ミクロ経済学の基礎
（下）

同志社大学 経済学部
田中 靖人

まえがき

本書は『ミクロ経済学』および『ゲーム理論』の基礎を解説したものであり，初級のミクロ経済学用テキストとして使用することを想定している。授業が二つに分かれたのでテキストも（上）（下）に分けた。これはその（下）である。演習問題もだいたい分けた。

説明は簡潔に記したので適当な参考書を併読することが望ましい（必ずしも必要ではないが)。代表的な参考書には次のようなものがあるが，他にもいろいろあるので自分で手にとってみて読みやすそうなものを購入することを勧める*1。

1. 神取道宏『ミクロ経済学の力』（日本評論社）**（お勧め）**
2. 浅羽茂『企業の経済学』（日経文庫）
3. 荒井一博『ミクロ経済理論（有斐閣アルマ)』（有斐閣）
4. 石井安憲 他『入門ミクロ経済学』（有斐閣）
5. 入谷，篠塚『ミクロ経済学講義』（日本経済新聞出版社）
6. 浦井，吉町『ミクロ経済学』（ミネルヴァ書房）
7. 井堀利宏『入門ミクロ経済学』（新世社）
8. 奥野正寛『入門ミクロ経済学』（日経文庫）
9. 奥野正寛『ミクロ経済学』（東京大学出版会）
10. 奥野・鈴村『ミクロ経済学 I，II』（岩波書店）
11. 梶井・松井『ミクロ経済学 戦略的アプローチ』（日本評論社）
12. 倉澤資成『入門価格理論』（日本評論社）
13. 佐々木宏夫『(基礎コース）ミクロ経済学』（新世社）
14. 武隈慎一『ミクロ経済学 増補版』（新世社）
15. 遠山智久『弱点克服 大学生のミクロ経済学』（東京図書）
16. 永田良 他『標準ミクロ経済学』東洋経済新報社
17. 成生達彦『ミクロ経済学入門（有斐閣アルマ)』（有斐閣）
18. 西村和雄『ミクロ経済学』（岩波書店）
19. 西村和雄『ミクロ経済学入門』（岩波書店）
20. 林貴志『ミクロ経済学-増補版』（ミネルヴァ書房）
21. 川島康男『寡占と価格の経済学』（勁草書房）
22. 柳川隆 他『ミクロ経済学・入門—ビジネスと政策を読みとく (有斐閣アルマ)』（有斐閣）

*1 以下で示す文献の中には，このテキストの前身の，そのまた前身のテキストに記載されていたかなり古いものも含まれており，何度も改訂されたり，すでに出版されていなかったり，訳者や書名が変ったりしたものもあるかもしれないが，その際はご容赦願いたい。

23. 矢野誠『ミクロ経済学の基礎』（岩波書店）
24. 矢野誠『ミクロ経済学の応用』（岩波書店）
25. 戸瀬信之『コア・テキスト 経済数学』（新世社）

ゲーム理論の参考書としては上記梶井・松井の他に以下のものが代表的である。

1. 岡田章『ゲーム理論・入門』（有斐閣アルマ）**（お勧め）**
2. グレーヴァ 香子『非協力ゲーム理論 (数理経済学叢書) 』（知泉書館）**（学部上級にお勧め）**
3. 岡田章『ゲーム理論』（有斐閣）**（大学院生にお勧め）**
4. 神戸伸輔『入門 ゲーム理論と情報の経済学』（日本評論社）
5. R. ギボンズ（福岡正夫他訳）『経済学のためのゲーム理論入門』（創文社）
6. 佐々木宏夫『入門 ゲーム理論—戦略的思考の科学』（日本評論社）
7. 中山幹夫『はじめてのゲーム理論』（有斐閣）
8. 船木由喜彦『演習 ゲーム理論』（新世社）
9. 武藤滋夫『ゲーム理論入門』（日経文庫）
10. 武藤滋夫『ゲーム理論』（オーム社）
11. 渡辺隆裕『ゼミナール ゲーム理論入門』（日本経済新聞出版社）

本書は以前に中央大学生協出版局から発行していた『ゼロから始める経済学（改訂版）』をもとにして作り同志社大学経済学部の『中級ミクロ経済学』テキストして使用したものから中級の内容の一部を削除して作成した。

これまでのテキスト執筆の機会を与えてくださった中央大学生協出版局，同志社大学経済学部事務室，および授業で使っていただいた中央大学法学部・商学部，同志社大学経済学部の学生諸君に深く感謝する。誤りや説明のわかりにくい所などがあればご指摘願いたい。なお本書は目次と索引の自動作成，作図を含めて，パソコン用組版システム LaTeX とその関連ソフトを用いて執筆した。これらのプログラムをフリーソフトとして公開してくださった方々に厚く感謝する。日本語フォントは「原ノ味明朝」および「原ノ味角ゴシック」フォント (https://github.com/trueroad/HaranoAjiFonts) を用いた。

演習問題の解答と付録をつけたものを pdf ファイルで**同志社大学オープンコースウェア** (https://opencourse.doshisha.ac.jp/publication/economics/index.html) に載せる予定なので参考にしていただきたい。そのファイルは（上）（下）に分けていない上下統合版である。

2021 年 4 月 1 日 田中靖人

目次

第 1 章

企業の行動

■この章のキーワード　生産，生産要素，資本，正常利潤，超過利潤，生産関数，限界生産力，費用最小化，規模の経済性，等費用線，可変費用，固定費用，平均費用，平均可変費用，限界費用，完全競争，利潤最大化，参入障壁，長期の均衡，消費と生産の効率性，独占企業，限界収入，製品差別化，独占的競争，寡占，クールノー均衡，ベルトラン均衡，シュタッケルベルク均衡，外部性，シェパードの補題，規模に関する収穫一定の生産関数，CES 生産関数

この章では供給曲線を構成するもとになる企業の行動について考える。

1.1　生産と企業

1.1.1　生産

財（サービスを含む）を消費者に供給すべく用意することが**生産** (production) である。水・大麦・ホップなどを使ってビールを作るのはもちろん生産であるが，経済学では生産という言葉を日常使うよりも広い意味で用いる。工場で作られたビールを問屋の倉庫に運ぶのも生産であるし，それを小売り店の店先に並べるのも，消費者に販売するのも生産である。つまり『生産』には運送，保管，販売などの物流・流通過程における仕事も含まれている。また物質的な財だけでなく，家庭教師が生徒に教える，不動産屋がアパートを紹介する，弁護士が法律相談を受けるなどのサービスの提供も生産である。一般に生産とは，財やサービスを用いて別の財やサービスを作る，あるいはそれらの財やサービスの形，機能，場所などを変えることである。

1.1.2　生産要素と資本

財やサービスの生産に用いられる財やサービスを**生産要素**と呼ぶ。具体的には原材料，燃料（石炭や電力），部品，労働 (labor)，機械や工場などの生産設備，土地などである。

これらのうち労働，生産設備，土地はそれ自体が生産物に化するのではなく，それらのもつ機能が生産に用いられると考えられる。したがって正確には労働，生産設備，土地の**サービス**が生産に用いられると言うべきである。労働サービスとは一定時間の労働を企業に提供することであり，土地のサービスとは一定の土地を一定の期間利用する権利を与えることである。同様に生産設備のサービスも一定期間機械などを利用する権利を与えることである。生産設備は**資本** (capital) とも呼ばれる。通常資本とは生産に必要なものを買うために用いられる資金のことを指すが，経済学では資金とともにその資金で購入された機械や工場などの財を指して資本と呼ぶ。これらは原材料や部品などとともに，財としては**資本財**（あるいは生産財）と呼ばれ，消費者が消費する食料品や家電製品などの**消費財**と区別される。

原材料や部品，燃料などはそれらを他の企業から買ってきて完成品の生産に用いる企業にとっては生産要素には違いないが，これらは完成品に至るまでの生産過程の途中に位置するいわゆる**中間生産物**であり，これらも資本・土地・労働などによって生産されたものである。したがって生産過程全体を一体のものとして見ると，生産要素は資本・土地・労働の三つになる[*1]。三つの生産要素を考えると議論が複雑になるので本書のモデルでは（土地の存在を軽視するわけではないが）資本と労働の 2 つの生産要素を用いて財の生産が行われているものと想定する。

生産要素を投入物 (input)，生産された財を産出物 (output) と呼ぶこともある。

1.1.3　生産技術

投入物から産出物を得る方法に関する知識を**生産技術**と呼ぶ。どのような投入物をどのように組み合わせればどのような産出物を得られるかについての知識が生産技術である。

1.1.4　生産要素に対する報酬

資本・土地・労働などの生産要素のサービスが生産に用いられれば報酬を受け取る。土地に対する報酬とは，一定期間（1 年とか 1 ヵ月）土地を利用することに対して支払われるものであり**地代**と呼ばれる。企業が地主から土地を借りて生産に用いる場合は土地サービスに対する報酬として地代を支払う。自己の所有する土地を使う場合は自分自身が地主であると考える。労働に対する報酬は一人の労働者に一定時間働いてもらうことに対する報酬であり**賃金率**（一定時間当たりの賃金，時間給や日給）で測られる。

[*1] 機械などの生産設備も生産された財であるが原材料や部品，燃料などとは生産における用いられ方が異なる。原材料は加工されて完成品に化け，部品は完成品の中に組み込まれ，燃料は燃やされてそれ自体としては存在しなくなってしまう。しかし，生産設備はそのものが加工されるわけではなく労働や土地とともに生産に貢献し完成品が出来上がった後も残っている。マクロ経済学において『中間生産物の産出は国内総生産には含まれない』という話が出て来るがここの議論と同様の主旨である。

資本に対する報酬は，資本家が投資した資本によって購入された資本財を一定期間用いることに対する報酬であり，**資本レンタル**と呼ばれる（資本レンタル率・レンタル料，資本の価格とも言う）。株式の購入という形で企業に資本を提供している場合には株式配当が資本レンタルである。企業活動に必要な資金は株主が投資するだけではなく金融機関から借り入れたり，社債を発行して外部から調達したりもしている。そのような場合企業は他人の金を一定期間利用する権利というサービスを得ている。それらに対して支払われる利子も資本レンタルである。銀行，信用金庫などの金融機関は，預金者や投資家がこのようなサービスを企業に与えるのを仲介するというサービスを提供する企業である。生産要素に対する報酬は企業の側から見れば生産要素の価格である。整理すれば，資本レンタルとは具体的には主に銀行などの金融機関や債権者（債券保有者）に支払う『利子』，および『株式配当』からなる。このうち株式配当については後で述べる正常利潤に相当する部分だけが含まれる。

1.1.5　生産要素の単位

生産された財と同様に生産要素の投入量とその報酬も一定の単位で測られる。労働については一人の人の 1 時間の労働を 1 単位とし，資本については 1 円の資本の 1 年間の投資を 1 単位とするというように。その場合賃金率は時間給になり，資本レンタルは利子率と同じ次元になる。

1.1.6　企業

経済において生産に携わる経済主体を**企業**と呼ぶ。経済学で企業というのは生産をしていることが条件のすべてであるから，株式会社や有限会社などの会社組織になっていることは必要ない。一人でやっていても企業であり，床屋や家庭教師も企業である。

1.1.7　企業と株主および企業の目的

企業は誰のものであり誰が支配しているのか。株式会社である企業を構成する人々は株主，経営者（取締役），従業員である。経営者が自ら大株主である場合もあるし従業員が株の一部を所有していることもあるが，機能的にはそれぞれ異なった役割を果たしている。従業員は契約にもとづいて仕事をしているが，経営者も株主の依頼を受け株主によって選ばれて経営に当たっている。従業員は労働サービスを供給し株主は資本サービスを供給する。経営者も経営的な仕事（労働）をして報酬を受け取っているという意味では従業員の一種であると考えることができる。企業に資本を出資している株主が企業の所有者であり，企業が稼ぐ利潤は株主のものとなる。実際には株主があまり力を持っていなくて経営者が企業を支配している，つまりその企業の経営方針を決定しているケースが多いかもしれないが，企業組織についての研究が本書で取り扱う経済学の主なテーマではないの

で，企業は株主によって支配され株主の利益のために行動していると考える。したがって，『企業は利潤を追求する存在である』，正確には『利潤の最大化を図る存在』であると考える。その利潤とは以下で述べる超過利潤である。株主は自らが当然受け取るべき正常利潤を受け取った上で，さらにそれを越える超過利潤をできるだけ大きくすべく企業を運営している。

1.1.8　利潤と超過利潤

資本と労働を生産要素として企業の利潤は次のように表される。

$$\text{利潤} = \text{財の価格} \times \text{産出量} - \text{賃金率} \times \text{労働投入量} - \text{資本レンタル} \times \text{資本投入量}$$

記号で書いた方が便利だが，利潤：π，価格：p，産出量：x，賃金率：w，資本レンタル：r，労働投入量：L，資本投入量：K とすると

$$\pi = px - wL - rK$$

となる。企業の利潤は生産した財やサービスを販売して得た収入あるいは売り上げから，その生産にかかった費用を引いた残りであるが，資本が当然受け取るべき通常の報酬，すなわち経済全体で平均的に株主が受け取れると考えられる世間相場並の報酬の部分を**正常利潤**と呼んで利潤から差し引き費用に含める。この正常利潤は上で述べた資本レンタルに当たるものである。正常利潤を引いた残りの利潤を**超過利潤**と呼ぶ。経済学で単に利潤と言えば超過利潤の意味であり，会計上の利益とは異なっている。正常利潤は一国の経済全体の状況によって，特に資本の供給と需要の関係によって決まる。ある企業が世間の平均以上に儲かっていれば超過利潤は正になりその企業の株主は平均以上の収益を得る。逆に平均以下の儲けであれば株主の収益も平均以下となる[*2]。

1.1.9　利潤最大化問題の考え方

企業の利潤最大化問題を次の 2 つの段階に分けて考える。

1. 費用を最小化する生産方法の選択 - 費用最小化問題
   生産要素を組み合わせて生産が行われるが，どのような組み合わせが最も効率的であるかを考えなければならない。具体的にはある財を一定の量生産するのに最も費用が少なくてすむ生産要素の組み合わせを求めるという問題を考える。
2. 利潤を最大化する産出量の選択
   各産出量について費用最小化問題を解くことによって効率的な生産の方法がわかれば，それぞれの産出量についていくらの費用を必要とするかがわかる。そうする

[*2] 後の節で『長期の均衡』においては企業の利潤はゼロになるという議論が出てくるが，利潤がゼロとは超過利潤がゼロという意味である。

と，財の価格が与えられれば各産出量を生産して得られる利潤がわかる。その上で最も利潤が大きくなる産出量を選ぶ。

1.2　限界生産力と収穫逓減の法則

1.2.1　生産関数

生産要素の投入量を増やせば産出物の産出量は増え減らせば減るというように，生産要素の投入量と産出量とには関係がある。生産要素として資本と労働を考え，その関係を次のような**生産関数**で表す。

$$x = f(L, K)$$

L，K はそれぞれ（一定期間における）労働と資本の投入量，x は（同じ期間における）財の産出量である。消費者の効用関数では効用が序数的に測られているのに対して生産関数では実際の財の産出量が測られているという点を除けば，効用関数と生産関数とは数学的に同じ構造をもっている。この式は L の労働と K の資本を投入すれば x の量の産出物が得られるということを表している[*3]。L，K，x はそれぞれ適当な単位で測られる。

