低くなった場合は正である。補償需要ではこの調整がなされているが通常の需要ではなされていないので差し引かなければならない。この式が**スルツキー方程式**である。同様にして p_y の変化について

$$\frac{\partial x}{\partial p_y}+\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_y}=\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_y}$$

から

$$\frac{\partial x}{\partial p_y}=\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_y}-\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_y}$$

が導かれる。左辺は p_y の変化による x の通常の需要（所得一定のもとでの）の変化を，右辺第 1 項は p_y の変化による x の補償需要の変化（代替効果）を，右辺第 2 項は p_y の変化による実質所得の変化に対応した x の通常の需要の変化（所得効果）を表す。Y 財については

$$\frac{\partial y}{\partial p_x}=\frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x}-\frac{\partial y}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_x}$$

および

$$\frac{\partial y}{\partial p_y}=\frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_y}-\frac{\partial y}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial p_y}$$

が得られる。

5.3.2　代替効果の符号について

2 財の場合の代替効果の符号について考えてみよう。支出関数の変化を考える。X 財の価格が p_x から $p_x+\Delta p_x$ へ，さらに $p_x+2\Delta p_x$ へ変化したとする。Δp_x はわずかな変化である。それぞれの支出関数を $m(p_x,p_y,\bar{u})$，$m(p_x+\Delta p_x,p_y,\bar{u})$，$m(p_x+2\Delta p_x,p_y,\bar{u})$ と表す。マッケンジーの補題により（Δp_x はわずかな変化であるから）

$$m(p_x+\Delta p_x,p_y,\bar{u})-m(p_x,p_y,\bar{u})=\tilde{x}(p_x,p_y,\bar{u})\Delta p_x \tag{5.3}$$

$$m(p_x+2\Delta p_x,p_y,\bar{u})-m(p_x+\Delta p_x,p_y,\bar{u})=\tilde{x}(p_x+\Delta p_x,p_y,\bar{u})\Delta p_x \tag{5.4}$$

となる。$m(p_x,p_y,\bar{u})$ と $m(p_x+2\Delta p_x,p_y,\bar{u})$ はそれぞれ X 財の価格が p_x，$p_x+2\Delta p_x$ のときの最小化された支出であるが。$p_x+\Delta p_x$ のときの支出を最小化する補償需要では p_x および $p_x+2\Delta p_x$ のときの支出は最小化されない。つまり

$$m(p_x,p_y,\bar{u})<p_x\tilde{x}(p_x+\Delta p_x,p_y,\bar{u})+p_y\tilde{y}(p_x+\Delta p_x,p_y,\bar{u})$$

および

$$m(p_x + 2\Delta p_x, p_y, \bar{u}) < (p_x + 2\Delta p_x)\tilde{x}(p_x + \Delta p_x, p_y, \bar{u}) + p_x \tilde{y}(p_x + \Delta p_x, p_y, \bar{u})$$

が成り立つ。これらの条件は無差別曲線が凸であることに対応する*2。両辺をそれぞれ加えると

$$\begin{aligned} m(p_x, p_y, \bar{u}) + m(p_x + 2\Delta p_x, p_y, \bar{u}) <& 2(p_x + \Delta p_x)\tilde{x}(p_x + \Delta p_x), p_y, \bar{u}) \\ &+ 2p_x \tilde{y}(p_x + \Delta p_x, p_y, \bar{u}) \\ =& 2m(p_x + \Delta p_x, p_y, \bar{u}) \end{aligned}$$

が得られる。この式から次の式を得る。

$$m(p_x + 2\Delta p_x, p_y, \bar{u}) - m(p_x + \Delta p_x, p_y, \bar{u}) < m(p_x + \Delta p_x, p_y, \bar{u}) - m(p_x, p_y, \bar{u})$$

したがって (5.3)，(5.4) より

$$\tilde{x}(p_x + \Delta p_x, p_y, \bar{u})\Delta p_x < \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u})\Delta p_x \tag{5.5}$$

が導かれるから，X 財価格の上昇 ($\Delta p_x > 0$) によって X 財の補償需要が減少し，下落 ($\Delta p_x < 0$) によって増加することがわかる。したがって X 財価格の変化がそれ自身の補償需要に及ぼす代替効果は負である（$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_x} < 0$)。

5.3.3　代替効果の対称性

上の議論では，ある財の価格の変化がその財に及ぼす代替効果を考えたが，もう一方の財に及ぼす代替効果の性質について考えてみよう。まず 2 変数関数の偏微分について次の事実を示す。

> 「x，y の関数 $f(x, y)$ を x と y の両方で微分するとき，どの順に微分しても結果は等しい。」
> これは次のようにして証明される。x の x_0 からのわずかな変化を Δx で，y の y_0 からのわずかな変化を Δy で表す。まず $f(x, y)$ を $(x, y) = (x_0, y_0)$ において x で微分することを考えると $\frac{\partial f}{\partial x}$ は

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{5.6}$$

*2 支出が最小化されている状況では無差別曲線（効用一定なので固定されている）と予算制約線（支出額によって変るが傾きは相対価格で決まっている）が接している。その状態で 1 つの財の価格が変化すると予算制約線の傾きが変り，もとの支出最小化を実現する消費量を表す点を通る新たな予算制約線は無差別曲線と交わるので変化した後の価格のもとで支出を最小化する消費の組はその線よりも下に位置する。

において Δx を 0 に近づけたときの極限として求められる。同様に $y = y_0 + \Delta y$ においては

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \tag{5.7}$$

の Δx を 0 に近づけたときの極限が $f(x, y)$ の x による微分の値である。一方 $f(x, y)$ を $(x, y) = (x_0, y_0)$ において y で微分することを考えると $\frac{\partial f}{\partial y}$ は

$$\frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \tag{5.8}$$

において Δy を 0 に近づけたときの極限として求められる。同様に $x = x_0 + \Delta x$ においては

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta y} \tag{5.9}$$

の Δy を 0 に近づけたときの極限が $f(x, y)$ の y による微分の値である。
(5.7) と (5.6) の差をとって Δy で割ると

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) + f(x_0, y_0)}{\Delta x \Delta y} \tag{5.10}$$

となるが，この式において $x_0 + \Delta x$ を x_0 に，$y_0 + \Delta y$ を y_0 に近づけたときの極限が $f(x, y)$ を x で微分し，さらに y で微分して得られる $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ の値に他ならない。同様に (5.9) と (5.8) の差をとって Δx で割ると

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)}{\Delta x \Delta y} \tag{5.11}$$

となるが，この式において $y_0 + \Delta y$ を y_0 に，$x_0 + \Delta x$ を x_0 に近づけたときの極限が $f(x, y)$ を y で微分し，さらに x で微分して得られる $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ の値に他ならない。
(5.10) と (5.11) とは等しいから

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \tag{5.12}$$

が証明された。

支出関数 $m(p_x, p_y, \bar{u})$ に (5.12) を適用すると

$$\frac{\partial^2 m(p_x, p_y, \bar{u})}{\partial p_y \partial p_x} = \frac{\partial^2 m(p_x, p_y, \bar{u})}{\partial p_x \partial p_y}$$

となるが，マッケンジーの補題によって

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_y} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x} \tag{5.13}$$

を得る。したがって代替効果は対称的である。

5.4　補償変分と等価変分および消費者余剰

所得が一定で価格が変化すると消費者の効用も変わる。今，所得を m，X，Y 財の価格を p_x，p_y として p_x が p'_x に上昇したと仮定する。それによって消費者の効用は低下するが，その低下を埋め合わせるのに必要な所得の増加分を考える。その増加分を Δm とすると間接効用関数 v を使って次のように表せる。

$$v(p_x, p_y, m) = v(p'_x, p_y, m + \Delta m)$$

$v(p_x, p_y, m) = \bar{u}$ とすると支出関数を（m と区別して）e として次の式が得られる。

$$\Delta m = (m + \Delta m) - m = e(p'_x, p_y, \bar{u}) - e(p_x, p_y, \bar{u})$$

この Δm を**補償変分**と呼び CV で表す。価格変化による効用の変化を補償するという意味である。

次に，価格変化による効用の変化を価格が一定で所得が変化した場合に置き換えて考えてみよう。その所得の変化を $\Delta m'$ とすると間接効用関数によって

$$v(p_x, p_y, m - \Delta m') = v(p'_x, p_y, m)$$

を得る。価格上昇によって効用は下がるので $m - \Delta m'$ としてある。$v(p'_x, p_y, m) = \bar{u}'$ とすると支出関数によって

$$\Delta m' = m - (m - \Delta m') = e(p'_x, p_y, \bar{u}') - e(p_x, p_y, \bar{u}')$$

が得られる。この $\Delta m'$ を**等価変分**と呼び EV で表す。価格変化による効用変化と所得変化による効用変化が等価になるという意味である。マッケンジーの補題によって

$$\frac{\partial e(p_x, p_y, u)}{\partial p_x} = \tilde{x}(p_x, p_y, u)$$

を得る。$\tilde{x}(p_x, p_y, u)$ は効用水準が u のときの補償需要関数である。したがって補償変分と等価変分を補償需要関数の積分によって次のように表すことができる。

$$CV = \int_{p_x}^{p'_x} \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u}) dp_x = e(p'_x, p_y, \bar{u}) - e(p_x, p_y, \bar{u})$$

$$EV = \int_{p_x}^{p'_x} \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u}') dp_x = e(p'_x, p_y, \bar{u}') - e(p_x, p_y, \bar{u}')$$

一方消費者余剰とはある財のある需要量について消費者が支払ってもよいと思う金額と実際に支払う金額の差を表すものと表現され，需要曲線（所得一定のもとでの通常の需要関数から導かれる）と価格を示す水平線の間の面積として定義される。所得が m の場合，

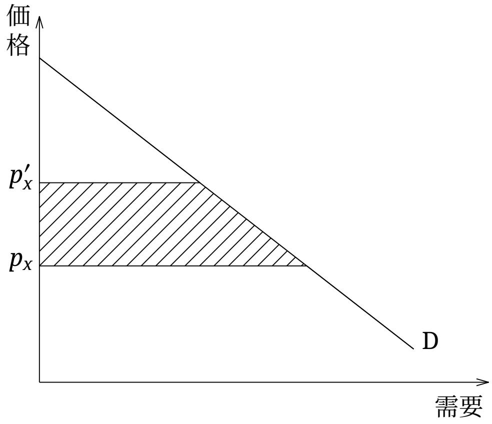


図 5.1　消費者余剰の変化

X 財の価格が p_x から p'_x に上昇したときの消費者余剰の変化（の絶対値）ΔCS を考えてみると，通常の需要関数 $x(p_x, p_y, m)$ を用いて

$$\Delta CS = \int_{p_x}^{p'_x} x(p_x, p_y, m) dp_x$$

と表される。これは需要曲線と p_x，p'_x を表す 2 本の水平線で囲まれた部分の面積である（図 5.1 参照）。

所得が一定の m で，X 財の価格が p_x から上昇して行くと効用は $\bar{u}$ から $\bar{u}'$ へ向けて低下して行くので $p_x < p''_x < p'_x$ を満たす p''_x について $\tilde{x}(p''_x, p_y, \bar{u}') < x(p''_x, p_y, m) < \tilde{x}(p''_x, p_y, \bar{u})$ である[*3]。したがって

$$EV < \Delta CS < CV$$

が得られる。

以上は X 財が上級財の場合であるが，下級財の場合はどうであろうか。これは後で考える。

ここで $p_x < p''_x < p'_x$ における $\tilde{x}(p''_x, p_y, \bar{u})$ と $\tilde{x}(p''_x, p_y, \bar{u}')$ との違いを考えてみよう。X 財の価格が p_x から p'_x に上昇したとき，価格の変化そのものによる X 財の需要の変化，すなわち代替効果とともに，それが間接的に引き起こす実質所得の変化（名目の所得は一定）によっても需要が変化する。その実質所得の変化がもたらす効用の変化が $\bar{u}'$ に表されている。したがって上記の 2 つの補償需要の差は所得効果を表している。もし X 財以

[*3] X 財が上級財ならば価格一定のもとで効用が増大するように所得が増えていくと消費量が増えていく。所得 m で X 財の価格が $p''_x (p_x < p''_x < p'_x)$ のときの効用は $\bar{u}$ と $\bar{u}'$ の間の値になる。

外に多くの財があり，X 財が消費者の予算に占める割合が小さければ所得効果は無視することができる程度に小さい。その場合近似的に

$$EV = \Delta CS = CV$$

が成り立つ。

■下級財の補償変分，等価変分，消費者余剰について　補償変分，等価変分，消費者余剰はそれぞれ次のように表される。

$$（補償変分）\quad CV = \int_{p_x}^{p_x'} \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u}) dp_x$$

$$（等価変分）\quad EV = \int_{p_x}^{p_x'} \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u}') dp_x$$

$$（消費者余剰）\quad \Delta CS = \int_{p_x}^{p_x'} x(p_x, p_y, m) dp_x$$

ここで $\bar{u}' < \bar{u}$ である。所得が一定の m で，X 財の価格が p_x から上昇して行くと効用は $\bar{u}$ から $\bar{u}'$ へ向けて低下して行く。X 財が下級財であれば価格一定のもとで所得の増加，したがって効用の増加に伴って需要（消費量）が減少する。逆に言えば（価格一定のもとで）効用の低下に伴って需要（消費量）が増加する。したがって $p_x < p_x'' < p_x'$ を満たす p_x'' について $\tilde{x}(p_x'', p_y, \bar{u}') > x(p_x'', p_y, m) > \tilde{x}(p_x'', p_y, \bar{u})$ であるから，上級財の場合とは逆に

$$EV > \Delta CS > CV$$

が得られる。

■消費者余剰の経路依存性　ここまでは X 財の価格の変化だけを考えたが X 財，Y 財両方の価格が変化した場合の消費者余剰の変化について考えてみよう。両財の価格の組が (p_x, p_y) から (p_x', p_y') に変化したものとし，この変化の経路について次の 2 通りの場合を考える。

1. $(p_x, p_y) \longrightarrow (p_x', p_y) \longrightarrow (p_x', p_y')$ という変化。つまり X 財の価格が先に変化した場合である。
2. $(p_x, p_y) \longrightarrow (p_x, p_y') \longrightarrow (p_x', p_y')$ という変化。Y 財の価格が先に変化した場合。

補償変分と等価変分はそれぞれ支出関数によって

$$CV = e(p_x', p_y', \bar{u}) - e(p_x, p_y, \bar{u})$$

$$EV = e(p_x', p_y', \bar{u}') - e(p_x, p_y, \bar{u}')$$

と表せる。ただし $\bar{u}' = v(p_x', p_y', m)$ である（m は一定の所得）。これらの表現から補償変分と等価変分は価格変化の経路に依存しないことがわかる。補償変分の積分表示を考えると各経路について次のように表される。

$$1.\quad CV_1 = \int_{p_x}^{p_x'} \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u}) dp_x + \int_{p_y}^{p_y'} \tilde{y}(p_x', p_y, \bar{u}) dp_y$$

$$2.\quad CV_2 = \int_{p_x}^{p_x'} \tilde{x}(p_x, p_y', \bar{u}) dp_x + \int_{p_y}^{p_y'} \tilde{y}(p_x, p_y, \bar{u}) dp_y$$

これらが等しくなるためには

$$\int_{p_x}^{p_x'} [\tilde{x}(p_x, p_y', \bar{u}) - \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u})] dp_x + \int_{p_y}^{p_y'} [\tilde{y}(p_x, p_y, \bar{u}) - \tilde{y}(p_x', p_y, \bar{u})] dp_y = 0 \tag{5.14}$$

が成り立つことが必要（かつ十分）である。重積分を用いると左辺第 1 項は

$$\int_{p_x}^{p_x'} \int_{p_y}^{p_y'} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_y} dp_y dp_x$$

と，第 2 項は

$$-\int_{p_y}^{p_y'} \int_{p_x}^{p_x'} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x} dp_x dp_y$$

と書くことができる。

ここで

$$\tilde{x}(p_x, p_y', \bar{u}) - \tilde{x}(p_x, p_y, \bar{u}) = \int_{p_y}^{p_y'} \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_y} dp_y \ (p_x\text{を一定として})$$

$$\tilde{y}(p_x, p_y, \bar{u}) - \tilde{y}(p_x', p_y, \bar{u}) = -\int_{p_x}^{p_x'} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x} dp_x \ (p_y\text{を一定として})$$

である。

前章で見た (5.13) から

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_y}(p_x, p_y, \bar{u}) = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x}(p_x, p_y, \bar{u})$$

なので (5.14) が成り立つことが言える[*4]。すなわち補償変分は経路に依存しないことが積分表示からも確認される。等価変分についても同様に $\bar{u}$ を $\bar{u}'$ に置き換えることによって経路に依存しないことが確認できる。

---

*4 重積分の順番を変えてもその値は変わらない。直感的に言えば，立体図形の体積を求めるのに横に切った断面の面積（積分で求める）を縦方向に足し合わせても（もう一度積分しても），縦に切った断面の面積（積分で求める）を横方向に足し合わせても（もう一度積分しても）同じ結果になるようなものである。

一方，それぞれの経路について消費者余剰の変化は次のように表される。

1. $\Delta CS = \int_{p_x}^{p'_x} x(p_x, p_y, m) dp_x + \int_{p_y}^{p'_y} y(p'_x, p_y, m) dp_y$

2. $\Delta CS = \int_{p_x}^{p'_x} x(p_x, p'_y, m) dp_x + \int_{p_y}^{p'_y} y(p_x, p_y, m) dp_y$

$y(p_x, p_y, m)$ は Y 財の通常の需要関数である。これらが等しくなるためには

$$\int_{p_x}^{p'_x} [x(p_x, p'_y, m) - x(p_x, p_y, m)] dp_x + \int_{p_y}^{p'_y} [y(p_x, p_y, m) - y(p'_x, p_y, m)] dp_y = 0$$

が成り立つことが必要（かつ十分）である。重積分を用いると左辺第 1 項は

$$\int_{p_x}^{p'_x} \int_{p_y}^{p'_y} \frac{\partial x}{\partial p_y} dp_y dp_x$$

と，第 2 項は

$$-\int_{p_y}^{p'_y} \int_{p_x}^{p'_x} \frac{\partial y}{\partial p_x} dp_x dp_y$$

と書くことができる。前章で求めたスルツキー方程式より所得を m として

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_y} - \frac{\partial x}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial p_y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = \frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x} - \frac{\partial y}{\partial m} \frac{\partial m}{\partial p_x}$$

が得られる。補償需要関数の性質から $\frac{\partial \tilde{x}}{\partial p_y}$ と $\frac{\partial \tilde{y}}{\partial p_x}$ とは等しいが，所得効果の部分は異なる可能性があるので $\frac{\partial x}{\partial p_y}$ と $\frac{\partial y}{\partial p_x}$ が等しいとは限らない。したがって消費者余剰の計算は価格の変化を考える経路に依存する。つまり価格が変化する順番によってその大きさが異なる可能性がある。しかし，X，Y 以外に多くの財が存在するなど所得効果を無視できる状況であれば消費者余剰は補償変分，等価変分にほぼ等しいので経済厚生を測る指標として用いることができるであろう。

5.5　均衡の存在（ブラウワーの不動点定理の証明もある）

5.5.1　均衡の存在について（2 財からなる交換経済のケース）

ところで均衡は必ず存在するのであろうか。2 人の消費者の X 財に対する需要（超過需要，自分の初期保有量を超える需要）を $\tilde{x}_A$，$\tilde{x}_B$ とするとこれらは X の相対価格 $\frac{p_x}{p_y}$ の連続な関数であると考えられる（詳しくは以下の説明を参照）。連続な関数とは価格の少

しの変化によって需要も少しだけ変化することを意味する[*5]。$\tilde{x}_A + \tilde{x}_B$ が経済全体での X 財の需要であり，それが 0 に等しいことが均衡の条件である。当然 $\tilde{x}_A + \tilde{x}_B$ も連続である。$\frac{p_x}{p_y}$ が非常に大きいときには $\tilde{x}_A + \tilde{x}_B < 0$ であり，逆に $\frac{p_x}{p_y}$ が非常に小さいときには $\tilde{x}_A + \tilde{x}_B > 0$ であると考えられる。$\tilde{x}_A + \tilde{x}_B$ が連続であるからいわゆる連続関数の中間値の定理によって $\tilde{x}_A + \tilde{x}_B = 0$ となる $\frac{p_x}{p_y}$ が存在する。これが均衡価格である。各消費者の超過需要が（相対）価格の連続な関数であることによって均衡の存在が保証される。

財が企業の生産によって供給される場合は話が複雑になるが，企業の供給が財の価格や労働の賃金率などについて連続であれば同じように均衡の存在を証明することができる。この場合労働（サービス）も 1 つの財として扱われ賃金率がその価格となる。財の数が 3 つ以上の場合は中間値の定理では均衡の存在を証明できない。「ブラウワーの不動点定理」と呼ばれる数学の定理（またはその拡張版である角谷の不動点定理）が用いられる。後の章で解説するゲーム理論におけるナッシュ均衡の存在（混合戦略を考えた場合）もこの定理を用いて証明される。次の小節では交換経済における均衡の存在問題についてブラウワーの不動点定理の証明を含めて解説する。