1.2.2　限界生産力

各生産要素が生産にどの程度貢献しているかを表す概念として生産要素の**限界生産力** (marginal product) がある。これは以下のように定義される。

労働の限界生産力　資本の投入量を一定として労働の投入量を 1 単位増やしたときに産出量がどのくらい増えるかを表す[*4]。

資本の限界生産力　労働の投入量を一定として資本の投入量を 1 単位増やしたときに産出量がどのくらい増えるかを表す。

労働の限界生産力の定義においては資本の投入量が一定の状態で考え，資本の限界生産力の定義においては労働の投入量が一定の状態で考えるということとともに，労働や資本 1 単位当たりの産出量（平均生産力とでも呼べる）ではなく**追加的な 1 単位の投入**によって産出量がどのように増えるかを考えているということが重要である。

[*3] この式は財の産出量 x は労働投入量 L，資本投入量 K によって決まるということ，そしてそのことだけを意味するものである。

[*4] 厳密にはごくわずかに労働投入量を増やしたときの産出量の増加と労働投入量の増加の比（つまり労働投入量増加 1 単位当りの産出量の増加）として定義される。数学的には生産関数の微分として求められる。次の資本の限界生産力も同様。

1.2.3　収穫逓減の法則

資本を一定にして，すなわち生産設備の量をそのままにして労働だけを増やしていくとすると，労働の投入量が少ない間は生産の増加に効果があるがやがて労働が多くなりすぎて，その投入量を増やしてもあまり産出量が増えなくなる，すなわち労働の限界生産力は労働投入量の増加とともに小さくなると考えられる。労働投入量を一定にして資本の投入量を増やす場合も同様である。これを**収穫逓減の法則**（あるいは限界生産力逓減（ていげん）の法則）と呼ぶ。

1.2.4　規模に関する収穫

限界生産力を考えたときには他の生産要素の投入量を一定にして一つの生産要素の投入量だけを増加させたが，生産技術は変えないですべての生産要素が同じ割合で増加した場合の生産要素の増加と産出量の増加との関係は**規模に関する収穫**と呼ばれる。すべての生産要素を同じ割合で増加させたときに生産要素の増加率と同じ割合で産出量が増加するとき**規模に関して収穫一定（不変）**という。生産要素の増加率以上に産出量が増加するときは**規模に関して収穫逓増（ていぞう）**，生産要素の増加率以下でしか産出量が増えないときは**規模に関して収穫逓減（ていげん）**と言う。財の種類や生産技術によって異なるであろうが，一般的には産出量が少ない間は収穫逓増であるが産出量が多くなるにつれて収穫一定となり，やがて収穫逓減の傾向を示すようになると考えられる。その理由としては，産出量も労働投入量も少ないうちはそれらの増加によって生産工程を分けて分業体制をとることができるようになり，一人一人がそれぞれ専門的な仕事に従事するようになって生産性が向上する一方、生産規模があまり大きくなりすぎると全体の管理，調整が困難になって生産性が低下するということが考えられる。規模に関する収穫を考える場合はすべての生産要素の増加を考えるので，限界生産力よりは逓増あるいは一定となる範囲が大きい。規模に関する収穫逓増は**規模の経済性** (economies of scale) とも呼ばれる。大量生産の利益というのも同様の意味である。産業によってはかなりの生産規模（各企業が利潤を最大化すべく選択する産出量程度まであるいはそれを越えて）になるまで規模に関する収穫逓増の性質を持つかもしれない。特に大規模な生産設備を必要とする産業においてそのようになると考えられる。そのような場合，それらの産業には規模の経済性があると言われる。

1.3　費用最小化

1.3.1　等産出量曲線

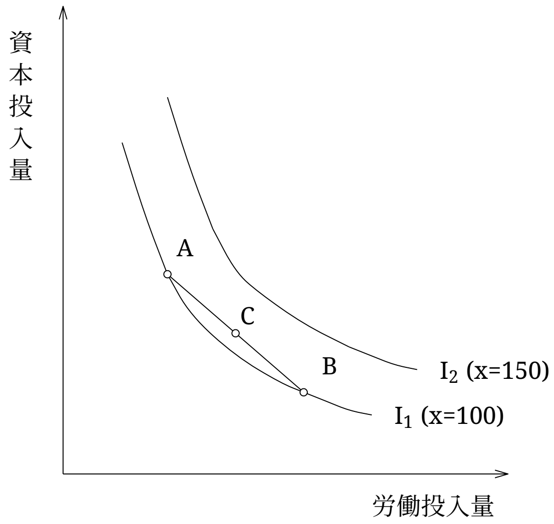


図 1.1　等産出量曲線

生産関数は生産要素の投入量と産出物の産出量の関係を式で表すものであるが，これを労働の投入量を横軸，資本の投入量を縦軸にとって図で表現したものが**等産出量曲線**である。等産出量曲線はある与えられた生産技術のもとで，一定の産出量を生産することができるさまざまな生産要素の組み合わせを表す。一定の生産技術のもとで一定の量の財を生産するための生産要素の組み合わせを**生産方法**と呼ぶことにする。図 1.1 の I_1，I_2 はそれぞれ産出量が 100 と 150 のときの等産出量曲線である。I_1 上の点 A，B はともに 100 の生産が可能な資本と労働の投入量の組み合わせであり，A は資本を多く用いる（機械化された）生産方法，B は労働を多く用いる生産方法を表している。各生産要素が生産に正の貢献をする，言い換えれば各生産要素の限界生産力がプラスであれば，労働の投入量が減ると産出量が減るので産出量を一定に保つには資本の投入量を増やさなければならないから等産出量曲線は右下がりになる。また，資本・労働のどちらかに偏った生産方法よりも両方をバランスよく用いる生産方法の方が効率的であると仮定すると，図のように等産出量曲線は原点に向かって凸になる。図の点 C は A と B の中間的な組み合わせであるが，この点は A，B を通る等産出量曲線より上にあるので産出量は 100 より多い。等産出量曲線

は消費者の無差別曲線と図形的には（あるいは数学的には）同じ性質を持っている。

1.3.2　等費用線

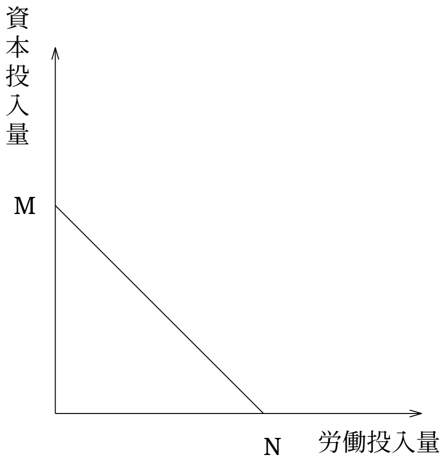


図 1.2　等費用線

労働と資本の 2 つの生産要素がありそれぞれの 1 単位当たりの価格，すなわち賃金率と資本レンタルを w，r で表し，ある一定の産出量を得るために必要な労働・資本の投入量をそれぞれ L と K で表すと，その産出量を生産するのに要する費用 c は

$$c = wL + rK$$

と表される。ある一定の c の値についてこの関係を等産出量曲線と同様に労働の投入量を横軸，資本の投入量を縦軸にとって図に表したものを**等費用線**と呼ぶ。図 1.2 の MN にその例が示されている。その名のとおり等費用線上の各点が示す労働・資本の投入量の組み合わせ，すなわち生産方法は，一定の生産要素価格（資本レンタルと賃金率）のもとで生産にかかる費用が等しい組み合わせを表している。一本の等費用線上の各点における産出量は異なる。等費用線の直線としての傾きの大きさは 2 つの生産要素の相対価格 w/r に等しい。これを**賃金レンタル比率**と呼ぶ。賃金率が資本レンタルに比べて高くなれば等費用線の傾きは大きくなる。そのとき縦軸の切片は横軸の切片に比べて相対的に大きくなるが，これは資本レンタルが相対的に低くなるために一定の費用で利用可能な資本の量が労働に比べて相対的に増えることを意味する。一方，資本レンタルが賃金率に比べて大きくなれば等費用線の傾きは小さくなる。等費用線は消費者の予算制約線と数学的な性質が同じである。

1.3.3　費用最小化の条件

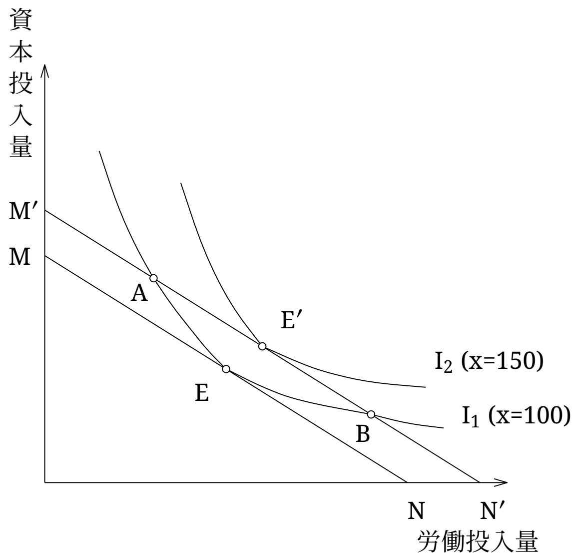


図 1.3　費用最小化

同じ産出量を生産するのならば費用が安いほど企業の利潤は大きくなる。したがって企業は自らが選んだ産出量を生産できる生産要素の組み合わせのうちで，最も費用の小さい組み合わせを選ぼうとするであろう。これが『費用最小化問題』である。費用が最も小さい生産方法を見つけるということは，ある一定の産出量について，**等産出量曲線上の点の中で最も低い等費用線上にある点を選ぶ**，ということになる。これは予算制約線上の点の中で最も高い無差別曲線上にある点を見つけるという消費者の効用最大化問題とは逆の問題設定であるが，最適点が満たす条件は同じものになる。図 1.3 には産出量を 100 とした場合の費用最小化を図示してある。この図で点 A，B はともに産出量 100 の生産が可能な生産要素の組み合わせであるが，費用が最小となる点ではない。なぜならば A を通る等産出量曲線 I_1 上で A より少し右下の点あるいは B より少し左上の点は，A，B を通る等費用線よりも下にあるので同じ 100 の産出量をより低い費用で生産できる。このように考えると x=100 の等産出量曲線上で最も低い費用となる点は，その点の右下の点も左上の点もその点を通る等費用線より上にある点ということになる。それは等産出量曲線と等費用線が接する点 E である。点 E より右下の点も左上の点も点 E を通る等費用線より上にあり費用が高い。同様にして産出量が x=150 のときに費用が最小となる資本と労働の組み合わせは点 E′ で示される。図からもわかるように，費用最小化問題は，予算制約線と無差別曲線とが接する点が最適な消費量になるという消費者の効用最大化問題と同じ形になっている（正確には消費者の支出最小化と同じ形）。

1.3.4　生産要素価格と費用最小化

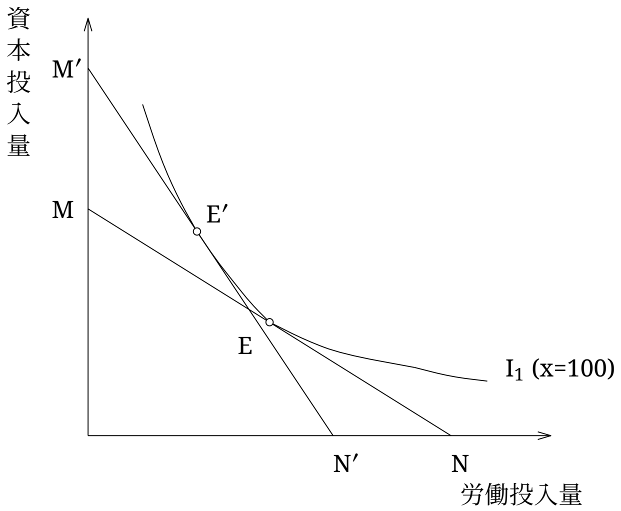


図 1.4　生産要素価格と費用最小化

等費用線は一定の生産要素価格のもとで描かれているが，生産要素の相対価格が変化すると等費用線の傾きが変わる。資本レンタルが一定で賃金率が高くなると，賃金レンタル比率は大きくなって等費用線の傾きは大きくなり，それによって費用が最小となる生産要素の組み合わせも変わる。図 1.4 にその様子が描かれている。図の M′N′ は MN と比べて賃金率が高くなったときの等費用線であり，費用が最小となる生産要素の組み合わせは点 E から点 E′ に移り，労働投入量が減って資本投入量が増えている。一般に等産出量曲線が原点に対して凸であれば，相対的に価格の高くなった生産要素の投入量が減り，安くなった生産要素の投入量が増える。これは，消費者の行動についての分析の中で，価格の変化に伴う消費量の変化の内，代替効果（効用一定のもとでの消費量の変化）によるものと同じ形になっている*5。

*5 生産要素価格の変化による生産要素投入量の変化は同一の等産出量曲線上での変化を考えているので，同一の無差別曲線上での価格の変化による消費の変化を考える代替効果と同じ形になる。

1.3.5　費用関数と費用曲線

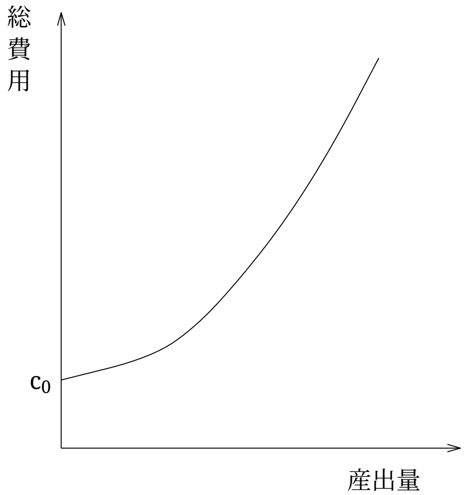


図 1.5　費用曲線

等産出量曲線と等費用線とを用いてある財のさまざまな産出量に対して費用が最小となる生産要素の組み合わせを見つけることができれば，産出量とその産出量を生産するのに必要な費用との関係が得られる。それを

$$C = C(x),\quad x \text{ は産出量}$$

という関数で表すことができる。これを**費用関数**あるいは総費用関数と呼ぶ。費用関数を図 1.5 に描かれているように曲線で表したものを**費用曲線**（総費用曲線）と呼ぶ。ここでは産出量がいくらでも細かく分割できるものと仮定して費用曲線をなめらかな曲線として描いている。費用関数や費用曲線は各産出量水準における最小の費用を表している。産出量が増えれば必ず費用は増えるから費用曲線は右上がり（傾きがプラス）である。

1.3.6　可変費用と固定費用

産出量が増えれば費用が増えるということは産出量の変化に伴って生産要素の使用量を変えるということであるが，生産要素には産出量の変化に対応して短期的に（短い時間で）調整可能なものと短期的には調整できないものとがある。短期的に調整可能な生産要素にかかる費用を**可変費用** (variable cost) と呼び，短期的には調整ができない生産要素，具体的には大規模な生産設備や事務所の家賃などにかかる費用を**固定費用** (fixed cost) と呼んでいる。資本の中でも小さな機械類などは短期的に調整可能であるだろうし，一方労