■参考：需要の連続性について　まず人々の選好の連続性について説明する。2 財の場合を考えよう（3 財以上の場合についても同様の議論が可能である）。X 財，Y 財の消費量の組として $A(=(x^A, y^A))$，$B(=(x^B, y^B))$ をとり，ある消費者が B より A を（厳密に，つまり無差別ではなく）好むものとする。そのとき A，B それぞれを含む消費量の組の集合（境界を含まない開集合）$\bar{A}$，$\bar{B}$ に含まれるすべての組 A'，B' について，この消費者が B' より A' を好むように $\bar{A}$，$\bar{B}$ がとれるならばこの消費者の選好は連続である。通常は $\bar{A}$，$\bar{B}$ としてそれぞれ A，B のごく近く（各財の消費量がわずかしか違わない）の消費量の組の集合をとる[*6]。これは消費者の選好が急に変らない。あるいは選好に飛びがないということを意味する[*7]。消費者の選好がこの意味で連続であり，かつ与えられた予算制約式のもとで効用を最大化する需要（消費量の組）がただ 1 つに決まる（無差別曲線が凸であればそうである）ならば需要は価格について連続であることが言える。連続ではないと仮定してみよう。価格の組（ベクトル）を $\mathbf{p}(=(p_x, p_y))$ として $\mathbf{p}$ の（無限の）列が $\mathbf{p}^*$ に近づいて行き，$\mathbf{p}$ および $\mathbf{p}^*$ のときの需要が A，A^* であるとする。もし連続でなければ A が A^* に近づいて行かず（需要が連続ならば A^* に近づいて行く），別の需要 B^* に近づいて行

[*5] x の関数 $y = f(x)$ を例にとって（ある点 x_0 における）関数の連続性を正確に言えば「$x = x_0$ において x の変化を適当に（小さくても大きくても，通常は非常に小さく）とればそれに対応した y の変化を**いくらでも小さくできる**」ということである。x_0 において関数が連続でなければ y のごくわずかな変化をもたらすような x の変化をとることができず，したがって x のごくわずかな変化によって y が大きく（ごくわずかではなく）変化してしまう。そのときは連続ではない。

[*6] A，B の十分近くの集合をとれば上の条件が成り立つようにできるということである。

[*7] 説明を繰り返すと，B より A が好まれるときに B のすぐ近くの消費より A のすぐ近くの消費が方が好まれるということである。A，B それぞれからある程度離れると互いに無差別な消費の組が現れ，さらに離れると逆転するかもしれないが，無差別になるものよりもさらに A，B に近い消費の組をとれば A に近い方が好まれる。

く[*8]。すべての A において予算制約式が（価格 $\mathbf{p}$ のもとで）成り立つから B^* においても（価格 $\mathbf{p}^*$ のもとで）成り立つ（予算制約式の左辺は一次式であるから連続であり，$\mathbf{p}^*$ にごく近い価格における需要は B^* にごく近くなっているから[*9]）。もちろん A^* においても予算制約式は成り立つ（A^* は価格が $\mathbf{p}^*$ のときの需要である）。一方，ある価格のもとで消費者が選ぶ需要はただ 1 つに決まるからこの消費者は B^* より A^* を好む。選好の連続性により A^*，B^* それぞれのごく近くの消費量の組の集合 $\bar{A}$，$\bar{B}$ に含まれる組 A'，B' についても B' より A' を好む。$\mathbf{p}$ が $\mathbf{p}^*$ に十分に近くなっていればそのときの需要 A は $\bar{B}$ に含まれるからこの消費者は A より A^* を（厳密に）好む。A^* よりほんの少しだけ消費量が少ない（したがって予算が少し余る）が，やはり A より好まれる消費量の組 C をとると，C は $\mathbf{p}^*$ にごく近い $\mathbf{p}$ においても予算を少し余らせながら，なおかつ A より好まれる。しかし，価格 $\mathbf{p}$ において消費者が効用を最大化するように A を選んでいたはずだからこれは矛盾である。よって需要は価格について連続でなければならない。

■連続ではない選好の例：辞書式順序　常識的な選好は連続であるが，連続ではない選好を考えることもできる。その代表的な例が辞書式順序にもとづく選好である。X 財，Y 財の消費量の組を (x, y) で表し，$A = (x^A, y^A)$，$B = (x^B, y^B)$ について $x^A > x^B$ ならば Y 財の消費量に関係なく A が B より好まれ（$x^A < x^B$ ならば B が A より好まれ），$x^A = x^B$ のときにだけ Y 財の消費量を比べて多いほうが好まれる（Y 財の消費量も等しければ無差別）というような選好が辞書式順序にもとづく選好である。辞書に単語を並べる順番を決める方法と同じなのでその名がある。この選好は連続ではない。(1,1) は (1,0) より好まれるが，(1,1) を含むどんな開集合をとってもその中には (1,0) より劣る（その点よりも (1,0) の方が好まれる）点が含まれる（(1,0) を含む開集合には X 財の消費量が 1 より少ない点が含まれる）ので連続性の条件が満たされない。これが連続でないことは直観的に次のようにも説明できる。(1,1) と $(1-x, 2)$ を比べる。x がいくら小さくなっても正である限り (1,1) が好まれる。しかし $x = 0$ になると突然 $(1-x, 2) = (1, 2)$ の方が好まれるようになり，(1,1) と無差別になる点はない。したがって選好に飛びが生じる。この場合選好を効用関数で表現したときにも効用の値に飛びが生じ連続ではなくなる。

5.5.2　均衡の存在について（一般的な交換経済のケース）

X_0，X_1，$\cdots$，X_n の $n+1(n \geqq 1)$ 財からなる交換経済がありそれぞれの価格を $p_i(\geqq 0)$，$i = 0, 1, \cdots, n$ とする。$p_0 + p_1 + \cdots + p_n = \bar{p}$ として

$$\bar{p}_i = \frac{p_i}{\bar{p}},\ i = 0, 1, \cdots, n$$

[*8] $\mathbf{p}$ の列が $\mathbf{p}^*$ に限りなく近づいて行くときに A が B^* に近づいたり離れたりする場合には B^* に近づいて行く部分だけをとって $\mathbf{p}$ の列と考える。

[*9] あるいは予算制約式を満たす需要が B^* にいくらでも近くなるように価格を（$\mathbf{p}^*$ のごく近くで）選ぶことができる。

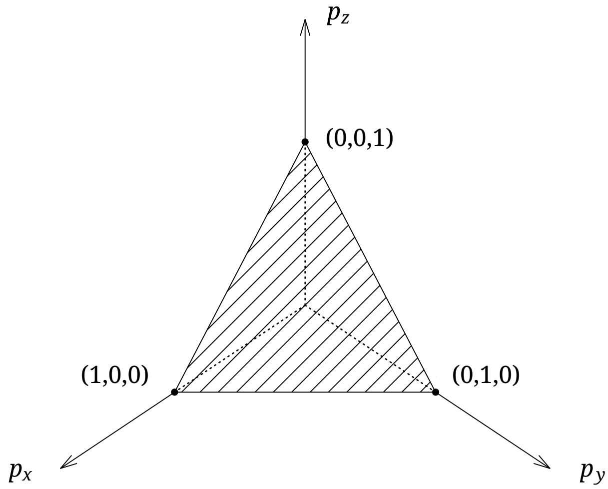


図 5.2　3 次元空間内の三角形

と定義し $\bar{p}_0$，$\bar{p}_1$，$\cdots$，$\bar{p}_n$ をあらためて p_0，p_1，$\cdots$，p_n と書くと

$$p_0 + p_1 + \cdots + p_n = 1 \tag{5.15}$$

が成り立つ[*10]。$n-1$ 個までは財の価格がゼロでもよいが少なくとも 2 つの財の価格は正でなければならない。もしすべての価格あるいは 1 つの財以外の価格がゼロならばそれ以外（価格がゼロではない財以外）のどれかの財（あるいはすべての財）の需要が非常に大きくなりすぐに価格が正になると考えればよい。3 財の場合には財を X，Y，Z，価格を p_x，p_y，p_z と表すことにしよう。そのとき (5.15) は p_x，p_y，p_z を座標軸とする 3 次元空間において $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ を頂点とする三角形の辺と内部からなる図形を表している。三角形自体は 2 次元の図形である（図 5.2 参照）。この三角形（Δ とする）に含まれる点を同じ三角形（これを Δ' とする）の点に対応させる写像（関数）を考える。Δ のある点は Δ' の異なる（異なる位置にある）点に対応するかもしれないし，同じ点に対応す

[*10] 交換経済における消費者の需要（超過需要）は相対価格によって決まるのでこのようにして価格の表現を変えても需要は変らない。ある消費者の各財の需要を x_i とすると予算制約式は

$$p_0x_0 + p_1x_1 + \cdots + p_nx_n = 0$$

と表される（需要は超過需要であるから和がゼロになる）。両辺を $\bar{p} = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$ で割ると

$$\bar{p}_0x_0 + \bar{p}_1x_1 + \cdots + \bar{p}_nx_n = 0$$

となるから本文のように価格の表現を変えても予算制約式は変らない。したがって効用を最大化する需要も変らない。企業による生産を含む経済においても生産要素の価格も含めればやはり相対価格によって需要が決まる。このような性質は 0 次同次性と呼ばれる。

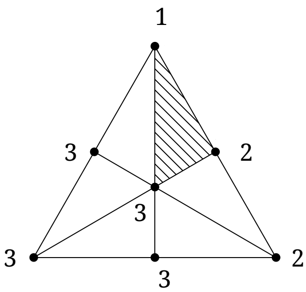


図 5.3　三角形の分割

るかもしれない。後者の場合その点は**不動点**であると言う。Δ の 1 つの点は Δ' の 1 つの点に対応する。しかし Δ の異なる点が Δ' の同じ点に対応するかもしれない。また，この対応は連続であると仮定する。すなわち Δ 上のごく近くの点同士は Δ' のごく近くの点に対応する[*11]。一般の場合には (5.15) は p_0，p_1，$\cdots$，p_n を座標軸とする $n+1$ 次元空間において $(1,0,0,\cdots,0)$，$(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$(0,0,\cdots,1)$ を頂点とする多面体の表面と内部からなる図形を表している。4 次元なら三角形を面とする四面体（三角錐）であるが，それ以上の次元のものはイメージできない。一般の場合にもその図形を Δ とし，同じように Δ' を定義して Δ から Δ' への連続な関数を考える。

まず次の結果を証明する。

補題 5.5.1 (スペルナー (Sperner) の補題（2 次元の場合））**.** 上記の三角形 Δ の頂点，各辺の中点，三角形の重心を結んで三角形を分割する。そうすると 6 つの三角形に分れるが，それらをさらに辺の中点と重心をとって 6 つずつに分割する。すると $6\times 6=36$ 個の三角形に分れるが，それらをさらに辺の中点と重心をとって 6 つずつに分割する。これを何度か繰り返してできた三角形の集まりを K とする。K の三角形（K に含まれる三角形，以下同様）のそれぞれの頂点に次のルールによって番号をつける。

1. Δ（全体の大きい三角形）の頂点には $1,2,3$ のいずれかの番号を 1 つずつつける。
2. K の頂点の内 Δ の辺に含まれているものについてはその辺の両端の点の番号のいずれかと同じ番号をつける。Δ の内部の点には $1,2,3$ のいずれかの番号をつける。

そのとき，K の三角形の中で各頂点に $1,2,3$ すべての番号がつけられているものが少なくとも 1 つ存在する。図 5.3 参照。斜線を引いた三角形が補題を満たす。1 回分割してできた三角形の内互いに接するものは共通の辺全体で接している。それらの三角形の辺の中点と重心をとって再度分割するので 2 回分割してできた三角形の内互いに接するものも共通

[*11] Δ 上で近くにある 2 点が Δ' 上では遠く離れた点に対応するかもしれない。しかし，写像が連続であれば Δ 上の 2 点の距離を十分に縮めることによって対応する Δ' 上の 2 点間の距離をいくらでも小さくできる。それが連続ということである。連続でなければ対応に飛びがあるので Δ 上の 2 点の距離をいくら縮めても Δ' 上の 2 点間の距離が小さくならない場合がある。

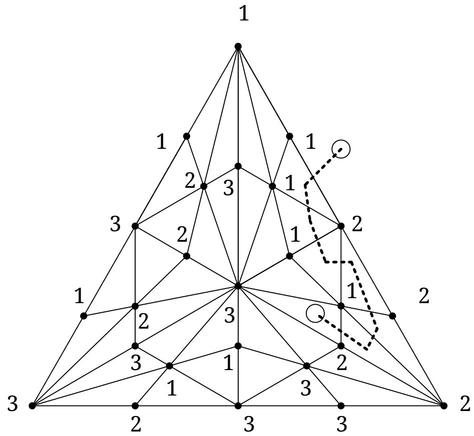


図 5.4　スペルナーの補題

の辺全体で接する。以下同様。図 5.4 参照。

証明. まず 1, 2 の番号がついている Δ の辺に含まれる K の三角形の辺で 1, 2 の番号がついているものの数が奇数であることを示す。当該の Δ の辺に含まれる点の数に関する数学的帰納法で証明する。両端の点しかなければ 1, 2 と番号づけされているので 1 つである。両端の点以外の点が 1 つであるとするとそれの番号が 1 であっても 2 であっても 1, 2 の番号がつく部分は 1 つである。その辺に含まれる両端の点以外の数が n 個の場合に 1, 2 の番号がついているものの数が奇数であると仮定する。そこに 1 つ点を追加する。その点の番号が 1 であるとき，両隣の点の番号がともに 2 ならば条件を満たす辺は 2 個増えるが，ともに 1 ならば変化しない。どちらにしても奇数は変らない。その点の番号が 2 である場合も同様である。その点の番号が 1 で両隣の点の番号が 1 と 2 の場合には条件を満たす辺は 1 つ減って 1 つ増えるので変らない。その点の番号が 2 である場合も同様。以上によって条件を満たす辺の数が奇数であることが示された。

Δ を家，Δ 以外の K の三角形をその家の部屋，1, 2 の番号がつけられた K の三角形の辺をドアと見て，Δ の外側からドアを開けて家に入り，さらにドアを開けて部屋を移動することを考える。同じドアは 2 度通らない。1, 2 と番号づけされたドアが 2 つある部屋は通り抜けられる。そのようなドアを持たない部屋には入れない。3 つそのようなドアを持つ三角形はありえない。1, 2, 3 と番号づけされた三角形の部屋に到達すると出られなくなりそこがゴールである。また入ったドアとは別の Δ のドア（Δ の辺に含まれる K の三角形の辺の内 1, 2 の番号がつけられたもの，以下同様）から出て行った場合もそこで移動は終わる。移動の経路を道と呼ぶ。以上によってあるドアから入った道の経路はただ 1 つに決まり，1, 2, 3 と番号づけされた三角形の部屋に到達するか，または別の Δ のドアから出て行って移動が終わるかどちらかであることがわかる。すべてのこのような道を考えそれらがことごとく入ったドアとは別の Δ のドアから出て行くような道であると仮定してみよ

う。1, 2 と番号づけされた Δ の辺に含まれる K の三角形の辺の内 1, 2 と番号づけされたもの（すなわち Δ のドア）は奇数個であった。各道がそのいずれかのドアから入り，別のドアから出て行くとすると 1 つドアが余る。道の経路はただ 1 つに決まっているので余ったドアから入った道が別のドアから出て行くことはない[*12]。その道は 1, 2, 3 と番号づけされた三角形に到達せざるを得ないのでそのような三角形が少なくとも 1 つ存在することが証明された。図 5.4 を参照していただきたい。 □

次に一般的な場合を考える。

n 次元の Δ（n 次元単体と言う）を（三角形の分割と同じように）分割して作った小さな n 次元単体の集まりを K とする[*13]。K の各頂点に対して以下のルールに基づいて 0 から n までの番号をつける。

1. Δ の頂点（$n+1$ 個ある）については 0 から n までの番号を各頂点につける（順序は問わない）。
2. K のある頂点 $\mathbf{v}$ が Δ のある $n-1$ 次元面（Δ に含まれる $n-1$ 次元単体，Δ が四面体なら三角形，三角形なら辺）に含まれている場合には，その面のある頂点（Δ の頂点でもある）と同じ番号を $\mathbf{v}$ につける（$\mathbf{v}$ は Δ の面の頂点であるとは限らず，Δ を分割してできた単体の頂点の内で Δ の面に含まれるものであるかもしれない）。
3. K のある頂点 $\mathbf{v}$ が Δ に含まれる $n-2$ 次元単体（Δ が四面体なら辺）に含まれている場合には，その単体のある頂点と同じ番号を $\mathbf{v}$ につける。
4. 以下同様。Δ の内部の点には 0 から n までのいずれかの番号をつける。

補題 5.5.2 (スペルナーの補題（一般の場合）). K の頂点に上記の番号づけのルールによって番号をつけるとき，K の n 次元単体の中で各頂点にちょうど *0* から n までの番号がつけられるものの個数は奇数である。

証明. Δ の次元に関する数学的帰納法で証明する。まず $n=0$ の場合は番号は 0 だけしかなく，それ以上分割できない 0 次元単体が一つしかないので補題が成り立つのは明らかで

[*12] その別のドアから入って道を逆にたどれば最初に入ったドアに到るはずである。

[*13] 3 次元空間内で $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ をもとに作った三角形は 2 次元であり，同様に $n+1$ 次元空間で $(1,0,0,\cdots,0)$，$(0,1,\cdots,0)$，$\cdots$，$(0,0,\cdots,1)$ をもとに作った多面体は n 次元の図形である。なお 0 次元単体は点，1 次元単体は線分，2 次元単体は三角形，3 次元単体は四面体である。たとえば四面体の分割は以下のように進める。

1. まず四面体の面を構成する 4 つの三角形をそれぞれ図 5.3 のように分割する。
2. 次に四面体の重心（だいたい真ん中と思えばよい）と分割してできた小さな三角形のそれぞれとから小さな四面体を作る。三角形の辺と四面体の重心によって作られる三角形が小さな四面体の面になる。その面が Δ の面に含まれていなければ（内部にあれば）2 つの四面体がその面をはさんで接している。
3. こうして作られた小さな四面体のそれぞれを同じようにして分割する，ということを繰り返す。このときまず各四面体の面である三角形を分割するので，分割してできた四面体同士は共通の面（三角形）全体で接する。

ある。$n=1$ の場合は前の補題で証明している。次に $n-1$ 以下の次元について補題が成り立つと仮定する。番号づけのルールにより，$0,1,\dots,n-1$ と番号づけされた K の $n-1$ 次元単体を含む Δ の $n-1$ 次元面は $0,1,\dots,n-1$ と番号づけされた頂点を持つ Δ の $n-1$ 次元面のみであり，それは 1 つしかない。以下 2 次元の場合と同様の証明を行う。

Δ を家，Δ 以外の K の n 次元単体（分割によってできたもの）をその家の部屋，0 から $n-1$ までの番号がつけられた K の $n-1$ 次元単体をドアと見て，Δ の外側からドアを開けて家に入り，さらにドアを開けて部屋を移動することを考える。同じドアは 2 度通らない。0 から $n-1$ までの番号がつけられたドアが 2 つある部屋は通り抜けられる。そのようなドアを持たない部屋には入れない。3 つそのようなドアを持つ n 次元単体はありえない。

> 0 から $n-1$ までの番号がつけられた $n-1$ 次元単体の面を持つ n 次元単体のもう 1 つの頂点の番号が n であればドアは 1 つ，n 以外ならばドアは 2 つある。

0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の部屋に到達すると出られなくなりそこがゴールである。また入ったドアとは別の Δ のドア（Δ の $n-1$ 次元面に含まれる K の $n-1$ 次元単体の内 0 から $n-1$ までの番号がつけられたもの，以下同様）から出て行った場合もそこで移動は終わる。移動の経路を道と呼ぶ。以上によってあるドアから入った道の経路はただ 1 つに決まり，0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の部屋に到達するか，または別の Δ のドアから出て行って移動が終わるかどちらかであることがわかる。すべてのこのような道を考える。帰納法の仮定により 0 から $n-1$ までの番号がつけられた Δ の $n-1$ 次元面に含まれる K の $n-1$ 次元単体の内 0 から $n-1$ までの番号がつけられたもの（すなわち Δ のドア）は奇数個であった。いずれかのドアから入って別のドアから出て行く道は 2 つの Δ のドアを通るが，0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の部屋に到達する道は 1 つの Δ のドアしか通らない。道の経路はただ 1 つに決まっているので 1 つのドアは 1 つの道しか通らない。したがって 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体に到達する道の数は奇数でなければならない（1 つの Δ のドアから入って別の Δ のドアから出て行く道は 2 つのドアを通るので）。よって，Δ のドアから入って到達できる 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の数は奇数である。