働にかかる費用の中でも，生産の現場ではなく事務職や重役（取締役）の賃金など企業組織にかかる費用は固定的であるかもしれない[*6]。したがって必ずしも労働が可変的で資本は固定的であるとは言えない。図 1.5 の c_0 で表されている部分が固定費用である。この図の費用曲線は短期的に調整可能な部分の変化を考えているので**短期費用曲線**とも呼ばれる。固定費用は短期的には生産をしてもしなくても同じ大きさだけかかる費用であり，費用最小化の対象にはならない。しかし長期的な時間を考えるとすべての生産要素が調整可能となるので長期的には固定費用は存在しない。

1.3.7　短期の費用と長期の費用

短期の費用は，産出量の変化に対して固定的な生産設備などを一定として生産方法を調整し費用の最小化を図って得られるものであるが，長期の費用は産出量の変化に対応して固定的な生産設備などもその産出量に合った水準に調整して得られるものである。したがって，生産設備がちょうどそのときの産出量にとって最適な水準になっていれば長期の費用と短期の費用とは等しく，後で説明する平均費用についても短期と長期とで等しくなっているが，生産設備が最適な水準よりも大きすぎたり小さすぎたりする場合には短期の費用の方が長期の費用よりも大きい。

固定的な生産設備の調整には費用がかかると思われるので，産出量の変化が一時的なものであると考えられる場合には生産設備の調整は行わず，その変化が長く続く場合にだけ行うべきであると考えられる。

簡単な数式モデルによって短期の費用と長期の費用との関係について考えてみる。生産設備の大きさ（あるいは金額）を K で，産出量を x で表し，短期の費用が

$$C(x) = K + \frac{x^2}{K}$$

で表されるものとする。生産設備が大きくなれば固定費用は増大するが可変費用は逆に減少する。

長期の費用は与えられた x の値に対して $C(x)$ が最小となるように K を決めることによって求められる（すなわち C を K の関数と見て)。（x を定数と見なして）C を K で微分してゼロとおくと

$$1 - \frac{x^2}{K^2} = 0$$

となり $K = x$ が得られる。したがって長期の費用（$C_L(x)$ と表す）は

$$C_L(x) = 2x$$

と求まる。例として $x = 16$ を考えてみよう。$K = 16$ ならば $C(16) = 32$ であるが，$K = 8$ および $K = 32$ のときは $C(16) = 40$ である。短期の費用（総費用）を図示すると K の値

[*6] 機械について言えば，リース，レンタルで借りて使うことも可能で，その場合契約にもよるが自分で買うよりは可変費用の性格が強くなると考えることもできる。

によって異なる放物線になり，長期の費用はその放物線の低いところを辿った直線になる[*7]。このようなとき，長期の費用曲線は短期の費用曲線の**包絡線** (envelope curve) と呼ばれるものになっている。

図 1.6 を見ていただきたい。互いに交わる数本の細い放物線が短期の費用であり，原点を通る太い直線が長期の費用である。この図は短期の費用を

$$C(x) = K + \frac{x^2}{8K}$$

と仮定して $x = 0$ から $x = 181$ まで描かれている。長期の費用を各自計算してみていただきたい。

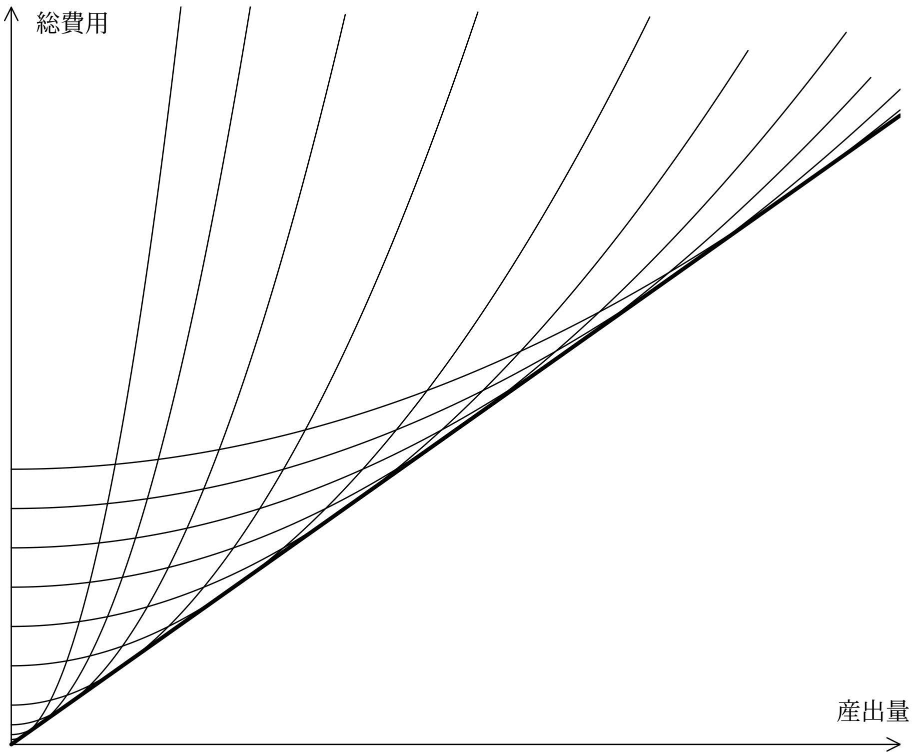


図 1.6　短期の費用と長期の費用

本書ではこれ以上短期の費用と長期の費用の区別については取り上げず，特にことわらない限り費用とは短期の費用を意味するものとする。

[*7] 長期の費用曲線が水平でなければ各放物線の最も低い所をたどることにはならない。

1.4　限界費用と平均費用

企業の行動を分析するのに重要な概念として平均費用と限界費用がある。

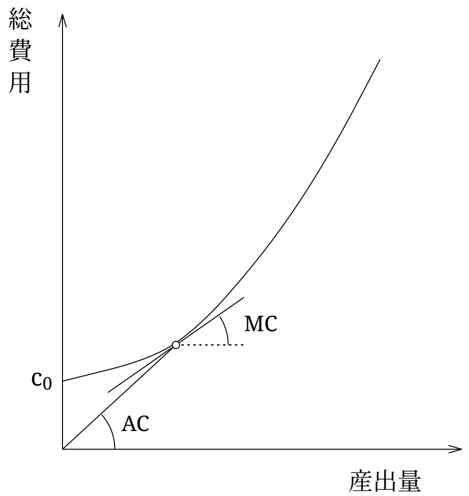


図 1.7　総費用，限界費用，平均費用

平均費用（average cost，AC で表す）とは産出量 1 単位当たりの費用のことで総費用を産出量で割って求められる。式で書くと

$$平均費用 = \frac{総費用}{産出量} \quad あるいは \quad AC = \frac{C(x)}{x}$$

となる。また，固定費用を除いて可変費用だけを産出量で割って得られるもの，すなわち 1 単位当たりの可変費用を**平均可変費用**（average variable cost，AVC と表す）と呼ぶ。

一方，産出量を少し（ごくわずかに）増加させたときの産出量の増加 1 単位当たりの費用の増加分を**限界費用** (marginal cost，MC で表す) と呼ぶ。式で書くと

$$限界費用 = \frac{総費用の増加分}{産出量の増加分} \quad あるいは \quad MC = \frac{\Delta C}{\Delta x}$$

のように表される。Δx は産出量の増加分，ΔC はその産出量の増加に対する総費用の増加分である。固定費用は産出量が変わっても変化しないので限界費用は可変費用の変化だけから求められる。限界費用の定義においては産出量の変化をその最小単位で考える。産出量が 1,2,3,$\cdots$ と整数の値をとる場合には，限界費用は 1 **単位産出量を増加させたときの費用の増加**と表現される[*8]。

[*8] 産出量の調整可能な最小単位を 1 単位とすればわかりやすい。

産出量がいくらでも細かく分割できる場合には[*9]，限界費用は費用関数を微分したものとして定義される。すなわち

$$MC = \frac{dC(x)}{dx}(= C'(x))$$

となる。

図 1.7 に総費用，平均費用，限界費用の関係を図示してある。ある産出量のときの平均費用は原点とその産出量に対応した費用曲線上の点とを結んだ線分（図の AC）の傾きで表され，限界費用は費用曲線の接線（図の MC）の傾きで表される。また，図には描かれていないが平均可変費用は固定費用 c_0 を表す点と各産出量に対応した費用曲線上の点とを結んだ線分の傾きで表される。

また，産出量と費用との関係の例を表 1.1 に示してある。この例では産出量は 1,2,3,$\cdots$ と整数の値をとり，固定費用は 500 であると仮定されている。産出量が 7 のとき，可変費用 650 を 7 で割って平均可変費用 93 が求まる。また可変費用に固定費用を加えた総費用 1150 を 7 で割って平均費用 164 が求まる。限界費用は産出量が 6 から 7 に増えるときの可変費用（あるいは総費用）の増加分であるから産出量 7 のときの可変費用 650 から産出量 6 のときの可変費用 580 を引いて 70 と求まる[*10]。逆に見ると『ある産出量までの可変費用は各産出量に対する限界費用を加えて求められたものである』と見ることができる。

限界費用とは，この例では 1 単位目の生産に 150 の費用がかかり，2 単位目・3 単位目等の生産にそれぞれ 120，100 等の費用がかかるということを意味しているが，2 単位目の限界費用とは一定の期間に 1 単位だけ生産するような生産体制と比べて 2 単位生産しようとする生産体制ではいくら余計に費用がかかるかを表している。同様に 3 単位目の限界費用は一定の期間に 2 単位だけ生産するような生産体制と比べて 3 単位生産しようとする生産体制ではいくら余計に費用がかかるかを表す。この表の例では限界費用は当初減少し，後に増加すると仮定されている[*11]。

平均可変費用，平均費用も限界費用に遅れて同じような動きをする。各産出量に対する限界費用の和が可変費用であり，その平均が平均可変費用である。また平均費用に含まれる固定費用は産出量の変化によっても変わらないから，平均可変費用，平均費用と限界費用との関係については以下のことが言える。

[*9] すなわち産出量が『実数』で表される場合。この場合産出量変化の最小単位は無限小ということになる。

[*10] この表では産出量を 6 から 7 へ増やしたときの費用の増加分として産出量 7 のときの限界費用を表す。

[*11] 限界費用についてはこのように仮定されることが多い。その根拠は先に説明した規模に関する収穫についての仮定と同様のものであるが，ここでは短期の費用として限界費用を考えているので少し異なる点もある。産出量が少ない間は設備を持て余して生産が効率的に行えないが，産出量の増加に伴って労働の配分の適正化などにより効率的な生産が可能になって費用が低下していく。しかし，産出量が多くなりすぎると設備の利用に無理が生じて費用が大きくなっていく，というような状況が考えられる。

産出量	固定費用	可変費用	総 費 用	平均可変費用	平均費用	限界費用
0	500	0	500	–	–	–
1	500	150	650	150	650	150
2	500	270	770	130	385	120
3	500	370	870	123	290	100
4	500	450	950	113	238	80
5	500	520	1020	104	204	70
6	500	580	1080	97	180	60
7	500	650	1150	93	164	70
8	500	730	1230	91	154	80
9	500	830	1330	92	148	100
10	500	950	1450	95	145	120
11	500	1100	1600	100	145.5	150
12	500	1280	1780	107	148	180
13	500	1490	1990	115	153	210
14	500	1730	2230	124	159	240
15	500	2000	2500	133	167	270

表 1.1　産出量と費用（例）

平均可変費用（平均費用）と限界費用との関係　限界費用が平均可変費用（または平均費用）より小さい間は平均可変費用（または平均費用）は産出量の増加に伴って減少し，限界費用が平均可変費用（または平均費用）より大きくなると平均可変費用（または平均費用）は産出量の増加に伴って増加する。

これは次のように考えるとわかりやすいだろう。10 人の人がいて，その平均年齢が 30 才であるとする。ここに新たにもう一人加わった場合，その人の年齢が 30 才より上であればその人を加えた 11 人の平均年齢は 30 才より高くなり，逆にその人が 30 才より若ければ平均年齢は低くなる。同様に考えると，限界費用は（生産体制に）新たに加えられる産出物にかかる費用であるから，それが平均可変費用（あるいは平均費用）より高ければ平均可変費用（平均費用）は上昇し，低ければ平均可変費用（平均費用）は低下する。

したがって次のこともわかる。

平均可変費用（平均費用）の最低値と限界費用の関係　平均可変費用（または平均費用）が最低となる産出量はその産出量において限界費用と平均可変費用（または平均費用）が等しいかまたは限界費用の方が小さく，1 単位産出量を増やすと限界費用の

方が大きくなる水準である。また，産出量が限りなく分割できる場合には限界費用と平均可変費用（または平均費用）とが等しくなっている産出量で平均可変費用（または平均費用）が最低となる。

以上の議論を簡単な微分計算で確認してみよう。総費用を $C(x)$ とすると，平均費用は $\frac{C(x)}{x}$ と表せる。これを x で微分すると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{C(x)}{x}\right)=\frac{C'(x)x-C(x)}{x^2}$$

が得られる，したがって平均費用が最低となる条件は

$$C'(x)x-C(x)=0$$

すなわち

$$C'(x)=\frac{C(x)}{x}$$

となり，平均費用と限界費用が等しくなることである。$C(x)$ を可変費用と見なせば平均可変費用と限界費用の関係が得られる。

表 1.1 では産出量 8 において平均可変費用が，産出量 10 において平均費用が最低になっている。

図 1.7 に表されている費用曲線の場合には限界費用は一貫して上昇しており，平均可変費用は常に限界費用より小さい。

1.5　競争的企業の供給曲線

この節では完全競争的な市場における企業の供給行動を考える。

1.5.1　完全競争市場と競争的企業

完全競争市場とは次の条件が満たされている市場である。

1. **財の同質性**
   ある産業に属するすべての企業が生産する財は消費者から見てまったく同じものである。したがって以下で述べる取り引き費用がなければ消費者は少しでも安い所から購入しようとするので，ある企業が他の企業より 1 円でも高い価格をつけるとその企業の財はまったく売れなくなる。
2. **情報の完全性**
   財の売り手・買い手が取り引きされる財やサービスの品質，内容，価格について完全な情報を持っている，あるいはその情報を手に入れるために費用はまったくかからない。

3. **取り引き費用がゼロ**
   財やサービスを購入するためにかかる交通費，時間の費用などの余分な費用はないと仮定する，あるいは無視する。
4. **多数の企業・消費者の存在**
   同じ財の売り手・買い手の数がきわめて多く，一人の消費者や一つの企業の取引量が市場全体の取引量と比較して非常に小さい，したがってその消費者や企業が需要や供給を変化させても市場価格には影響を及ぼさない。価格は市場全体の需要と供給が一致するような水準に決まり，各消費者・企業はそれを与えられたものとして受け入れて行動せざるをえない。このように市場価格を与えられたものとして行動する経済主体を**価格受容者** (price taker) と呼ぶ。
   取り引きへの参加者が少ない，特に供給する企業の数が少なく一つの企業の行動が市場価格に影響を与えられるような状況が独占・寡占などの不完全競争である。

このような完全競争市場において財やサービスの供給をする企業が競争的企業である。競争的企業とは企業自身の行動が競争的であるというよりも，その企業が活動している市場の構造が競争的であるということを意味している。

1.5.2　利潤最大化

競争的企業は産出量を選択することによって利潤の最大化を図るのであるが，得られる利潤は産出物の価格によって異なる。企業の利潤は次のように表される。

$$\begin{aligned} \text{利潤} &= \text{収入} - \text{総費用} = (\text{価格} - \text{平均費用}) \times \text{産出量} \\ &= (\text{価格} - \text{平均可変費用}) \times \text{産出量} - \text{固定費用} \end{aligned}$$