しかし Δ のドアから入って道をたどっても行き着けない 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体（部屋）があるかもしれない。その数が奇数個ならば全体として偶数個になってしまう。そのような部屋の 1 つから出発する。その部屋の 0 から $n-1$ までの番号がつけられたドアを通って隣の部屋に移る。そこが 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体であればそこで道は終わる。そうでなければ別のドアがあるのでそこから出てまた隣の部屋に移る。そこが 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体であればそこで道は終わる。そうでなければ別のドアがあるのでそこから出てまた隣の部屋に移る，ということを繰り返すと途中で行き止まりになるかそれとも Δ のドアを通って Δ から出て行くかいずれかである（そのような道も同じドアを 2 度通らないのでもとの部屋には戻らな

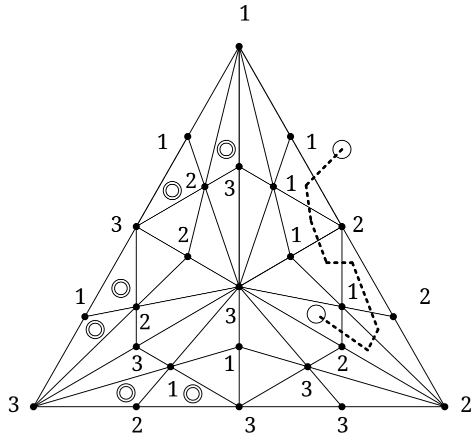


図 5.5　スペルナーの補題 2

い)。後者の場合，出発した 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の数はすでに数えられている。一方前者の場合，出発した部屋とたどり着いた部屋の 2 つの部屋，すなわち 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体が 2 つ存在することになる。その数の合計は偶数であり，また Δ のドアから入った道を通ってはその部屋にたどり着けない。以上によって 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体の数が全体として奇数個であることが証明された。

数学的帰納法を使うために一般的な場合の証明では 0 から n までの番号がつけられた n 次元単体が存在することを示すだけではなく，それが奇数個であることを示す必要があった。

2 次元ではあるが図 5.5 が参考になるかもしれない。◎をつけてあるのが Δ のドアから入ってはたどり着けない部屋である。 □

0 から n までの番号がつけられるものの個数が奇数であるということは少なくとも 1 個はそのようなものが存在することを意味する。

これをもとに次の定理を得る。この定理の証明は 2 次元の場合も一般的な場合もほとんど同じである。一般の場合がわかりにくければ 0 を x，1 を y，2 を z として 3 財のケースに直して考えていただきたい。次の交換経済の均衡の証明も同様である。

定理 5.5.1 (ブラウワー (Brouwer) の不動点定理). Δ から Δ' への連続な写像 f は不動点を持つ。

証明. Δ を何回か（m 回）分割してできた単体の頂点の座標を $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ で表す。$x_i \geqq 0,\ i = 0, 1, \cdots, n$ かつ $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1$ である。この $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ が f によって $(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n)$ に対応するとしよう。もちろん $x'_0 + x'_1 + \cdots + x'_n = 1$ である。各頂点に次のようにして番号をつける。

1. $x'_0 < x_0$ ならば $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ に番号 0 をつける。
2. $x'_0 \geqq x_0$，かつ $x'_1 < x_1$ ならば $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ に番号 1 をつける。
3. $x'_0 \geqq x_0$，$x'_1 \geqq x_1$，かつ $x'_2 < x_2$ ならば $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ に番号 2 をつける。
4. 以下同様で，一般的には $x'_i < x_i$ となる最小の $i (i = 0, 1, \cdots, n)$ の番号をつける

もしどの番号もつかない点があるとするとすべての $i (i = 0, 1, \cdots, n)$ について $x'_i \geqq x_i$ であるが，$x_0 + x_1 + \cdots + x_n = 1$ かつ $x'_0 + x'_1 + \cdots + x'_n = 1$ であるからすべての $i (i = 0, 1, \cdots, n)$ について $x'_i = x_i$ でなければならず，その点は不動点となる。そうであれば証明は終わりなのですべての点に番号がつくものとして議論を進める。

まず Δ の頂点の対応を考える。

1. $(1, 0, 0, \cdots, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n)$ に対応するとする。もし $x'_0 = 1$ ならばこの点が不動点となる。したがって $x'_0 < 1$ が成り立つので $(1, 0, 0, \cdots, 0)$ の番号は 0 である。
2. $(0, 1, 0, \cdots, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n)$ に対応するとする。もし $x'_1 = 1$ ならばこの点が不動点となる。$x'_0 \geqq x_0$ かつ $x'_1 < 1$ が成り立つので $(0, 1, 0, \cdots, 0)$ の番号は 1 である。
3. $(0, 0, 1, \cdots, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n)$ に対応するとする。もし $x'_2 = 1$ ならばこの点が不動点となる。$x'_0 \geqq x_0$，$x'_1 \geqq x_1$ かつ $x'_2 < 1$ が成り立つので $(0, 0, 1, \cdots, 0)$ の番号は 2 である。
4. 以下同様。

次に $x_n = 0$ であるような $n-1$ 個の点から構成される Δ の面である $n-1$ 次元多面体（$n = 3$ ならば三角形）を考え，それに含まれる点 $(x_0, x_1, \cdots, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \cdots, x'_n)$ に対応するとする。$x_n = 0$ なので $x'_n < x_n$ とはならないから番号 n はつかず，$(x_0, x_1, \cdots, 0)$ の番号は 0 から $n-1$ までのいずれかである。同様にして $(x_0, x_1, \cdots, 0, x_n)$ の番号は $n-1$ を除くいずれか，$(0, x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の番号は 0 を除くいずれか，以下同様であることが示される。次に $x_{n-1} = x_n = 0$ であるような点から構成される Δ に含まれる $n-2$ 次元多面体（$n = 3$ ならば辺）を考えそれに含まれる点 $(x_0, x_1, \cdots, 0, 0)$ が $(x'_0, x'_1, \cdots, x'_{n-1}, x'_n)$ に対応するとすると，$x_{n-1} = x_n = 0$ なので $x'_n < x_n$ あるいは $x'_{n-1} < x_{n-1}$ とはならないから番号 n，$n-1$ はつかず，0 から $n-2$ までのいずれかの番号がつく。以下同様である[*14]。これら以外の点（Δ の内部の点）には 0 から n までのいずれかの番号がつく。この番号のつけ方はスペルナーの補題の前提となっている番号づけと同じであるから 0 から n までのすべての番号づけを持った n 次元単体が存在する（複数あるかもしれないがその内の１つをとる)。そのような n 次元単体の頂点を

$$(x_0^{m,0}, x_1^{m,0}, \cdots, x_n^{m,0}),\ (x_0^{m,1}, x_1^{m,1}, \cdots, x_n^{m,1}), \cdots, (x_0^{m,n}, x_1^{m,n}, \cdots, x_n^{m,n})$$

とする（m は Δ の分割の回数)。それぞれ $0, 1, \cdots, n$ の番号がついている。1 から始ま

[*14] 例えば $x_0 = x_2 = x_5 = 0$ ならば 0, 2, 5 以外の番号がつく。

る m の値のそれぞれに上記の n 次元単体が存在する。したがって 0 から n までの各頂点について m の値に対応した点列ができる。Δ は範囲の決まった（有界な）領域であり，m の値は無限に続くからそれぞれの点列はある 1 点に限りなく近づいて行くかまたはある点（複数あるかもしれない）に繰り返し近づいたり遠ざかったりするかどちらかである。後者の場合ある点に近づいて行く部分だけを（もとの点列と同じ順に）とって新たな（無限の）点列とし，前者の場合には上記の点列そのものをとる[*15]。m の値を大きくして行く，すなわちこのような分割を繰り返して行くと分割してできる 1 つ 1 つの単体は小さくなって行き，分割を際限なく続ければ各単体は 1 点に近づいて行く。したがって m が十分に大きくなれば上記の $n+1$ 個の点は同一のある点 $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ に収束する。これが不動点であることを示す。f によって $i = 0, 1, \cdots, n$ について $(x_0^{m,i}, x_1^{m,i}, \cdots, x_n^{m,i})$ が $(x_0'^{m,i}, x_1'^{m,i}, \cdots, x_n'^{m,i})$ に対応し，$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ が $(x_0', x_1', \cdots, x_n')$ に対応するとする。$(x_0^{m,0}, x_1^{m,0}, \cdots, x_n^{m,0})$ の番号は 0 であるから $x_0'^{m,0} < x_0^{m,0}$ である。f は連続なので m を十分に大きくすれば $(x_0^{m,i}, x_1^{m,i}, \cdots, x_n^{m,i})$ と $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ がごく近くにあるとき $(x_0'^{m,i}, x_1'^{m,i}, \cdots, x_n'^{m,i})$ と $(x_0', x_1', \cdots, x_n')$ もごく近くになるようにすることができる。したがって $x_0' \leqq x_0$ が成り立つ[*16]。同様にして $x_1' \leqq x_1$，$\cdots$，$x_n' \leqq x_n$ を得る。一方 $x_0 + x_1 + \cdots + x_n = x_0' + x_1' + \cdots + x_n' = 1$ であるから $(x_0, x_1, \cdots, x_n) = (x_0', x_1', \cdots, x_n')$ となり，$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ は不動点である。 □

この定理を用いて次の結果を証明する。

定理 5.5.2 (交換経済における均衡の存在). $n+1$ 個の財 X_0，X_1，$\cdots$，X_n からなる交換経済において各消費者（消費者の数は有限である）の需要が価格について連続であるとする（価格のわずかな変化に対して需要が大きくは変化しない)。価格（ベクトル）が $(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ のときの各財の需要（超過需要）を $f_i(p_0, p_1, \cdots, p_n)$, $i = 0, 1, \cdots, n$ で表すと次の式が成り立つ。

$$p_0 f_0 + p_1 f_1 + \cdots + p_n f_n = 0 \text{（ワルラスの法則）}$$

f_i は X_i 財についての各消費者の需要の合計に等しい。交換経済においては各消費者について各財の需要（超過需要）の金額の合計がゼロでなければならず（予算制約)，それらをすべて足し合わせると上の式が得られる。

このとき，すべての財（$i = 0, 1, \cdots, n$）について $f_i(p_0, p_1, \cdots, p_n) \leqq 0$（超過需要がゼロか，または負の超過需要すなわち超過供給が存在する）を満たす均衡価格（ベクトル）$(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*)$ が存在する。

証明. $(p_0, p_1, \cdots, p_n)$ から $n+1$ 個の実数の組 $v = (v_0, v_1, \cdots, v_n)$ へのある関数を考えそ