表 1.1 の例に表されている費用のもとで価格が 140 のときと 200 のときの企業の収入と利潤を表 1.2 に示す。

価格が 200 のときの利潤は産出量が 12 のとき最大の 620 となる。したがってそのときの最適な産出量は 12 である。産出量 12 に対する限界費用は 180 で価格が限界費用を上回っているが，産出量 13 に対する限界費用は 210 となり逆に限界費用の方が価格より大きくなる。1 単位多く生産すると収入は 1 単位の価格分増加し，費用の方は限界費用分増加する。したがって『価格が限界費用より大きい間は産出量の増加によって利潤が増えるが，限界費用の方が価格より大きくなると産出量の増加によって利潤が減る』ことになる。そのため価格 200 に対しては産出量 12 が利潤を最大にする産出量となる。同様にして価格が 250 になると（表には書いていないが）産出量が 14 のとき最大の利潤 1270 が得られるので最適な産出量は 14 となる。

一方，価格が 140 のときの利潤は産出量が 10 のとき最大の -50 となる。利潤がマイナスになるのは価格が 140 であるのに対して，産出量が 10 のときの平均費用が 145 で価格を上回っているためである。利潤はマイナスで損失が発生しているが，もし生産をやめる

産出量	収入（価格＝140）	利潤（価格＝140）	収入（価格＝200）	利潤（価格＝200）
0	0	−500	0	−500
1	140	−510	200	−450
2	280	−490	400	−370
3	420	−450	600	−270
4	560	−390	800	−150
5	700	−320	1000	−20
6	840	−240	1200	120
7	980	−170	1400	250
8	1120	−110	1600	370
9	1260	−70	1800	470
10	1400	−50	2000	550
11	1540	−60	2200	600
12	1680	−100	2400	620
13	1820	−170	2600	610
14	1960	−270	2800	570
15	2100	−400	3000	500

表 1.2　産出量と収入・利潤（例）

と固定費用だけの損失 −500 が発生することになるので生産を続けた方が損失は少ない。しかし，もし価格が 90 になると最大利潤は産出量が 8 のときの −510 となり固定費用分の損失を上回ってしまうため生産をやめた方がよい。それは価格 90，産出量 8 のとき平均可変費用すなわち 1 単位当たりの可変費用が 91 で価格を上回っているので，販売収入によって固定費用どころか可変費用分も回収できないからである。

以上のことから一般的に次の結論が得られる。

完全競争企業の利潤最大化条件　利潤を最大化しようとする完全競争企業の行動の規準は以下のようである。

1. 利潤が最大となる産出量は，その産出量のときの限界費用が価格より低いかまたは等しく，1 単位産出量を増やすと限界費用が価格を上回るようになる水準である。
2. 価格が平均費用を下回ると損失が発生するが，平均可変費用を上回っていれば損失は固定費用分より小さいので生産を続けるべきである。
3. 価格が平均可変費用の最低水準を下回った場合は，損失の大きさが固定費用を上回るので生産をやめた方がよい。

財の価格と平均費用が等しくなるような産出量を損益分岐点と呼ぶ。財の価格と平均可変費用が等しくなるような産出量を生産中止点と呼ぶ。

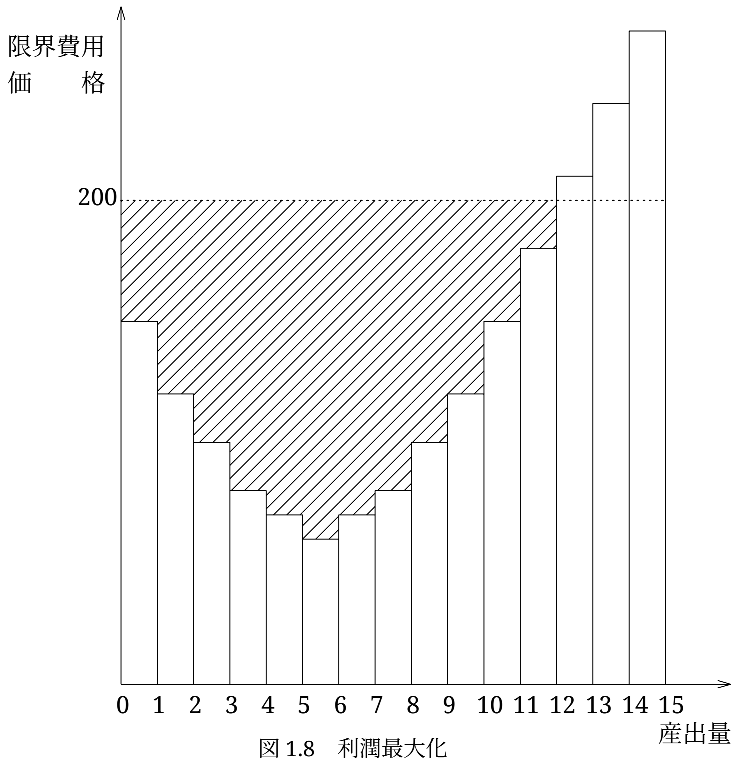


図 1.8　利潤最大化

表 1.1 にもとづいて限界費用と価格との関係を図に表すと図 1.8 のようになる。この図では価格を 200 と仮定している。図の長方形の棒で表されているのが各産出量についての限界費用である。この長方形の幅を 1 とすると，たとえば産出量 12 に対する可変費用は左から 12 個の長方形の面積の和として求められる*12。また収入は価格 200 を表す点線と横軸，それに産出量 12 の縦の線で囲まれた部分の面積である。したがって，（固定費用を除く前の）利潤は価格を表す線と長方形の棒の上の線（辺）の間の面積の産出量 1 から 12 までの，図で斜線を引いた部分の面積に等しい。この図からも産出量が 12 のとき利潤が最も大きくなることがわかる。産出量が 13 になると価格 200 の線より上に出ている限界費用の部分が損失になるため利潤が減ってしまう。

もし産出量がいくらでも細かく分割できるならば，限界費用は図 1.8 の長方形の上の辺を結ぶような形で図 1.9 の MC ようになめらかな曲線で表すことができる*13。同様にして平均可変費用は図の AVC のように描かれる。これらを限界費用曲線，平均可変費用曲線

*12 これは数学の積分と同じ考え方である。

*13 産出量がいくらでも分割できる場合には限界費用は 1 単位産出量を増やしたときの費用の増加ではなく，ごくわずかに産出量を増やしたときの費用の増加と産出量の増加との比（産出量増加 1 単位当りの費用の増加）である。

と呼ぶ[*14]。固定費用を加えた平均費用曲線も同様に描くことができる。平均費用には固定費用も含まれているので，平均費用曲線は 1 単位当たりの固定費用分だけ平均可変費用曲線より上にくる。産出量がいくらでも細かく分割できるならば産出量を調整することによって限界費用をいくらでも価格に近づけることができるので次のような結論を得る。

完全競争企業の利潤最大化条件（産出量が分割可能な場合）　完全競争産業における企業の利潤最大化の条件は，価格と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶことである。

図 1.9 には価格が p^* のとき産出量 x^* が選ばれる様子が描かれている。

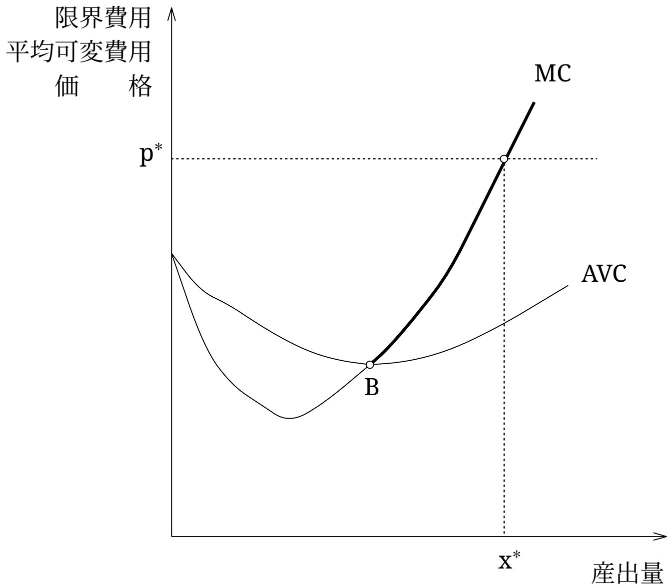


図 1.9　利潤最大化 - 産出量が分割可能な場合

1.5.3　供給曲線

競争的な企業の供給曲線とは，財の価格とそれに対して企業が選択する産出量との関係を表すものである。競争的な企業は価格が限界費用に等しくなるように産出量を決めるから，価格と産出量の関係を表すのは限界費用曲線である。しかし価格が平均可変費用の最低水準を下回ると企業は生産をしなくなるから，供給曲線は限界費用曲線のうち平均可変

[*14] 表 1.1 の平均可変費用を図 1.8 の限界費用と同じように長方形の棒として描き，その上の辺を結んでなめらかにすれば平均可変費用曲線が得られる。平均可変費用曲線が最低になるところで限界費用曲線と平均可変費用曲線が交わっているのは，先に見たように平均可変費用が最低になる産出量で限界費用と平均可変費用が等しくなるからである。平均費用も同様である。

費用曲線の上にある部分になる。図 1.9 で太く描かれている曲線が供給曲線である。それぞれの価格のもとで，ある産業に属するすべての企業の産出量を加えると市場の供給曲線が得られる。

1.5.4　簡単な数式モデル

企業の利潤最大化問題について簡単な数式モデルを考えてみよう。ある競争的な企業の（短期の）費用が次のように表されるとする。

$$C(x) = 3x^2 + 200 \tag{1.1}$$

x は産出量である。200 は固定費用である。単位は円でもドルでもよい。財の価格が 60 であるとするとこの企業の利潤は

$$\pi = 60x - 3x^2 - 200$$

となる。これは x の二次関数であるから，二次関数の最大値を求める手法によって

$$\pi = -3(x - 10)^2 + 100$$

のように変形され，$x = 10$ のとき最大利潤が 100 となる。

この企業の産出量が a（a は 1 以下の正の定数）の単位で変化させられるとして，$x = 10$ における限界費用を求めると，$x = 10 - a$ から $x = 10$ までの変化を考えて，

$$\begin{aligned} MC(10) &= \frac{3(10)^2 + 200 - [3(10-a)^2 + 200]}{a} = \frac{60a - 3a^2}{a} \\ &= 60 - 3a \end{aligned}$$

となる。一方産出量が 10 より a だけ大きい $x = 10 + a$ のときの限界費用は，$x = 10$ と $x = 10 + a$ との間の変化として求められるから

$$\begin{aligned} MC(10+a) &= \frac{3(10+a)^2 + 200 - [3(10)^2 + 200]}{a} = \frac{60a + 3a^2}{a} \\ &= 60 + 3a \end{aligned}$$

となる。$a > 0$ であるから，$x = 10$ のときには限界費用は価格 60 より小さく，a だけ産出量を増やした $x = 10 + a$ では限界費用は価格より大きくなっているので，$x = 10$ が先に求めた利潤最大化の条件を満たしていることがわかる。

a が非常に小さく無視できるほどであれば，$MC(10) = 60$ が得られ*15，$x = 10$ において限界費用と価格が等しくなる。

*15 この計算は微分の定義そのものである。

企業の費用関数を $C(x)$，限界費用関数を $C'(x)$（x は産出量）とするとその利潤は，x^* を企業が選ぶ産出量として

$$\int_0^{x^*}[p^* - C'(x)]dx - f = p^*x - C(x)$$

と積分の形で表すことができる（積分と微分は逆の計算であることに留意）。f は固定費用である。固定費用を差し引く前の利潤 $\int_0^{x^*}[p^* - C'(x)]dx$ は図 1.9 の価格を表す線と限界費用曲線の間の面積に等しい。

1.6 参入・退出と長期の均衡

1.6.1 参入障壁

ある産業において既存の企業には必要ないが新たに参入しようとする企業が負担しなければならない費用が存在するとき，**参入障壁**があるという。その費用の分だけ新たな企業の参入が難しくなっているから，参入障壁とは新しい企業の参入を妨げる要因である。具体的に参入障壁として以下のようなものが考えられる。

1. 政府による規制
   電力・ガス・医療・タクシー・弁護士・酒類の販売などの分野では誰もが自由に営業活動をするというわけにはいかない。政府や地方自治体の許可・免許などを必要とする。最もわかりやすい参入障壁である。
2. 生産技術に関する知識
   財によっては特定の企業が持つ特殊な知識や生産技術がなければ生産できないというものもある。たとえ他の企業がまねをできても**特許**によって守られている場合もある。そのような分野への他の企業の参入は困難である。特許は発明・発見をした企業や個人がその成果を一定期間独占的に利用したり，他の企業が利用する場合には特許料を要求したりできる権利である。特許は一見競争を阻害し産業の発展を妨げるようでもあるが，新しい技術や製品の開発には時間と費用がかかるものであり，開発者がその成果をある程度の期間独占的に利用して開発費用を回収できなければ研究開発そのものが停滞することも考えられる。どの程度特許の期間を認めるかはそれによって確保される開発者の利益と特許を開放することによる産業全体の発展とのバランスを考えて決められるべきものである。
3. 資金調達能力
   新たな事業を興すには資金が必要であるが，銀行などの金融機関が担保や実績のない企業には資金を貸してくれなかったり，借りられたとしても既存の企業より高い金利を支払わなければならないかもしれない。これも参入が妨げられる一因である。

1.6.2　参入と退出

生産する財の価格が平均費用を下回り損失が発生している場合でも平均可変費用よりは高く損失が固定費用より小さければ企業は生産を続けた方がよいが，いつまでも損失を出し続けるわけにはいかない。固定費用とはいっても短期的に変更できないだけであって長期的には生産設備などの固定的な資本も調整が可能であり，すべての費用が可変費用となり平均費用と平均可変費用との区別もなくなる。したがって価格が平均費用を下回る状況が長く続くあるいは続くと見込まれるようだと，一部の企業は生産をやめその産業から撤退してしまうであろう。これを**退出**と呼ぶ。このようにして企業数が減ると財の供給量も減り，市場の供給曲線は左にシフトして均衡価格は上昇する。価格が平均費用に等しい水準になるまで退出が続くと，残った企業の利潤（超過利潤）がちょうどゼロとなりそれ以上の退出は起きない。

一方，逆に既存の企業が正の超過利潤を稼いでいる状況では，特に参入を妨げる要因（上で見た参入障壁）がなければ，利潤の分け前にあずかろうとして新しい企業がその産業に入ってくるものと考えられる。これが**参入**である。新たな企業が参入し生産を始めると財の供給量が増え，供給曲線が右にシフトして財の均衡価格は低下する。退出の場合と同様に価格が平均費用に等しい水準になるまで参入が続くと，企業の利潤（超過利潤）がちょうどゼロとなり，それ以上の参入は利潤がマイナスになってしまうので起きなくなる。