[*15] 各頂点の点列は同一の n 次元単体からとる。

[*16] $(x_0^{m,i}, x_1^{m,i}, \cdots, x_n^{m,i})$ が $(x_0, x_1, \cdots, x_n)$ に接近して行く過程においては常に $x_0'^{m,0} < x_0^{m,0}$ であるが，極限においては等号 ($x_0' = x_0$) が成り立つ可能性がある。

れらが次のように表されるものとする。

$$v_i = p_i + f_i,\ f_i > 0 \text{ のとき}$$

$$v_i = p_i,\ f_i \geqq 0 \text{ のとき}$$

すべての財について同様。この $(v_0, v_1, \cdots, v_n)$ をもとに次のような Δ から Δ' への関数 $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ を作る。

$$\varphi_i(p_0, p_1, \cdots, p_n) = \frac{1}{v_0 + v_1 + \cdots + v_n} v_i$$

すべての財について同様。これらについて $\varphi_i \geqq 0,\ i = 0, 1, \cdots, n$ かつ

$$\varphi_0 + \varphi_1 + \cdots + \varphi_n = 1$$

が成り立つから，$(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ は Δ' 上の点である。また f_i が連続であるから φ も連続である。したがってブラウワーの不動点定理により $(\varphi_0(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*), \varphi_1(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*), \cdots, \varphi_n(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*)) = (p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*)$ を満たす $(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*)$ が存在する。すべての i について $v_i \geqq p_i$ であるから，φ と v の関係によってある $\lambda \geqq 1$ に対して，すべての i について $v_i(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*) = \lambda p_i^*$ が成り立つ。以下では $\lambda = 1$ を示す。$\lambda > 1$ と仮定してみよう。すると，$p_i^* > 0$ であるときには $v_i(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*) > p_i^*$，すなわち $f_i(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*) > 0$ となる（すべての財について同様）。一方，すべての i について $p_i^* \geqq 0$ であり，それらの和が 1 であるからいずれかは厳密に正である。そうすると $p_0^* f_0 + p_1^* f_1 + \cdots + p_n^* f_n > 0$ となりワルラスの法則と矛盾する。したがって $\lambda = 1$ であり $v_0 = p_0^*,\ v_1 = p_1^*, \cdots,\ v_n = p_n^*$ および $f_i(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*) \leqq 0$ が導かれる。 □

すべての i について $f_i(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*) \leqq 0$ であり，かつ $p_0^* f_0 + p_1^* f_1 + \cdots + p_n^* f_n = 0$ であるということは $p_i^* f_i(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*) \leqq 0$（すべての財について）であることを意味するから，$p_i > 0$ のときには $f_i(p_0^*, p_1^*, \cdots, p_n^*) = 0$ である。したがって均衡価格においては需要はゼロに等しいかあるいは超過供給が存在し，正の価格を持つ財（普通はそうだが）については需要はゼロでなければならない。

価格がゼロで超過供給が存在する可能性はあるが，それはよほど誰も欲しがらない財か有り余るほどに存在する財である。価格がゼロなら需要（超過需要）が正になるとするとすべての財の均衡価格は正である。

v と φ の式を見ると需要が正の（超過需要が存在する）財の価格が引き上げられてそうでない財の価格が引き下げられるような調整が行われるように見えるが，そういう趣旨ではない。ここの議論では均衡の安定性までは考えていない。超過需要が存在するような価格は φ の不動点とはならず，不動点となる価格においては超過需要が存在しない，というのが φ の不動点が意味するところである。

5.6　企業の生産を含む経済の均衡について

財が $n+1$ 個, 生産要素が $m+1$ 個あるものとする。それぞれの価格を $p_i,\ i=0,1,\cdots,n$, $q_j,\ j=0,1,\cdots,m$ で表す。消費者, 企業の数も 2 以上である。企業は消費者から提供された生産要素を用いて財を生産しそれらを販売して利潤を得る。消費者は企業に生産要素を提供して得た報酬で財を消費する。また消費者は企業の株主（所有者）でもある。まず企業 l の利潤は次のように表される。

$$\pi_l = p_0\tilde{y}_0^l + p_1\tilde{y}_1^l + \cdots + p_n\tilde{y}_n^l - q_0\tilde{x}_0^l - q_1\tilde{x}_1^l - \cdots - q_m\tilde{x}_m^l$$

$\tilde{y}_i^l$ と $\tilde{x}_j^l$ はそれぞれ企業 l による i 財の産出量および生産要素 j の投入量である。各企業は自らの生産能力（生産関数で表される）のもとで（価格を与えられたものとして）この利潤を最大化するように各財の産出量および各生産要素の投入量を決める（生産要素の投入量を決めれば財の産出量は生産関数によって決まる)。各企業による各生産要素の投入量および各財の産出量は財と生産要素の価格について連続であると仮定する（投入量, 産出量は価格の変化によって少しずつ変化する)。

消費者 k が企業 l の所有権を s_k^l の割合で持っているものとする $(0 \leqq s_k^l \leqq 1)$ と, 消費者 k の予算制約式は次のように表される。

$$p_0x_0^k + p_1x_1^k + \cdots + p_nx_n^k = q_0y_0^k + q_1y_1^k + \cdots + q_my_m^k + \sum_l s_k^l\pi_l$$

x_i^k は i 財の消費量（需要), y_j^k は生産要素 j の供給量であり, $\sum_l s_k^l\pi_l$ はこの消費者が保有する企業の割合に応じて受け取る利潤の合計である。各消費者はこの予算制約のもとで効用を最大化するように財の需要と生産要素の供給を決める（価格と企業の利潤を与えられたものとして)。その需要, 供給は財と生産要素の価格について連続であると仮定する。例えば生産要素の価格が上がれば所得が増えるので財の消費量も増えるであろう（下級財ならば減るかもしれない)。その変化が連続的であると仮定するのである。この式に企業の利潤を代入すると

$$\begin{aligned} p_0x_0^k + p_1x_1^k + \cdots + p_nx_n^k &= q_0y_0^k + q_1y_1^k + \cdots + q_my_m^k \\ &\quad + \sum_l s_k^l(p_0\tilde{y}_0^l + p_1\tilde{y}_1^l + \cdots + p_n\tilde{y}_n^l - q_0\tilde{x}_0^l - q_1\tilde{x}_1^l - \cdots - q_m\tilde{x}_m^l) \end{aligned}$$

が得られる。$\sum_k s_k^l = 1$ である（すべての消費者の各企業の所有割合の合計は 1 に等しい）から, この式をすべての消費者について合計すると

$$\begin{aligned} p_0\sum_k x_0^k + p_1\sum_k x_1^k + \cdots + p_n\sum_k x_n^k &= q_0\sum_k y_0^k + q_1\sum_k y_1^k + \cdots + q_m\sum_k y_m^k \\ &\quad + \sum_l (p_0\tilde{y}_0^l + p_1\tilde{y}_1^l + \cdots + p_n\tilde{y}_n^l - q_0\tilde{x}_0^l - q_1\tilde{x}_1^l - \cdots - q_m\tilde{x}_m^l) \end{aligned}$$

となる。i 財の需要，供給の合計 $\sum_k x_i^k$ および $\sum_l \tilde{y}_i^l$ をそれぞれ X_i，$\tilde{Y}_i$ で，生産要素 j の（消費者による）供給の合計 $\sum_k y_j^k$，（企業による）投入量の合計 $\sum_l \tilde{x}_j^l$ をそれぞれ Y_i，$\tilde{X}_i$ で表すと上の式は

$$p_0(X_0 - \tilde{Y}_0) + p_1(X_1 - \tilde{Y}_1) + \cdots + p_n(X_n - \tilde{Y}_n) \\ + q_0(\tilde{X}_0 - Y_0) + q_1(\tilde{X}_1 - Y_1) + \cdots + q_m(\tilde{X}_m - Y_m) = 0$$

と書き直される。この式は各財，各生産要素の超過需要と価格の積の合計がゼロに等しいことを表しており，企業による生産を含む経済におけるワルラスの法則を表す。財と生産要素の需要，供給が価格について連続であることから，生産要素の番号をあらためて $n+1$ から $n+m+2$ まで，価格を p_j，$j = n+1, n+2, \cdots, n+m+2$ と表すと財が $n+m+2$ 個存在する交換経済の場合とまったく同じ手順で（ブラウワーの不動点定理を用いて）均衡の存在が証明される。

■参考：供給の連続性 - 簡単なケース　企業が完全競争において 1 つの財をある費用関数のもとで生産しているとすると，価格と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶ。したがって限界費用関数が連続であり，かつ価格が変化しても生産をやめなければ企業の供給は連続である。

5.7　交渉ゲーム

5.7.1　ナッシュ交渉解

2 人の当事者が交渉によって取り分を決めるような協力ゲームにはナッシュ交渉解 (Nash solution) と呼ばれる有名な理論がある。ごく単純なゲームでは仁やシャープレイ値と同じ結果になる場合もあるが結果を導き出す根拠に違いがある[*17]。人々の利得は（フォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型）効用関数で表されるものとする。

例で考えよう。A，B の 2 人がある仕事の報酬を巡って交渉をする。それぞれの利得を x_A，x_B（ともに 0 以上）とし次のような状況を考える

1. 2 人が共同で仕事をしたときに得られる利得は次の式を満たす。

$$2x_A + x_B \leqq 24 \tag{5.16}$$

   このように交渉の結果が満たしていなければならないある条件に当てはまる x_A，x_B の値の範囲を U で表す。
2. 交渉が決裂したときの利得をそれぞれ d_A，d_B とすると，$d_A = 4$，$d_B = 0$ であると仮定する。

[*17] ナッシュ交渉解のナッシュはナッシュ均衡のナッシュ (John Nash) と同一人物である。

ナッシュは最適な交渉の結果が以下のような条件（公理）を満たしていることを要求した。

1. パレート効率的である：
   A の取り分 x_A を小さくせずに B の取り分を大きくする（あるいは逆）分け方はない。したがって上の (5.16) は等式 (=) で満たされる。
2. 対称性：
   状況が対称的であれば結果も対称的である。たとえば U が
   $$x_A + x_B = 12$$
   のように表され，交渉が決裂したときの利得が $d_A = d_B = 2$ のときには交渉の結果は $x_A = x_B = 6$ でなければならない。この条件は 2 人の交渉力に差がないことを意味する。その人の押しの強さなどによって交渉の結果が左右されてはならない。対称的であるとは x_A と x_B，d_A と d_B を入れ替えても 2 人が置かれた立場が変らないことを意味する。
3. 無関係な代替案からの独立性：
   U から交渉の結果実現する状態以外の選択肢が抜けても交渉の結果は変らない。
4. アフィン変換からの独立性：
   この条件は A，B の利得をそれぞれ $ax_A + b$，$cx_B + e$（d_A，d_B も同様に変換する，a, b, c, e は定数，このような変換をアフィン変換と呼ぶ）に変換すればそれに対応するように交渉の結果も変るというもので利得がフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数で表されていることによる*18。