以上のことから，参入障壁がなければ参入と退出のプロセスによって競争的な産業における企業の超過利潤は長期的にはゼロになることがわかる。

1.6.3　長期の均衡

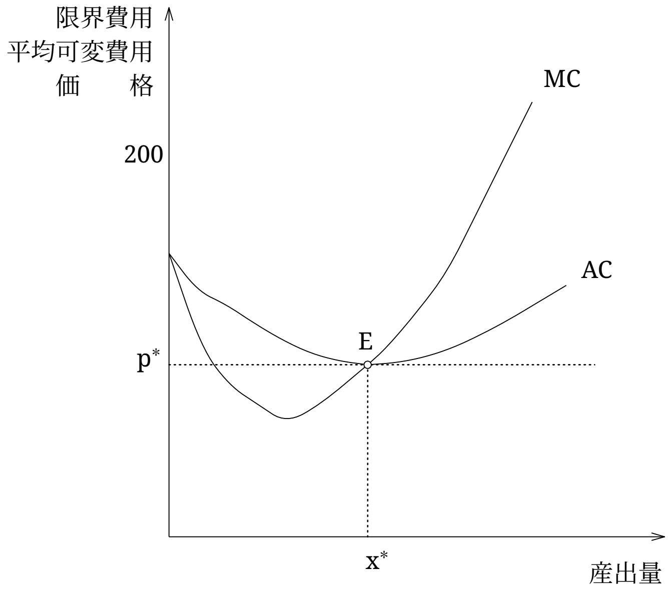


図 1.10　長期の均衡

企業の参入・退出が自由な長期の時間を考えると，どの企業も正常利潤を超える超過利潤を得ることはできなくなる。そのような長期における均衡は，各企業が利潤最大化を目的として価格と限界費用が一致する産出量を選んでいるとともに，その最大化された超過利潤がゼロになっていなければならない。産出量 1 単位当たりの利潤は価格と平均費用の差になるので，長期の均衡では価格は限界費用とともに平均費用にも等しくなければならない。すなわち次の関係が成り立っている。

$$価格 = 限界費用 = 平均費用 \tag{1.2}$$

図 1.10 に長期の均衡における企業の産出量決定の様子が描かれている。点 E が長期の均衡を示す点である。産出量 x^* において価格 p^* が限界費用に一致するとともに平均費用にも一致していて超過利潤がゼロになっている。この図では平均費用曲線は長期の平均費用，すなわち産出量の変化に対して固定的な設備を調整した上での費用を表しているが，点 E に対応した水準の産出量 x^* に相応しい生産設備になっていればその産出量についての短期の（平均）費用と長期の（平均）費用とは等しい。

1.7　消費と生産の効率性

1.7.1　限界代替率と限界費用の比の関係

第 2 章の『交換経済の均衡とパレート効率性』のところで財の交換と消費からなる経済での効率性を検討したが，ここでは生産を含む経済の（パレート）効率性を考えてみよう。消費と生産が効率的であるとは，与えられた生産要素を用いて消費者の効用が最大化されるように各財が生産されているという意味である。上巻第 2 章での議論と同様に，X, Y の 2 財からなる経済においては消費者の効用最大化行動によって各消費者の X 財の限界代替率とその相対価格が等しくなっている[*16]。一方，完全競争のもとにおいては各企業は限界費用が価格と等しくなるような財の産出量を選択している。したがって均衡においては次の式が成り立っている。

$$\begin{aligned} X\,\text{財の限界代替率} &= X\,\text{財の相対価格}\ (= \frac{X\,\text{財の価格}}{Y\,\text{財の価格}}) \\ &= \frac{X\,\text{財の限界費用}}{Y\,\text{財の限界費用}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

すなわち，価格を媒介として

$$X\,\text{財の限界代替率} = \frac{X\,\text{財の限界費用}}{Y\,\text{財の限界費用}} \tag{1.4}$$

という関係が成り立っているわけである[*17]。これが生産を含む競争経済の効率性を示すものである。それを確認してみよう。

まず，(1.4) が満たされず，

$$X\,\text{財の限界代替率} > \frac{X\,\text{財の限界費用}}{Y\,\text{財の限界費用}} \tag{1.5}$$

となっている状況を考える。ここで Y 財の産出量を 1 単位減らして X 財の生産を増やすことを考えよう。外国との貿易は考慮していないので，経済全体での各財の産出量と消費量は等しいから，生産の増加・減少は消費の増加・減少を意味する。Y 財の産出量が 1 単位減ると，その生産に用いられていた生産要素（資本や労働）が解放されるが，その量は『Y 財の限界費用』相当分である。その解放された生産要素を X 財の生産に振り向けたと

[*16] 消費者によって選好が異なるが，それぞれの消費者にとってこの関係が成り立つように財の消費量が選ばれている。相対価格はすべての消費者に共通なので，各消費者が効用最大化している場合には限界代替率もすべての消費者について等しくなっている。しかし財の消費量が等しくなっているわけではない。X 財を好む消費者は X 財を多く消費し，Y 財を好む消費者は Y 財を多く消費している。

[*17] 右辺の $\frac{X\,\text{財の限界費用}}{Y\,\text{財の限界費用}}$ は限界変形率 (marginal rate of transformation)，正確には X 財の Y 財に対する限界変形率と呼ばれる。X 財 1 単位の生産をやめて Y 財を生産したときに何単位生産できるかということを表している。これを X 財を Y 財に変形すると考えるのである。

きに生産可能な X 財の量は，Y 財の限界費用を X 財の限界費用で割った値，すなわち (1.4) の右辺の逆数で表される値になる。X 財の限界費用の方が大きければその値は 1 より小さく，逆の場合は大きい。ここで，X 財の限界代替率の意味を思い出してみよう。X 財の限界代替率とは，『X 財の消費量が 1 単位減少したときに，それによる消費者の効用の低下を補うのに必要な Y 財の消費量の増加』を意味していた。したがって，それは X 財の追加的な 1 単位が消費者にもたらす効用が Y 財何単位分に相当するかを表している。もしその値が 1 より大きければ X 財の追加的な 1 単位が Y 財の追加的な 1 単位より消費者にとってより価値があるということになる[*18]。そうすると，Y 財 1 単位の生産減少による X 財の生産増加が消費者の効用に与える効果を Y 財を基準にして見ると

$$\frac{Y\text{ 財の限界費用}}{X\text{ 財の限界費用}} \times X\text{ 財の限界代替率} \tag{1.6}$$

と表される。(1.5) のもとにおいては (1.6) の値は 1 より大きい。したがって，(1.5) が成り立っている場合には，Y 財 1 単位の生産・消費の減少による X 財の生産・消費の増加によって消費者の効用が増加することがわかる。無差別曲線が凸であれば X 財の消費量の増加，Y 財の消費量の減少は X 財の限界代替率を低下させ，限界費用曲線が右上がり[*19]（産出量の増加によって限界費用が増加する）であれば X 財の生産の増加はその限界費用を増加させ，Y 財の生産の減少はその限界費用を低下させるので，(1.5) の左辺と右辺の差は小さくなっていく。(1.5) の左辺と右辺に差がある限りこのプロセスは続く。

同様にして

$$X\text{ 財の限界代替率} < \frac{X\text{ 財の限界費用}}{Y\text{ 財の限界費用}} \tag{1.7}$$

のときには，逆に X 財の生産・消費の減少による Y 財の生産・消費の増加が消費者の効用を増加させる。やはり，(1.7) の左辺と右辺に差がある限りこのプロセスは続く。

以上のことから，(1.4) が成り立っているときに一定の生産要素を用いて生産可能な X 財と Y 財の消費によって得られる消費者の効用が最大化されることがわかる。これが市場経済における価格メカニズムの効率性を示すものである。

1.7.2　消費と生産の効率性の代数的分析

消費者の場合（上巻第 2 章）と同様に代数的な手法で完全競争経済の均衡が（パレート）効率的であることを示してみよう。財の種類は X，Y の 2 種類，消費者は 2 人（A と B），

[*18] 追加的な 1 単位というのは，そこまでの消費量に対してもう 1 単位加える，あるいはそこから 1 単位減らすことを意味するものであり，そのような変化を経済学では『限界的』(marginal) と呼ぶ。

[*19] 図 1.8 や 1.9 からもわかるように完全競争経済の均衡においては限界費用が産出量に伴って増加していることが必要である。限界費用が産出量に伴って減少するような（限界費用曲線が右下がり）場合には規模の経済が存在することになり後で見る独占や寡占などの不完全競争になる。

企業も 2 つ（1 と 2，2 企業であるが競争的）であるとする。また生産要素も L，K の 2 つを考える。各財の価格を p_x，p_y，生産要素の価格を w，r とし，消費者が保有する生産要素をそれぞれ $\bar{L}_A$，$\bar{K}_A$，$\bar{L}_B$，$\bar{K}_B$ とする。また各企業の生産要素の投入量を L_1，K_1，L_2，K_2 とする。各企業は両財を生産し，各消費者も両財を消費する。均衡における各財の産出量，消費量，生産要素の投入量をそれぞれ X_1^*，Y_1^*，X_2^*，Y_2^*，x_A^*，y_A^*，x_B^*，y_B^*，L_1^*，K_1^*，L_2^*，K_2^* とする。大文字で生産を小文字で消費を表す。これらがパレート効率的でないとすると別の産出量，消費量，生産要素の投入量 X_1，Y_1，X_2，Y_2，x_A，y_A，x_B，y_B，L_1，K_1，L_2，K_2 で消費者 A，B の効用が

$$u(x_A, y_A) > u(x_A^*, y_A^*),\ u(x_B, y_B) \geqq u(x_B^*, y_B^*)$$

または

$$u(x_A, y_A) \geqq u(x_A^*, y_A^*),\ u(x_B, y_B) > u(x_B^*, y_B^*)$$

となる場合がある（ここがポイントである）。上のケースを考える（下のケースも同様である）。均衡および均衡とは異なる上記のケースにおける企業の利潤を次のように表す。

$$\pi_1^* = p_x X_1^* + p_y Y_1^* - wL_1^* - rK_1^*,\ \pi_1 = p_x X_1 + p_y Y_1 - wL_1 - rK_1$$

$$\pi_2^* = p_x X_2^* + p_y Y_2^* - wL_2^* - rK_2^*,\ \pi_2 = p_x X_2 + p_y Y_2 - wL_2 - rK_2$$

利潤は消費者に均等に配分される。利潤の和は

$$\pi_1^* + \pi_2^* = p_x(X_1^* + X_2^*) + p_y(Y_1^* + Y_2^*) - w(L_1^* + L_2^*) - r(K_1^* + K_2^*)$$

$$\pi_1 + \pi_2 = p_x(X_1 + X_2) + p_y(Y_1 + Y_2) - w(L_1 + L_2) - r(K_1 + K_2)$$

となる。財の需給均衡条件は

$$X_1^* + X_2^* = x_A^* + x_B^*,\ Y_1^* + Y_2^* = y_A^* + y_B^*$$

$$X_1 + X_2 = x_A + x_B,\ Y_1 + Y_2 = y_A + y_B$$

であり，生産要素の投入量の合計が消費者の保有量の合計に等しいという条件は

$$L_1^* + L_2^* = \bar{L}_A + \bar{L}_B,\ K_1^* + K_2^* = \bar{K}_A + \bar{K}_B$$

$$L_1 + L_2 = \bar{L}_A + \bar{L}_B,\ K_1 + K_2 = \bar{K}_A + \bar{K}_B$$

と表される。したがって利潤の和は

$$\pi_1^* + \pi_2^* = p_x(x_A^* + x_B^*) + p_y(y_A^* + y_B^*) - w(\bar{L}_A + \bar{L}_B) - r(\bar{K}_A + \bar{K}_B)$$

$$\pi_1 + \pi_2 = p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B) - w(\bar{L}_A + \bar{L}_B) - r(\bar{K}_A + \bar{K}_B) \tag{1.8}$$

となる。企業は与えられた（財と生産要素の）価格のもとで利潤を最大化するように産出量と生産要素の投入量を決めているので次の式が成り立つ。

$$\pi_1^* \geqq \pi_1,\ \pi_2^* \geqq \pi_2 \tag{1.9}$$

したがって

$$\pi_1^* + \pi_2^* \geqq \pi_1 + \pi_2$$

である。x_A，y_A は均衡において消費者 A にとって実現できない消費量である（均衡消費量より効用が大きい）から

$$p_x x_A + p_y y_A > w\bar{L}_A + r\bar{K}_A + \frac{1}{2}(\pi_1^* + \pi_2^*)$$

$$p_x x_B + p_y y_B \geqq w\bar{L}_B + r\bar{K}_B + \frac{1}{2}(\pi_1^* + \pi_2^*)$$

が成り立つ（消費者 B も均衡消費量において最大の効用を実現している）。(1.9) より

$$p_x x_A + p_y y_A > w\bar{L}_A + r\bar{K}_A + \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$$

$$p_x x_B + p_y y_B \geqq w\bar{L}_B + r\bar{K}_B + \frac{1}{2}(\pi_1 + \pi_2)$$

が得られる。この 2 式を足し合わせると

$$p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B) > w(\bar{L}_A + \bar{L}_B) + r(\bar{K}_A + \bar{K}_A) + \pi_1 + \pi_2$$

となる。ここに (1.8) を代入すると

$$p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B) > p_x(x_A + x_B) + p_y(y_A + y_B)$$

となるが，左辺と右辺は同じものであるから矛盾である。したがって均衡はパレート効率的である。この議論は財がいくつあっても，消費者が何人いても，また企業が何社あっても成り立つ。

■パレート効率性の条件　微分を用いてパレート効率性の条件を考えてみよう。消費者は二人，財は X，Y の二財とし，話を簡単にするために財は消費者が共同で労働のみで生産しているものとする。X，Y の産出量は二人の消費量の和に等しいのでそれぞれ $x_A + x_B$，$y_A + y_B$ であり，X，Y の生産に用いられる労働の投入量を L_x，L_y によって表す。労働投入量によって財の産出量が決まるので，その関係（つまり生産関数）を $x_A + x_B = f(L_x)$，$y_A + y_B = g(L_y)$ と表す。労働の投入量の合計は一定なのでそれを $\bar{L}$ とすると $L_x + L_y = \bar{L}$ が成り立つ。これらの式から

$$x_B = f(L_x) - x_A,\ y_B = g(\bar{L} - L_x) - y_A$$

が得られる。したがって二人の効用の加重和は次のように表される。

$$U = \alpha u_A(x_A, y_A) + (1-\alpha)u_B(f(L_x) - x_A, g(\bar{L} - L_x) - y_A)$$

これを x_A，y_A と L_x で微分して 0 とおくと

$$\alpha\frac{\partial u_A}{\partial x_A} - (1-\alpha)\frac{\partial u_B}{\partial x_B} = 0$$

$$\alpha\frac{\partial u_A}{\partial y_A} - (1-\alpha)\frac{\partial u_B}{\partial y_B} = 0$$

$$\frac{\partial u_B}{\partial x_B}f' - \frac{\partial u_B}{\partial y_B}g' = 0$$

上巻第 2 章での議論と同様に上の 2 つの式から二人の消費者の限界代替率（X の Y に対する限界代替率）が等しいという条件が得られる。それは次のように表される。

$$\frac{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}{\frac{\partial u_A}{\partial y_A}} = \frac{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}}$$

下の式からは

$$\frac{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}} = \frac{g'}{f'}$$