これらの条件を満たす解として次のものを提示する。

ナッシュ交渉解　U の中で，A，B それぞれにとっての交渉の結果得られる利得と交渉が決裂したときの利得の差の「積」が最大となるような値が交渉の結果得られる利得である。すなわち

$$U \text{ の中で } (x_A - d_A)(x_B - d_B) \text{ が最大となるように } x_A, x_B \text{が決まる}$$

というようにして求められる x_A，x_B がナッシュ交渉解である。$(x_A - d_A)(x_B - d_B)$ はナッシュ積 (Nash product) と呼ばれる。

機械的に計算されるように感じられるが，この解は上記の条件を満たしている。まず，もしパレート効率的でなければ x_A（または x_B）を下げずに x_B（または x_A）を大きくすることができるので当然 $(x_A - d_A)(x_B - d_B)$ も最大化されていない。したがってナッシュ交渉解はパレート効率的である。次に，$d_A = d_B$ ならば $(x_A - d_A)(x_B - d_B)$ は対称的な

*18 フォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数ならば，効用関数 u と $au+b$ とは同じ選好を表す。

式であるから U が対称的であれば，A と B を入れ替えても同じ状況を表すことになり，ナッシュ積を最大化して得られるナッシュ交渉解も対称的である。さらに U の範囲内で $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ が最大となるように x_A，x_B を決めれば，U からその x_A，x_B 以外の部分を省いても結果に影響はないので「無関係な代替案からの独立性」が成り立つ。最後に，x_A，x_B をそれぞれ ax_A+b，cx_B+e に変換したとき $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ は次のように変わる。

$$(ax_A+b-ad_A-b)(cx_B+e-cd_B-e)=ac(x_A-d_A)(x_B-d_B) \tag{5.17}$$

U を表す式も同じように変る。変換後に ax_A+b，cx_B+e が条件を満たす範囲を U' とする。ac は定数であるから，(5.17) を最大化する x_A，x_B は $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ を最大化する x_A，x_B と同じである。その x_A，x_B が U に含まれていれば，ax_A+b，cx_B+e は U' に含まれている。したがって $(x_A-d_A)(x_B-d_B)$ を最大化する x_A，x_B から得られる ax_A+b，cx_B+e は (5.17) を最大化するナッシュ交渉解となる*19。

では上の例でナッシュ交渉解を求めてみよう。これは (5.16) の条件のもとで

$$(x_A-4)x_B$$

を最大化する問題になるが，パレート効率性によって (5.16) は等式で満たされるのでラグランジュ乗数法を用いることができる。ラグランジュ関数を

$$\mathcal{L}=(x_A-4)x_B+\lambda(2x_A+x_B-24)$$

として x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$x_B+2\lambda=0$$

$$x_A-4+\lambda=0$$

を得る。これらの式から

$$x_B=2x_A-8$$

が得られる。これと (5.16) により

$$x_A=8,\ x_B=8$$

が求まる。

次に交渉が決裂したときの B の利得が 4 の場合を考える。そのときナッシュ積は

$$(x_A-4)(x_B-4)$$

*19 上記の 4 条件を満たす解はナッシュ交渉解のみであることが証明されている。

となり，ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = (x_A - 4)(x_B - 4) + \lambda(2x_A + x_B - 24)$$

と書け，これを x_A，x_B で微分してゼロとおくと

$$x_B - 4 + 2\lambda = 0$$

$$x_A - 4 + \lambda = 0$$

を得る。これらの式から

$$x_B = 2x_A - 4$$

が得られる。これと (5.16) により

$$x_A = 7,\ x_B = 10$$

が求まる。このように交渉に当たっては決裂したときの利得を大きくすることによってより有利な交渉結果を実現することができる。それが交渉力である。

ナッシュ交渉解は企業と労働組合の間の賃金交渉の理論など，いろいろな問題に応用されている（演習問題 2 を参照）。

■ナッシュの平滑化　4.9.2 では動学ゲームを用いてナッシュ交渉解の非協力ゲームによる解釈を説明しているが，「ナッシュの平滑化」と呼ばれるナッシュ自身が示した静学的なゲームによる解釈がある。簡単な例でその理論を解説しよう。その前にディマンドゲームというのを説明する。2 人のプレイヤー A，B が 1 の大きさの物（例えばケーキ）を分け合う。2 人が同時に自分の要求するケーキの大きさを提示し，その和が 1 以内なら提示した通りの大きさをもらうことができるが 1 を超えるとどちらもまったくもらえない。このゲームには以下のようなナッシュ均衡がある。プレイヤー A，B の提示する大きさをそれぞれ x，y とする。x，y はゼロ以上 1 以下の数である。

1. x，y が $x + y = 1$ を満たす正の数であればすべてナッシュ均衡。例えば $y = \frac{2}{3}$ とするとプレイヤー A は $x = \frac{1}{3}$ を提示すれば $\frac{1}{3}$ がもらえるが，それ以上を提示してもまったくもらえないので $y = \frac{2}{3}$ を前提とすれば $x = \frac{1}{3}$ は最適反応。$y = \frac{2}{3}$ も同様に最適反応なので (プレイヤー A の戦略，プレイヤー B の戦略) = $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ はナッシュ均衡。他の組み合わせも同様。
2. $(1, 0)$，$(0, 1)$ もナッシュ均衡。$y = 0$ とするとプレイヤー A は $x = 1$ を提示することによってケーキをすべてもらえるので最適，一方 $x = 1$ を前提とするとプレイヤー B はどのような提示をしてもまったくもらえないのでどの戦略も最適であるから 0 も最適であり $(1, 0)$ はナッシュ均衡。同様に $(0, 1)$ もナッシュ均衡。

3. $(1,1)$ もナッシュ均衡。$y=1$ とするとプレイヤー A はどのような提示をしてもまったくもらえないのでどの戦略も最適であるから 1 も最適。同様にプレイヤー B にとって 1 は最適であり $(1,1)$ はナッシュ均衡である。

このようにディマンドゲームにはナッシュ均衡がいくつもあり均等に分ける $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ が実現するとは限らない（これもナッシュ均衡であるが)。一方この問題をナッシュ交渉解で考えると対称的なゲームであるから明らかにケーキの取り分が $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ となるのが解である。そこで上のディマンドゲームを次のように作り変える。

> $x+y>1$ となってもまったく何ももらえなくなるわけではなくある確率で（ケーキが突然大きくなって）それぞれ提示した大きさがもらえるものとする。その確率は $x+y$ が大きくなるほど小さくなる。x，y は正の数であるが 1 以下でなくてもよい。

具体的に確率は次のような式 p で表されるものとする。

> $x+y \leqq 1$ なら $p(x+y)=1$, $x+y>1$ なら $p(x+y)=-a(x+y-1)^2+1$,
> a は正の数, $0 \leqq p \leqq 1$ の範囲で解があると仮定する

p は滑らかな関数（$x+y$ が 1 を超えると連続的に p が小さくなり，$x+y=1$ のときの p の微分は 0）なので「平滑化」の名がある。$x+y \geqq 1$（$x+y<1$ の状態はどちらのプレイヤーにとっても最適ではない）としてプレイヤー A, B の期待効用は $u_1=[-a(x+y-1)^2+1]x$, $u_2=[-a(x+y-1)^2+1]y$ と表される。それぞれ x，y で微分すると

$$-2a(x+y-1)x-a(x+y-1)^2+1=0,\ -2a(x+y-1)y-a(x+y-1)^2+1=0$$

$x+y=1$ のときは両式の左辺がともに正なので最適にはならない。$x+y>1$ とするとまず $x=y$ が求まる。すなわち平滑化されたゲームにおいてはナッシュ均衡は対称的である。そこで y を x で置き換えると

$$-2a(2x-1)x-a(2x-1)^2+1=0$$

より

$$8ax^2-6ax+a-1=0$$

が得られる。二次方程式の解の公式により

$$x=\frac{3a+\sqrt{a^2+8a}}{8a}=\frac{3}{8}+\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{8a}}$$

となる。ここで $a\to\infty$ の極限を求めると $x\to\frac{1}{2}$ が得られる。このとき $y=\frac{1}{2}$ である。$a\to\infty$ とは，$x+y$ が 1 を超えると急速に確率が小さくなることを意味する。したがって平滑化されたゲームがもとのディマンドゲームに近づくときのナッシュ均衡の極限がナッシュ交渉解と一致する。

5.7.2　交渉ゲームの部分ゲーム完全均衡

最後に非協力ゲームの部分ゲーム完全均衡の考え方による交渉の分析を紹介する。ナッシュ交渉解の説明で用いた例（交渉が決裂したしたときの B の利得が 4 の場合）をもう一度考えてみよう。次のような手順で交渉を進める。

1. まず A（B でもよいが，その場合は以下の A と B が入れ替わる）が (5.16) の条件を等式で満たす各自の取り分 x_A，x_B を提案する。
2. 次に B がその提案を受け入れるか拒否するかを決める。受け入れればそこで交渉は終わる。拒否した場合は B が対案を提示する。
3. その B の提案を受けて A が受け入れるか拒否するかを決める。受け入れればそこで交渉は終わり，拒否した場合は A が再度対案を提示する。という手順でどちらかが受け入れるまで続く。
4. 相手の提案を拒否すれば自分が対案を出すことができるが，その提案を相手が受け入れたとしても自分が受け入れる場合よりも交渉が終了するのが 1 回遅れる。その間に時間が経過するので各プレイヤーが利得を割り引くものと考え，割引因子を δ で表す。δ は 1 より小さい正の数であり，A，B 両者に共通であるとする。交渉が決裂したときの利得（A，B ともに 4）は交渉が始まる前にすでに実現しており，交渉の過程で割り引かれないものとする。したがって提案されるのはこの 4 を除く利得の部分である。たとえば，まず A が x_A-4, x_B-4 を提案し，B がそれを拒否して x'_A-4, x'_B-4 を提案して A が受け入れた場合，A の利得は $\delta(x'_A-4)$，B の利得は $\delta(x'_B-4)$ となる。最初の A の提案を受け入れた場合にはもちろんそれぞれ x_A-4 と x_B-4 であった。さらに交渉の妥結が遅れればそれだけ利得は割り引かれる。