を得る。f'，g' はそれぞれ X，Y の限界生産力と見ることができる。すなわち労働投入を 1 単位増やした時の各財の増加量を表す。したがってそれぞれの逆数が限界費用に等しいから

$$\text{消費者の限界代替率} = \frac{X\text{ の限界費用}}{Y\text{ の限界費用}}$$

という関係が得られる。

1.8　消費者余剰と生産者余剰

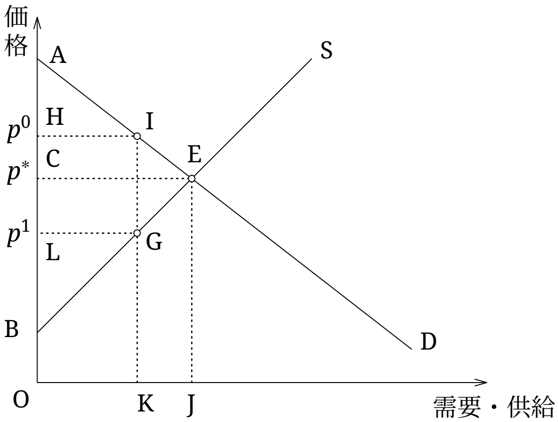


図 1.11　消費者余剰と生産者余剰

図 1.11 に，ある財の需要曲線と供給曲線が描かれている。均衡価格は p^* である。このとき消費者や生産者が得る利益はどのようにして測られるであろうか。図で三角形 ACE の面積を**消費者余剰**，三角形 CBE の面積を**生産者余剰**と呼ぶ[*20]。

消費者余剰は**需要曲線と均衡価格を表す直線との間の部分の面積**，である。需要曲線が右下がりであることからもわかるように消費者は価格が低くなると需要を増やし高くなると減らすが，これは消費する財の消費者にとっての価値が，消費量が少ないときの方が大きいことを意味するものと考えられる。言い換えれば最初に消費する 1 単位目の財の価値は大きく，2 単位目，3 単位目と増えていくにつれてその価値が低下していくわけである。とは言っても 2 単位目，3 単位目の財が 1 単位目の財と異なっているわけではない。1 単位消費した上にもう 1 単位消費するとその価値，正確には消費者が得る効用を貨幣で測ったものは最初の 1 単位目の消費から得られる効用と比べて低い，さらにもう 1 単位消費して得られる効用はさらに低いということである[*21]。消費者はその財を消費する最後の単

[*20] この図では需要・供給曲線が直線で描かれているので文字どおり三角形になっているが，一般的には需要・供給曲線は直線ではないので三角形にはならない。その場合でも需要曲線が縦軸と交わる点を A として線分 AC，CE と需要曲線で囲まれた部分の面積を消費者余剰と呼ぶ。同様に，供給曲線が縦軸と交わる点を B として線分 CB，CE と供給曲線で囲まれた部分の面積を生産者余剰と呼ぶ。

[*21] これは**限界効用逓減の法則**と呼ばれる。しかし，この概念は基数的効用にもとづいているので現在ではあまり使われず，代わりに序数的効用にもとづいた**限界代替率逓減の法則**が用いられている。ここで考えているのは消費者の効用を貨幣で測った価値であるから，（貨幣で測った）限界効用とは財と貨幣との限界代替率と見ることができる。貨幣と言っても紙幣や硬貨などの『お金』の意味ではない。貨幣そのものは消費者に効用を与えるわけではないの

位の（貨幣で測った）価値が価格に相当するところまで消費する。財の各単位の消費者にとっての価値を表すのが需要曲線 D である。1 単位目の消費は点 A に対応した価値があり，消費者はその 1 単位目の財には OA の金額を支払ってもよいと考える。同様に点 K に対応した財の消費には p^0 支払ってもよいと思い，点 J に対応した財の消費には p^* 支払ってもよいと思う。財の消費者にとっての価値，すなわち支払ってもよいと思う額を合計すると台形 AOJE の面積になる。これは OJ の消費量に対して消費者が支払ってもよいと考える最大の金額を表しているから，その消費から得られる消費者の効用を貨幣で測ったものを表していると見なされる。消費者余剰はこの台形 AOJE の面積から実際に消費者が支払う金額である長方形 COJE の面積を引いたものになっている。支払ってもよいと考える金額から実際に支払う金額を引いた残りなので**余剰**と呼ばれる。これは消費から得られる効用の貨幣価値と支払う金額の差に等しい。

> ここで実際に支払う金額を引く理由は以下の通りである。政府の政策やその他何らかの事情によってある財（X 財とする）の消費量が変化すればその財の消費から得られる人々の効用も変化する。それが「支払ってもよいと考える金額」の変化に表れる。一方 X 財の価格が変化すると一定の消費量を実現するために必要な支出額が変る。価格が上がれば支出は増えるが，所得が変らない限りそれによって他の財に対する支出額が減り，それらの価格が変っていなければ消費量が減って効用が下がる。X 財の価格が下がった場合には逆の変化が起きる。したがって X 財の消費に「実際に支払う金額」の変化は他の財の消費から得られる効用に影響する。「支払ってもよいと考える金額」と「実際に支払う金額」とは消費者の効用に逆の影響を与えるので，前者から後者を引くことによって上で説明した 2 つの効用の変化を消費者余剰の変化によって表すことができる。

一方生産者余剰は，**均衡価格を表す直線と供給曲線との間の部分の面積**である。供給曲線が企業の限界費用を表していることを考えれば，生産者余剰は企業の収入である長方形 COJE の面積から可変費用の合計である台形 BOJE の面積を引いたものであり，企業の利潤に相当するものである。正確には利潤と固定費用の和である。固定費用は供給曲線には表されていない。消費者余剰と生産者余剰とを合わせたもの，すなわち三角形 ABE の面積は**総余剰**と呼ばれ，この財の市場についての社会的厚生を表すものと見なされる。固定費用は社会的厚生に含まれるべきものではないが短期的には一定であるから政策の効果を分析するときなどには問題にならない。生産者余剰が総余剰に含まれることについては，消費者は労働者であるばかりでなく資本家でもあり企業の利潤も国民の所得に含まれ，その所得によって財の消費をすることができるから生産者余剰も社会的厚生に含まれるべきものであると考えることができる。政策の変化などによって生産者余剰すなわち利潤に変

で，ここで貨幣というのはそれで購入可能な財一般を指している。その意味では貨幣ではなく『購買力』あるいは『所得』と呼んだ方がよいかもしれない。

化があれば，所得が変化し消費者の消費も影響を受ける。ただし，ある特定の財の需要曲線は消費者の所得が一定であるとの仮定のもとに描かれているので消費者余剰の定義においては生産者余剰の変化による消費の変化は考慮されていない。また財の価格変化がもたらす所得効果も無視されている。しかし，消費される財の種類がたくさんあって 1 つの財が消費者の予算に占める割合が小さければ生産者余剰の変化や所得効果による消費の変化は小さくなるであろう。

もし何らかの理由で（たとえば政府の規制によって）この財の価格が p^* から p^0 に上昇し，需要の減少によって消費量が OK になったと考えてみよう。消費者余剰は三角形 AHI の面積になり，生産者余剰は台形 HBGI の面積になる。生産者余剰は増えるが消費者余剰がその増加分以上に減り，総余剰は台形 ABGI の面積になって価格が p^* のときより三角形 IGE の面積だけ小さくなる。同様に価格が p^* より低い p^1 になると供給が減ってやはり消費が OK まで減る。この場合は生産者余剰が三角形 LBG に，消費者余剰が台形 ALGI になり，総余剰は三角形 IGE の面積の分だけ小さくなる。したがって総余剰は均衡価格において最大となることがわかる。これは競争経済における消費と生産の効率性を示すものである。

■生産者余剰と消費者余剰–少し数学的な取扱い　競争的な企業の利潤は次のように表される。

$$\pi = px - c(x) - f$$

p は財の価格，x は産出量，$c(x)$ は固定費用を除く費用すなわち可変費用，定数 f は固定費用である。各企業は p を与えられたものとして利潤を最大化すべく x を決める。その条件はこの式を微分して 0 とおくことによって

$$p - c'(x) = 0$$

となる。$c'(x)$ は限界費用である。p が変化するとそれに応じて限界費用が p に等しくなるように x を決めるから，限界費用曲線が企業の供給曲線となる。供給曲線が右上がりなのは限界費用曲線が右上がりであるという仮定を反映している。各々の価格の値に対して各企業の供給を合わせたものが市場全体の供給を表す。各企業について価格と限界費用曲線の間の部分の面積は次のようになる。

$$\int_0^{x^*} (p - c'(x))dx = [px - c(x)]_0^{x^*} = px^* - c(x^*),\ c(0) = 0 \text{ とする}$$

x^* は実際に選んでいる産出量である。$c'(x)$ は $c(x)$ を微分して得られたものであるから $c'(x)$ を積分すると $c(x)$ になる。この式は各企業の利潤に固定費用を加えたものに等しい。これが各企業の生産者余剰であり，それをすべての企業について合計したものが市場全体の生産者余剰である。市場の供給曲線は市場全体の産出量に対応した企業の限界費用を表しているので，価格と供給曲線の間の面積が市場全体の生産者余剰を表す。貿易政策

などの経済政策が及ぼす短期的な効果を考えるのであれば固定費用は一定と考えられるので生産者余剰の変化は政策の効果を表す 1 つの指標になる。

次に消費者余剰を考える。財を X 財とそれ以外に分類し，それ以外の財（Y 財と呼ぶことにする）はまとめて考えその価格は 1 であるとして（財の消費量の単位を適当にとればよい），消費者の効用と予算制約式が次のように表されるものとする。

$$u(x,y),\ px+y=m$$

x は X 財の消費量，p はその価格，y は Y 財の消費量，定数 m は消費者の所得である。各消費者にとっては m は与えられたものである。$px+y=m$ より $y=m-px$ として効用関数に代入すると

$$u(x,m-px)$$

と x だけの式で表される。これを x で微分して 0 とおくと

$$u_x-pu_y=0$$

となる。u_x，u_y は X 財，Y 財の限界効用である。この式から

$$\frac{u_x}{u_y}=p$$

が得られる。これは X 財の Y 財に対する限界代替率が相対価格に等しいことを意味するものである。ここでさらに u_y が一定で 1 に等しいものと仮定すると

$$u_x=p$$

が得られる。これは効用関数を $u(x,y)=u(x)+y$ と仮定して計算した結果 $u'(x)=p$ と同じであり，X 財の限界効用がその価格に等しいことを意味する。効用は序数的効用であるから効用や限界効用の値そのものには意味がなく限界代替率のような相対的な比較に意味がある。Y 財の限界効用 u_y が 1 で一定であると仮定すると $u'($ あるいは $u_x)$，$u(x)$ は Y 財 1 単位の効用を基準とした X 財の限界効用，効用を意味することになる。Y 財の価格を 1 と仮定しているから，この Y 財は事実上お金（貨幣あるいは所得）を表している。すなわち u'，$u(x)$ はお金を単位として表現した X 財の限界効用，効用である。

消費者の需要曲線は価格と需要との対応関係を表したものであるが，その価格が限界効用に等しくなるように消費量すなわち需要を決めるというのがこの式の意味することである。したがって個人の需要曲線は消費量と限界効用の対応関係を表していることがわかる。市場の需要曲線は各価格における個々の需要を合計したものであるから市場全体の需要と消費者の限界効用の対応を表す。需要曲線と価格の間の部分の面積は次のようになる。

$$\int_0^{x^*}(u'(x)-p)dx=[u(x)-px]_0^{x^*}=u(x^*)-px^*,\ u(0)=0\text{ とする}$$

x^* は実際に選んでいる消費量である。$u'(x)$（または $u_x(x)$）は $u(x)$ を微分して得られたものであるから $u'(x)$ を積分すると $u(x)$ になる。この式は各消費者の効用から X 財への支払い額を引いたものに等しい。これが各消費者の X 財についての消費者余剰であり，それをすべての消費者について合計したものが市場全体の消費者余剰である。

生産者余剰と消費者余剰を足し合わせると

$$u(x^*) - px^* + px^* - c(x^*) = u(x^*) - c(x^*)$$

となり，X 財の消費から得られる効用とその生産費用の差に等しくなる。ここでは x^*, $u(x^*)$，$c(x^*)$ は経済全体での産出量（=消費量），消費者の効用，可変費用を表している。これが総余剰と呼ばれるものであり，社会的厚生を表現していると考えられる。

ある政策によって消費者余剰が増えれば社会的厚生が高まるのはもちろんであるが，生産者余剰の増加も消費者の所得の増加をもたらし X 財またはそれ以外の財の消費量を増やすので社会的厚生の増加につながる。

物品税と死重的損失

ある財の価格を p として需要関数を

$$D = 400 - 4p$$

供給関数を

$$S = 4p - 160$$

とする。それぞれ

$$p = -\frac{1}{4}D + 100$$

$$p = \frac{1}{4}S + 40$$

と書ける。需要と供給が等しい均衡における価格は 70，そのときの取引量は 120 である。需要曲線・供給曲線を図に描くと，価格 70 を表す水平線とそれぞれの間の面積で表される消費者余剰，生産者余剰はどちらも 1800 である。ここで 1 単位当たり 10 の物品税が課されたとすると供給関数は

$$S = 4(p - 10) - 160 = 4p - 200$$

あるいは

$$p = \frac{1}{4}S + 50$$

となる。新しい供給曲線はもとの供給曲線が上に 10（物品税の分）平行移動した形になっている。均衡における価格は 75，そのときの取引量は 100 である。新たな供給曲線を用

いて上と同様に消費者余剰，生産者余剰を求めるとともに 1250 となる。税収はもとの供給曲線と新しい供給曲線との間の部分の内，供給量が 0 から 100 までの平行四辺形の面積で表され，その値は 1000 に等しい。消費者余剰，生産者余剰と合わせた総余剰（税収は何らかの方法で国民に還元されるので総余剰に含まれる）は 3500 であり，課税前の総余剰より 100 小さい。この 100 を**死重的損失** (deadweight loss) と呼ぶ。図 1.12 で表せばもとの均衡 E(120, 70)，新たな均衡 F(100, 75) および 1 単位当たりの企業の収入（価格 – 物品税）に対応した H(100, 65) の 3 点からなる三角形の面積に等しい。死重的損失は取引量が競争的な均衡における 120 に満たないことによって引き起こされる。税収を表すのは平行四辺形 BCHF である。消費者余剰と生産者余剰の合計は，課税前は三角形 ACE，課税後は三角形 ABF で表される。

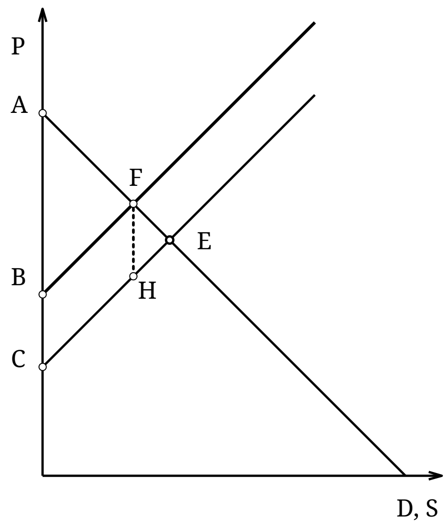


図 1.12　物品税と死重的損失

1.9　独占企業の行動

　ここまでは完全競争市場における企業の行動を考えてきたが，この節では独占企業の行動について検討する。**独占** (monopoly) とはある財の市場においてその財を供給する企業が一つしかない状況を指し，そのただ一つの企業を**独占企業**と呼ぶ。産業が独占的になる理由としては，先に述べた政府による規制や特殊な生産技術あるいは特許などの参入障壁によって新しい企業の参入が妨げられている場合とともに，規模の経済性によって産業が独占的になることも考えられる。規模の経済性とは生産規模の拡大に伴って限界費用や平均費用が低下していくという現象であるが，産出量が小さいうちは費用が高く，かなりの

生産規模に至るまで規模の経済性が働いて費用が下がっていくような場合には，2 社以上の企業が市場を分け合うと需要が十分でないために両方の企業の利潤がマイナスになるということも起こりうる。そのような状況ではただ 1 社だけが正の利潤を稼いで活動することができる。このように特に規制がなくても独占になってしまうような産業は自然独占と呼ばれる。電力など大規模な設備を必要とする産業に見られると考えられる現象である。

競争的な企業の場合は，市場全体に占めるその企業の供給量の割合が小さく価格に影響を与えるような行動ができないと仮定されていた。しかし，独占企業の場合にはその企業自身の供給量がすなわち市場の供給となるため，その行動が財の価格に影響を与えることは避けられず，また企業自身がその影響を考慮に入れて行動せざるをえない。したがって独占企業は競争的な企業とは異なった行動原理に従うものと考えられる。

1.9.1　限界収入

独占企業の供給量は市場全体の供給に等しいから需要曲線がわかれば独占企業は供給量を決めることによって価格を決めることができる。独占企業が供給量を増やしそれを消費者に買ってもらえるようにするには価格を引き下げなければならない。その際すべての消費者に同じ価格で販売しなければならないので，追加的に供給する財の価格を下げるだけではなく供給量全体の価格を下げる必要がある。

供給量 1 単位の増加による収入の増加を**限界収入** (marginal revenue) と呼ぶ。上で述べたことから限界収入は

$$\begin{aligned}\text{限界収入} =& \text{供給量の増加による収入の増加}\\ &- \text{価格の低下による収入の減少}\end{aligned}$$

と表されることがわかる。需要の価格弾力性が小さい財の場合，価格の変化に対する需要の反応が小さいので，供給の増加に見合った需要の増加を生み出すのに必要な価格の引き下げ幅が大きくなり限界収入は小さくなる。場合によっては限界収入がマイナスになることもありうる。

表 1.3 には表 1.1 と同じ費用構造をもつ独占企業について財の需要曲線が

$$p = 320 - 10x, \qquad p\ \text{は価格},\ x\ \text{は供給量} \tag{1.10}$$

で表される場合の収入，限界収入，利潤の例が示されている[*22]。産出量 10 に対する限界収入は産出量 10 のときの収入 2200 から産出量 9 のときの収入 2070 を引いて 130 となる。産出量 10 に対する価格（すなわち消費者に 10 単位買ってもらえる価格）は 220 であるが，それまでの 9 単位の価格が 230 から 220 に下がるので収入が 90 減少するため限界収入は 130 になるわけである。競争的な企業の場合は供給量の増加に伴う価格の低下を考慮する必要がない（あるいは意味がない）ので限界収入は価格に等しい。

[*22] この式は価格を需要の関数として表しているので逆需要関数と呼ばれることもある。

産出量	価格	収入	総 費 用	限界収入	限界費用	利潤
0	320	0	500	–	–	–500
1	310	310	650	310	150	–340
2	300	600	770	290	120	–170
3	290	870	870	270	100	0
4	280	1120	950	250	80	130
5	270	1350	1020	230	70	330
6	260	1560	1080	210	60	480
7	250	1750	1150	190	70	600
8	240	1920	1230	170	80	690
9	230	2070	1330	150	100	740
10	220	2200	1450	130	120	750
11	210	2310	1600	110	150	710
12	200	2400	1780	90	180	620
13	190	2470	1990	70	210	480
14	180	2520	2230	50	240	290
15	170	2550	2500	30	270	50

表 1.3　独占企業の利潤最大化

1.9.2　独占企業の利潤最大化

利潤は収入から費用を引いたものであるから 1 単位産出量を増加させたときの独占企業の利潤の変化は次のように表される。

$$
\begin{aligned}
\text{利潤の変化} =& \text{産出量の増加による収入の増加} \\
& - \text{産出量の増加による費用の増加} \\
=& \text{限界収入} - \text{限界費用}
\end{aligned}
$$

したがって限界収入が限界費用より大きい間は産出量の増加によって利潤が増えるが，限界費用が限界収入より大きくなると産出量の増加によって利潤は減る。その境目のところで利潤が最も大きくなる。

表 1.3 では産出量 10 のとき利潤が最大の 750 となる。この産出量 10 に対する限界収入は 130 でそのときの限界費用 120 を上回っているが，1 単位多い産出量 11 については限界収入 110，限界費用 150 で限界費用の方が 40 大きくなり利潤も 40 減少する。一般的には次のことが言える。

独占企業の利潤最大化条件　独占企業にとって利潤が最大となる産出量はその産出量のときの限界費用が限界収入より低いかまたは等しく，1 単位産出量を増やすと限界費用が限界収入を上回るようになる水準である。

これは競争的な企業の利潤最大化条件において価格のところが限界収入に置き換わった形になっている。上で述べたように競争的な企業の場合には価格と限界収入とが等しくなっているわけである。

産出量が分割可能な場合には限界費用が限界収入にいくらでも近くなるように産出量を選ぶことができるので独占企業の利潤最大化の条件は以下のようになる[*23]。

独占企業の利潤最大化条件（産出量が分割可能な場合）　産出量が分割可能な場合には独占企業は限界費用と限界収入が等しくなるように産出量を選ぶことによって利潤を最大化する。

これは図 1.13 のように表される。図の MR は限界収入を表す曲線（限界収入曲線）である。点 E が独占企業の利潤を最大化する点を表し，そのときの産出量は x_m で示されている。表 1.3 からわかるように各産出量に対して限界収入はそのときの価格より低いので MR は需要曲線より下に位置している。点 E で限界収入曲線と限界費用曲線が交わっている。点 A はこの産出量に対応する需要曲線上の点でありそのときの価格 p_m が独占企業がつける価格（『独占価格』と呼ぶ）である。

[*23] 産出量がいくらでも分割できる場合には限界収入は 1 単位供給を増やしたときの収入の増加ではなく，ごくわずかに供給を増やしたときの収入の増加と供給の増加との比（供給増加 1 単位当りの収入の増加）である。

1.9.3　独占と完全競争との比較

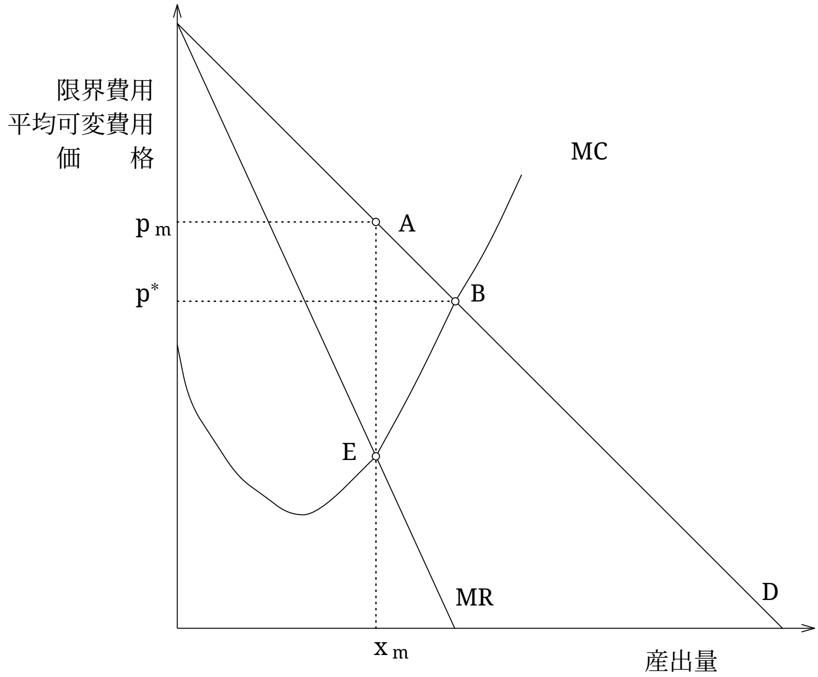


図 1.13　独占企業の利潤最大化 - 産出量が分割可能な場合

表 1.3 で完全競争的な企業の行動を考えると価格が限界費用に等しい産出量，あるいは価格が限界費用を上回る最も大きな産出量を選ぶことになるので選ばれる産出量は 12 である。これは独占企業が選ぶ産出量 10 より大きくそのときの価格は低い。したがって独占企業の行動は競争的な企業と比べて消費者の効用を低くすることがわかる。図 1.13 の点 B に対応した産出量が企業が完全競争的な場合に選ばれる産出量であり，そのときの価格は p^* である。

1.9.4　簡単な数式モデル

独占企業の利潤最大化問題について簡単な数式モデルを考えてみよう。ある独占企業の費用が次のように表されるとする。

$$C(x) = 4x^2 + 300 \tag{1.11}$$

x は産出量である。300 は固定費用である。財の需要は，価格を p として以下のような線形（一次関数）の需要関数で表されるものとする。

$$p = 180 - 2x \tag{1.12}$$

x は需要を表す。財の価格は独占企業の産出量と需要が等しくなるように決まるので産出量，需要ともに x で表すことができる。すると利潤は

$$\pi = (180 - 2x)x - 4x^2 - 300 = -6x^2 + 180x - 300$$

となる。これは x の二次関数であるから

$$\pi = -6(x - 15)^2 + 1050$$

のように変形され，$x = 15$ のとき最大利潤が 1050 となる。

この企業の産出量が a（a は 1 以下の正の定数）の単位で変化させられるとして，$x = 15$ における限界費用を求めると，$x = 15 - a$ から $x = 15$ までの変化を考えて，

$$\begin{aligned} MC(15) =& \frac{4(15)^2 + 300 - [4(15 - a)^2 + 300]}{a} = \frac{120a - 4a^2}{a} \\ =& 120 - 4a \end{aligned}$$

となる。一方産出量が 15 より a だけ大きい $x = 15 + a$ のときの限界費用は $x = 15$ と $x = 15 + a$ との間の変化として求められるから

$$\begin{aligned} MC(15 + a) &= \frac{4(15 + a)^2 + 300 - [4(15)^2 + 300]}{a} = \frac{120a + 4a^2}{a} \\ &= 120 + 4a \end{aligned}$$

が得られる。同様にして限界収入を求めてみよう。企業の収入を R で表すと

$$R = \text{価格} \times \text{産出量} = (180 - 2x)x$$

である。$x = 15$ における限界収入は，$x = 15 - a$ から $x = 15$ までの変化を考えて

$$\begin{aligned} MR(15) &= \frac{15(180 - 30) - (15 - a)(180 - 30 + 2a)}{a} = \frac{120a + 2a^2}{a} \\ &= 120 + 2a \end{aligned}$$

となる。一方産出量が 15 より a だけ大きい $x = 15 + a$ のときの限界収入は，$x = 15$ と $x = 15 + a$ との間の変化で求められるから

$$\begin{aligned} MR(15 + a) &= \frac{(15 + a)(180 - 30 - 2a) - 15(180 - 30)}{a} = \frac{120a - 2a^2}{a} \\ &= 120 - 2a \end{aligned}$$

$a > 0$ であるから，$x = 15$ のときには限界費用は限界収入より小さく，a だけ産出量を増やした $x = 15 + a$ では限界費用が限界収入より大きくなっているので，$x = 15$ が先に求めた利潤最大化の条件を満たしていることがわかる。これは以下のようにして確認できる。

$$MC(15) = 120 - 4a < 120 + 2a = MR(15)$$
$$MC(15 + a) = 120 + 4a > 120 - 2a = MR(15 + a)$$

a が非常に小さい値であれば，$MC(15) = MR(15) = 120$ が得られ $x = 15$ において限界費用と限界収入とが等しくなる。

1.9.5　需要独占

通常，独占とは供給する側が独占的であることを言うが，需要側が独占であるという可能性もある。たとえばある機械の部品を生産する企業がたくさんあって競争的に活動し，その部品を購入して製品を作るメーカーが独占的であるような場合である。簡単な数値例で考えてみよう。部品の価格を p，メーカーの産出量を x，また産出量と部品使用の割合を 1:1，製品の価格をとりあえず 120 とし，部品生産の供給関数（このメーカーに部品を供給する企業の合計で）が

$$p = 20 + 2x \text{（メーカーの産出量と部品の使用量は等しい）}$$

であるとすると，メーカーの利潤は

$$\pi = 120x - (20 + 2x)x = 100x - 2x^2$$

となる。したがってこのメーカーの利潤を最大化する産出量 (=) 部品の需要は 25 である。このときメーカーの限界費用は

$$20 + 4x = 120$$

で製品の価格に等しい（製品市場では独占であるとは仮定されずメーカーにとって製品価格を一定としているので)。しかしこのときの部品の価格は 70 であり限界費用とは等しくない。もし部品市場も競争的であればメーカーにとって部品の価格は一定となる（120 とする）ので産出量 (=) 部品の需要は 50 となるはずである。

1.10　製品差別化と独占的競争

この節では完全競争と比べてより現実的なモデルと見なされる，製品差別化された財を生産する独占的競争のモデルについて考える。

1.10.1　製品差別化

これまでは一つの産業に属する企業はすべてまったく同じ製品，すなわち同質的な製品を生産すると仮定してきた。同質的であるとは消費者から見てまったく区別できない，また区別する意味がないということである。しかしさまざまな企業が生産する財が同じ種類の財であっても消費者から見てまったく同じではないというものが多いのではないかと考えられる。マヨネーズについて考えると Q 社のマヨネーズと A 社のマヨネーズとでは味が少し違っていて，Q 社のものを好む人もいれば A 社の製品の方がよいと思う人もいるであろうし，ビールについても K 社の L ビールを好む人もいれば A 社の SD ビールが好きな人もいるであろう。このように同種の製品ではあるが消費者から見て少し違っている，具体的には味（食品，飲料品の場合），色調やデザイン（洋服や家具など），機能（性能の差ではなく含まれている，あるいは重点がおかれている機能の違い，テレビ，電子レンジ，電話機等）などの面で異なった製品を生産することを**製品差別化** (product differentiation) と呼ぶ。自動車について考えてみても同じ排気量の車であってもデザインの違いなどによってさまざまな消費者の好みに合わせようとしているから，やはり差別化された製品である。ほとんどの消費財が製品差別化されていると言えるかもしれない。

一般に製品差別化というのは，高級品と普及品のように品質に差のある製品が生産されていることではなく消費者の好みの違いに応じてタイプの異なる製品が生産されていることを指すが，消費者の所得の違いに対応して品質とそれに応じて価格が異なる製品が生産されている場合も**垂直的製品差別化**と呼んでこれに含めることもある。その場合消費者の好みに合わせた製品差別化は**水平的製品差別化**と呼ばれる。