このとき次のような戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる。

交渉ゲームの部分ゲーム完全均衡　1.　A は毎回 (x_A^*-4, x_B^*-4) を提案し，B は毎回 (y_A^*-4, y_B^*-4) を提案する。これらは次の関係を満たす

$$y_A^*-4=\delta(x_A^*-4),\ x_B^*-4=\delta(y_B^*-4) \tag{5.18}$$

当然 (5.16)（等式で満たす）により

$$2x_A^*+x_B^*=24,\ 2y_A^*+y_B^*=24 \tag{5.19}$$

が成り立っていなければならない。この式は次のようにも表される。

$$2(x_A^*-4)+x_B^*-4=12,\ 2(y_A^*-4)+y_B^*-4=12$$

2.　B は A の提案が $x_B-4 \geqq x_B^*-4$ ならば受け入れ，そうでなければ拒否する。A

も同様に B の提案が $y_A - 4 \geqq y_A^* - 4$ ならば受け入れ，そうでなければ拒否する。

3. したがってこの交渉は最初の A の提案を B が受け入れて終わる。

(5.18) と (5.19) から各提案は次のような値になる

$$x_A^* - 4 = \frac{6}{1+\delta},\ x_B^* - 4 = \frac{12\delta}{1+\delta}$$
$$y_A^* - 4 = \frac{6\delta}{1+\delta},\ y_B^* - 4 = \frac{12}{1+\delta}$$

これが部分ゲーム完全均衡であることを確認していこう。このゲームの（全体のゲーム以外の）部分ゲームとは提案 ⟶ 拒否が繰り返された後（1 回でもよい）次の提案から始まるゲームを言う。何回目かの A の提案から始まる部分ゲームを考えてみる。A が $x_B - 4 \geqq x_B^* - 4$ を満たさない，すなわち $x_B - 4 < x_B^* - 4$ であるような $x_B - 4$ を提案（自分の取り分については $x_A - 4 > x_A^* - 4$ を満たす $x_A - 4$ を提案）すると B はこれを受け入れない。B が上記の戦略をとるならば B に拒否された後に A にとって実現可能な利得は，A が提案をした回を基準として（それが何回目の提案であろうと交渉が始まってからそこまでの時間の経過は無視して）$\delta^2(x_A^* - 4)$（B の再提案を A が拒否した場合）か $\delta(y_A^* - 4)$（B の再提案を A が受け入れた場合）であるが，(5.18) によりこれらは等しく，$x_A^* - 4$ よりも小さい。したがって A は $x_B^* - 4$ より小さい $x_B - 4$ を提案はしない。一方 $x_B^* - 4$ より大きい $x_B - 4$ を提案すれば B はそれを受け入れるがそれでは A の利得が減るので意味がない。B の提案から始まる部分ゲームについても同じように考えることができる。何回目かの B の提案から始まる部分ゲームを考える。B が $y_A - 4 < y_A^* - 4$ であるような $y_A - 4$ を提案（自分の取り分については $y_B - 4 > y_B^* - 4$ を満たす $y_B - 4$ を提案）すると A はこれを受け入れない。A が上記の戦略をとるならば A に拒否された後に B にとって実現可能な利得は，B が提案をした回を基準として $\delta^2(y_B^* - 4)$（A の再提案を B が拒否した場合）か $\delta(x_B^* - 4)$（A の再提案を B が受け入れた場合）であるが，(5.18) によりこれらは等しく，$y_B^* - 4$ よりも小さい。したがって B は $y_A^* - 4$ より小さい y_A を提案はしない。一方 $y_A^* - 4$ より大きい $y_A - 4$ を提案すれば A はそれを受け入れるがそれでは B の利得が減るので意味がない。

以上で上記の均衡戦略の内各プレイヤーの提案が各部分ゲームにおいて最適であることが示された。次に相手の提案に対する回答が最適であることを確認しなければならない。A が提案をした回に B がそれを受け入れれば B の利得は（その時点を基準として）$x_B^* - 4$ である。一方拒否したときに得られる利得は上の議論から高々 $\delta(y_B^* - 4)$ である。(5.18) よりこれらは等しい。したがって $x_B - 4 \geqq x_B^* - 4$ ならば受け入れ，そうでなければ拒否するという B の戦略は最適である。一方 B が提案をした回に A がそれを受け入れれば A の利得は（その時点を基準として）$y_A^* - 4$ である。一方拒否したときに得られる利得は上の議論から高々 $\delta(x_A^* - 4)$ である。(5.18) よりこれらは等しい。したがって $y_A - 4 \geqq y_A^* - 4$ ならば受け入れ，そうでなければ拒否するという A の戦略は最適である。

以上によって上記の戦略の組が部分ゲーム完全均衡であることが示された。ところでこの均衡とナッシュ交渉解には何か関係があるだろうか？ 割引因子 δ が非常に 1 に近い（あるいは割引率 $\frac{1}{\delta}-1$ が 0 に近い）とすると[*20]，A の提案を B が受け入れて決着する均衡における各プレイヤーの利得は

$$x_A^* \longrightarrow 7,\ x_B^* \longrightarrow 10$$

となる。これらは（極限において）ナッシュ交渉解と一致する。

■例題

1. 262 ページにある「2 人の共同事業」の例をナッシュ交渉解を用いて解け。
   （解）この問題を 359 ページのナッシュ交渉解の記号を使って表すと，U は $x_A+x_B \leqq 2000$ で表され，$d_A=100$，$d_B=200$ である。ラグランジュ関数は

   $$\mathcal{L}=(x_A-100)(x_B-200)+\lambda(x_A+x_B-2000)$$

   となり，これを x_A，x_B で微分してゼロとおくと

   $$x_B-200+\lambda=0$$

   $$x_A-100+\lambda=0$$

   が得られる。これらの式と $x_A+x_B=2000$ から

   $$x_A=950,\ x_B=1050$$

   が求まる。この場合はナッシュ交渉解と仁が一致する。
2. ナッシュ交渉解を企業と労働組合の賃金・雇用交渉の問題に応用する。賃金を w，雇用者数を l で表す。企業は一定の資本のもとで生産を行うものとし生産関数を $40\sqrt{l}$ とする。労働組合は 2400 人の人を預かり企業に雇用されない場合は外部の仕事で 8000 の賃金を受け取れる。企業が生産する財の価格は 16000 であるとする。企業の利得は財の販売から得られる収入と賃金費用の差であり，組合の利得は企業に雇用される者と雇用されない者を含めた全員の賃金収入の合計である。交渉が決裂した場合は企業は生産ができなくなるが，組合員は外部からの賃金を得ることができる。以上の設定のもとで以下の問に答えよ。また，外部の仕事で得られる賃金率が 10000 のときにも同じ問題を解け。
   (i) 交渉が決裂したときのそれぞれの利得を求めよ。
   (ii) 企業と組合の利得を式で表せ。

[*20] δ が 1 になってはいけないが限りなく 1 に近づくものとする。これは 2 人のプレイヤーが将来の利得をほとんど割り引かなくなることを意味する。

(iii) ナッシュ交渉解における賃金率と雇用者数を求めよ。

(i) 交渉が決裂したときの企業の利得は 0，組合の利得は 19,200,000(8000 × 2400) である。

(ii) 企業の利得は

$$u_1(w,l) = 16000 \times 40\sqrt{l} - wl$$

労働組合の利得は

$$u_2(w,l) = wl + (2400 - l) \times 8000$$

と表される。

（解）ナッシュ積は

$$(16000 \times 40\sqrt{l} - wl)(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000) \tag{5.20}$$

と書ける。これを w で微分してゼロとおくと

$$-l(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000) + l(16000 \times 40\sqrt{l} - wl) = 0$$

となり，$l \neq 0$ であるから次の式が得られる。

$$wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000 = 16000 \times 40\sqrt{l} - wl \tag{5.21}$$

この式はナッシュ交渉解において「企業の利得」と「労働組合の利得から外部賃金を引いたもの」（すなわち交渉によってそれぞれが得られる利得）が等しいことを意味している。一方 (5.20) を l で微分してゼロとおくと

$$\begin{aligned}&(320000\frac{1}{\sqrt{l}} - w)(wl + (2400 - l) \times 8000 - 19200000)\\&+ (w - 8000)(16000 \times 40\sqrt{l} - wl) = 0\end{aligned}$$

が得られる。(5.21) より

$$320000\frac{1}{\sqrt{l}} - w + w - 8000 = 0 \tag{5.22}$$

となり $l = 1600$ が求まる。これが交渉解における雇用量である。$l = 1600$ を (5.21) に代入すると

$$1600w - 12800000 = 25600000 - 1600w$$

となり $w = 12000$ を得る。これが交渉解における賃金率である。

外部の仕事から得られる賃金率が 10000 であれば (5.20) は

$$(16000 \times 40\sqrt{l} - wl)(wl + (2400 - l) \times 10000 - 24000000)$$

(5.21) は

$$wl + (2400 - l) \times 10000 - 24000000 = 16000 \times 40\sqrt{l} - wl \tag{5.23}$$

となり，(5.22) は

$$320000\frac{1}{\sqrt{l}} - w + w - 10000 = 0$$

となるので $l = 1024(= 32^2)$ が得られる。これを (5.23) に代入すると

$$1024w - 10240000 = 20480000 - 1024w$$

より $w = 15000$ が求まる。本文でも述べたように交渉に当たっては決裂したときの利得を大きくすることによってより有利な交渉結果を実現することができる。

索引

著者略歴

田中 靖人（たなか・やすひと）

1953 年　大阪府岸和田市春木生まれ
1976 年　京都大学工学部航空工学科卒業
1977 年　京都大学大学院工学研究科修士課程航空工学専攻中退
この間　哲学科学生（除籍），コンピュータプログラマー，学習塾講師などを経験
1983 年　横浜国立大学大学院経済学研究科修士課程修了
1986 年　東京大学大学院経済学研究科博士課程単位修得
その後　山形大学人文学部経済学科講師・助教授，中央大学法学部助教授・教授を経て
現在　同志社大学経済学部教授，博士・経済学（中央大学）

著書

『ゼロから始める経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）（このテキストの前身）
『ゼロから始める国際経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）（「国際経済学」テキストの前身）
『ゲーム理論と寡占』（中央大学出版部, 2001）

論文

https://researchmap.jp/read0162233/

E-mail: yatanaka@mail.doshisha.ac.jp

ミクロ経済学の基礎（上下統合版）

2015 年 9 月 1 日　　初版発行
2021 年 4 月 1 日　　一部修正

著 者　田中靖人（たなかやすひと）
発 行　同志社大学経済学部
〒602-8580 京都市上京区今出川通烏丸東入 同志社大学良心館
TEL 075-251-3648（田中研究室）

Printed in Karasuma-Imadegawa