1.10.2　独占的競争

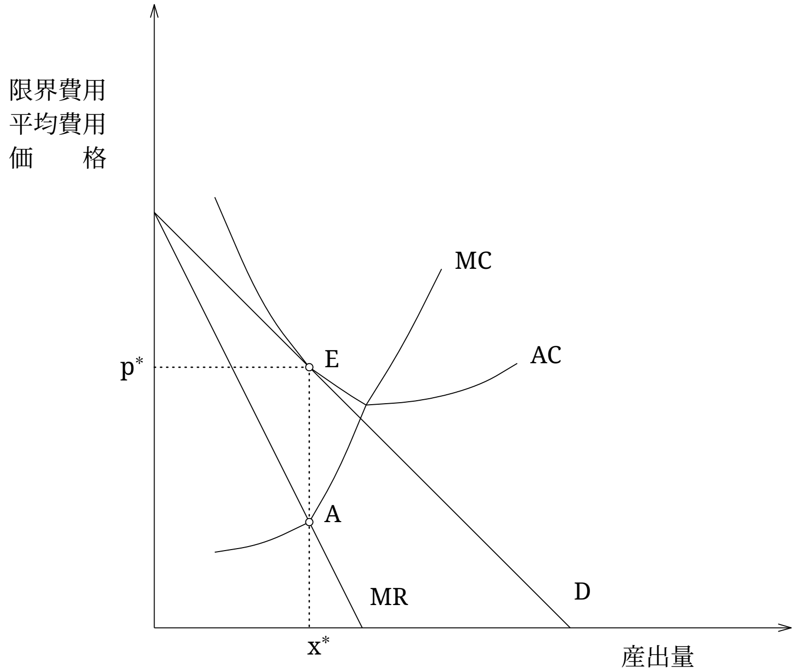


図 1.14　独占的競争

企業の数は完全競争と同様に多数であり，また参入・退出も自由であるが，各企業が差別化された財を生産しているような産業の状態を**独占的競争** (monopolistic competition) と呼ぶ[*24]。完全競争ではすべての企業が同質的な財を生産していたために，ある企業が他の企業より少しでも高い価格をつけると需要をすべて失うことになり市場で決まる価格に従わざるをえないが，差別化された製品を生産している場合には，それぞれの製品についてそれを好む消費者がいるので他の企業より少し高い価格をつけたからといってすべての顧客を失うわけではない。消費者によって特定の製品に対する好みの強さにも差があり，少しの価格差で他の企業の製品に乗換える人もいれば，かなりの価格差があっても購入する製品を変えない人もいるであろう。したがって，各企業が生産する財に対する需要は価格の上昇（低下）によって徐々に減少（増加）する。すなわち，独占的競争産業における企業は独占企業と同様に右下がりの需要曲線のもとで生産を行うことになる。したがっ

[*24] 「独占的競争」という言葉は参入・退出が自由で利潤がゼロとなるケースを指すことが多いが，そうでない場合でも製品差別化（通常は水平的製品差別化）された財を生産する寡占（次節以降で説明する）を表すのに用いられることもある。

て，産出量を少し増やしてそれをすべて売ろうとすると価格を下げなければならず，独占の場合と同様に限界収入は価格より小さくなる。参入・退出が自由なので企業は正の超過利潤を稼ぐことはできない。

独占的競争産業の均衡は図 1.14 のように描かれる。企業は限界収入と限界費用が等しくなる点 A に対応した産出量 x* を選んでいるが，その産出量において企業の需要曲線と平均費用曲線とが点 E で接しているため価格と平均費用が等しくなっていて企業の超過利潤はゼロである。x* 以外の産出量では平均費用の方が価格（価格は需要曲線によって表されている）より大きいので利潤はマイナスになっており x* においてのみ利潤はゼロである。均衡において平均費用曲線と需要曲線とが接するということは，その点において平均費用曲線が右下がり（産出量の増加に伴って平均費用が下がる）になっていなければならない。すなわち独占的競争の均衡にはある程度の規模の経済性が必要である。規模の経済性の度合いに応じて参入できる企業の数も変わる。規模の経済性の度合いが小さければ一つ一つの企業の産出量は小さくなり多くの企業が参入可能となるが，規模の経済性の度合いが大きければあまり多くの企業が参入できなくなる。

1.11　クールノーの寡占モデル

1.11.1　クールノーモデル - 同質財の場合

独占的競争では完全競争と同様に多くの企業が差別化された財を生産している産業を考えた。独占ではないが企業数が少ない産業は**寡占** (oligopoly) と呼ばれる。寡占には同質的な財を生産している場合と，差別化された財を生産している場合がある[*25]。ここでは 2 つの企業が同質的な財を生産する最も簡単なケースを考えよう。企業数が 2 つの寡占は特に複占 (duopoly) と呼ばれることがある。具体的に企業 A と企業 B が，ある同じ財を生産しているとする。その財の需要は以下のような需要関数で表されると仮定する。

$$p = 20 - X \tag{1.13}$$

p はこの財の価格，X は需要である。企業 A と企業 B の産出量をそれぞれ x と y で表すと市場均衡においては $X = x + y$ となっていなければならない。各企業が産出量を決めるとそれに応じて価格が決まる。企業 A，B の費用関数は同一であり，$c(x) = 2x$ および $c(y) = 2y$ で表されるものとする。したがって各企業について限界費用も平均費用（および平均可変費用も）も一定で 2 に等しく，固定費用はない。企業 A の利潤は

$$\pi_A = px - 2x = (20 - x - y)x - 2x \tag{1.14}$$

[*25] 企業数が多い少ないは程度問題であり前注で述べたように差別化された財を生産する寡占を独占的競争と呼ぶこともある。

同様に企業 B の利潤は

$$\pi_B = py - 2y = (20 - x - y)y - 2y \tag{1.15}$$

と表される。ここで，企業 A，企業 B は以下に述べる**クールノーの仮定**に従った行動をとるものとする。

クールノーの仮定 企業 A(または B) は，企業 B(または A) の産出量を与えられたものとして，あるいは企業 B(または A) の産出量は変化しないものと考えて，自分の利潤が最も大きくなるように産出量 x(または y) を決める。

すると (1.14) の企業 A の利潤は，y を一定として

$$\begin{aligned}\pi_A &= (20 - x - y)x - 2x = -x^2 + (18 - y)x \\ &= -[x - (9 - \frac{1}{2}y)]^2 + (9 - \frac{1}{2}y)^2\end{aligned}$$

と変形でき，二次関数の最大値を求める手法によって企業 A の利潤を最大化する x は次の式を満たすことがわかる。

$$x = 9 - \frac{1}{2}y \tag{1.16}$$

この式は，企業 B が選んだ（あるいは選ぶであろう）産出量 y に対応して企業 A は (1.16) より求められる産出量を選ぶということを意味する。同様の計算で企業 B について

$$y = 9 - \frac{1}{2}x \tag{1.17}$$

が得られる。(1.16) は企業 A の，(1.17) は企業 B の**反応関数** (reaction function) と呼ばれる。均衡においては両企業の産出量が利潤最大化の条件を満たしていなければならないから，(1.16)，(1.17) の両方の式が成り立っていなければならない。したがってこれらを連立一次方程式として解くと各企業の産出量が次のように求まる。

$$x = y = 6 \tag{1.18}$$

このようにして求められた寡占の均衡は**クールノー均衡**と呼ばれる。クールノー均衡の考え方はゲーム理論のナッシュ均衡と基本的に同じなので，ナッシュ・クールノー（あるいはクールノー・ナッシュ）均衡とも呼ばれる。(1.13) より財の均衡価格は $p = 20 - 12 = 8$ となり，企業 A，B の利潤は 36 と求まる。この例では両企業の費用関数が同一なので均衡において選ばれる産出量も等しいが，費用関数が企業によって異なっている場合はそうはならない。

寡占のモデルは図で表すこともできる。図 1.15 の RA，RB はそれぞれ企業 A，B の反応関数 (1.16) と (1.17) を図示したものであり，**反応曲線** (reaction curve) と呼ばれる。図では直線になっているが，これは需要関数も費用関数も一次式であるためで一般的には直線

になるとは限らない。均衡においては両企業が反応関数（曲線）にもとづいて産出量を選んでいるので，RA と RB の交点 C がクールノー均衡を表す。

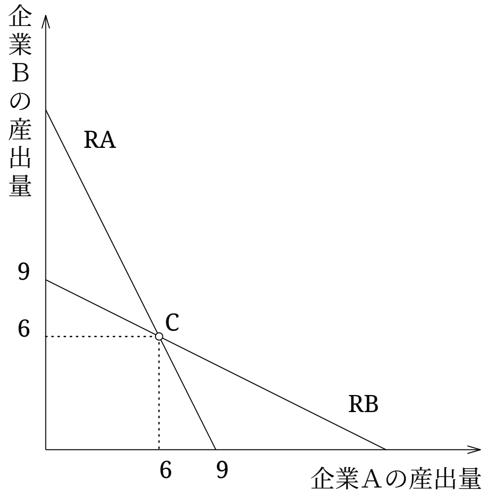


図 1.15　クールノーの寡占モデル

1.11.2　クールノーモデル - 企業数が 3 以上の場合

企業数が 3 以上の場合のクールノーモデルも複占と同じように考えることができる。ごく一般的に表してみよう。企業数を n（正の整数），各企業を i で表しその産出量を x_i，合計の産出量を X，価格を p とする。また需要関数（逆需要関数）を

$$p = p(X)$$

企業 i の費用関数を

$$c(x_i)$$

とし，費用関数はすべての企業に共通であるとする。固定費用は $c(0)$ と表すことができる。企業 i の利潤は

$$\pi_i = p(X)x_i - c(x_i)$$

であるから，利潤最大化の条件は

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial x_i} = p + x_i p'(X) - c'(x_i) = 0$$

となる。$c'(x_i)$ は限界費用であり，$p'(X)$ は需要曲線の傾きを表す。各企業は自分以外の企業の産出量を与えられたものとして利潤を最大化するので x_i の変化は X の変化に等しく，単純に $p(X)$ を微分すればよい。具体的に $p = 10 - X$，$c(x_i) = x_i^2 + 2$ とし，すべての

企業について費用関数が同一なので均衡における産出量も等しいことを考慮すれば利潤最大化条件は

$$10-(n+1)x_i-2x_i=0$$

となり，

$$x_i=\frac{10}{n+3}$$

が得られる。このとき価格は $p=\frac{30}{n+3}$ に等しく，各企業の利潤は

$$\pi_i=\frac{200}{(n+3)^2}-2$$

に等しい。企業の参入が自由であるとすれば利潤が負でない限り新しい企業が参入するので

$$\frac{200}{(n+3)^2}-2\geqq 0$$

から，$n=7$ となるまで企業が参入することがわかる。

1.11.3　クールノーモデル - 差別化された財を生産する場合

2 つの企業が差別化された財を生産するケースを考える。企業を A，B，それぞれの産出量を x_A，x_B，各財の価格を p_A，p_B とする。差別化された財なので価格が異なる可能性がある。それぞれの（逆）需要関数を

$$p_A=12-x_A-kx_B$$

$$p_B=12-x_B-kx_A$$

とする。k は $-1<k<1$ を満たす定数であり，k が 1 に近づいたときの極限が同質財の場合に対応する。k が正の場合は両企業の財が代替的であることを，負の場合は補完的であることを意味する。簡単化のために費用をゼロとする。企業 A の利潤は

$$\pi_A=(12-x_A-kx_B)x_A$$

となり，利潤を最大化する産出量は

$$x_A=6-\frac{k}{2}x_B$$

を満たす。同様に

$$x_B=6-\frac{k}{2}x_A$$

を得る。これらが反応関数である。k の符号によって傾きが異なる。これらから均衡産出量

$$x_A=x_B=\frac{12}{2+k}$$

が求まる。また，そのときの価格は

$$p_A = p_B = \frac{12}{2+k}$$

となる。

1.11.4　独占的競争の簡単なモデル

モデルの構造は企業数が 3 以上の場合のクールノーモデルと似ている。n 社の企業が互いに差別化された財を生産し，各企業の需要関数は次のようであるとする。

$$p_i = a - b\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j - x_i$$

p_i は価格，x_i は産出量である。$\sum_{j=1,j\neq i}^{n} x_j$ は i 以外の企業の産出量の和に等しい。$a > 0$, $b (0 < b < 1)$ は定数。n は定数ではなく企業の利潤がゼロになるという条件によって決まる。各企業の費用関数を次のように仮定する（c，f は正の数）。

$$c_i = cx_i + f$$

c は一定の限界費用，f は固定費用である。そうすると各企業の利潤は次のように表される。

$$\pi_i = \left(a - b\sum_{j=1, j\neq i}^{n} x_j - x_i\right)x_i - cx_i - f$$

すべての企業の産出量が等しいとすると利潤最大化の条件

$$a - [(n-1)b + 2]x_i - c = 0$$

によって

$$x_i = \frac{a-c}{(n-1)b+2}$$

を得る。価格は

$$p_i = a - [(n-1)b+1]x_i = \frac{a - [(n-1)b+1]c}{(n-1)b+2}$$

である。そのとき企業の利潤は

$$\pi_i = \left[\frac{a-c}{(n-1)b+2}\right]^2 - f = x_i^2 - f$$

を満たす。これがゼロに等しいとすると

$$x_i = \sqrt{f}$$

が得られる。$p_i - c = x_i$ なので

$$p_i = \sqrt{f} + c$$

である。一方各企業の平均費用 AC_i は次のように表される。

$$AC_i = c + \frac{f}{x_i}$$

x_i を横軸にとって描いた平均費用曲線の傾きは

$$\frac{dAC_i}{dx_i} = -\frac{f}{x_i^2}$$

に等しい。ここに $x_i = \sqrt{f}$ を代入すると

$$\frac{dAC_i}{dx_i} = -1$$

が得られるが，これは（他の企業の産出量を一定と仮定した）各企業の需要曲線の傾きに等しい。すなわち各企業が最大化した利潤がゼロとなるまで企業が参入した均衡においては需要曲線と平均費用曲線は接しているから（利潤がゼロであることよりこれらは交わり，さらに傾きが等しい），このモデルは図 1.14 に描かれている独占的競争の均衡を表現していると考えられる。

1.12　シュタッケルベルク均衡

　クールノーの複占モデルでは両企業ともに相手の産出量が一定であると見なすと仮定していた。もし一方の企業が相手の反応を読んでいた場合にはどうなるであろうか。企業 A が企業 B の反応を計算に入れて自らの産出量を（企業 B より）先に決め，企業 B は企業 A の決定を見てから決めるものとする。企業 A，企業 B の産出量を x，y，価格を p（同質財を考える），費用関数を $c(x) = 2x$ および $c(y) = 2y$ として，需要が

$$p = 20 - x - y$$

で表されるとすると，企業 B の反応関数は上で求めたように

$$y = 9 - \frac{1}{2}x$$

となる（企業 B は企業 A の産出量を与えられたものとして行動する）。企業 A はこれを計算に入れるのでその利潤は

$$\pi_A = [20 - x - (9 - \frac{1}{2}x)]x - 2x = 9x - \frac{1}{2}x^2$$

となるから，利潤を最大化する産出量は $x = 9$ となり，企業 B の産出量は 4.5 である。このとき企業 A，B の利潤はそれぞれ 40.5，20.25 となる。

このようなモデルはシュタッケルベルクのモデルと呼ばれ，その均衡をシュタッケルベルク均衡と言う。また企業 A をリーダー (leader)，企業 B をフォローワー (follower) と呼ぶ。シュタッケルベルク均衡はゲーム理論における部分ゲーム完全均衡の一種である。

1.13　ベルトランモデル

1.13.1　ベルトラン均衡 - 同質財を生産する場合

クールノーのモデルでは各企業が産出量を決めると考えたが，価格を決める場合はどうなるだろうか[*26]。同質財を生産する複占で企業 A，B の限界費用（平均費用も）は 2 であり（固定費用はない），需要が

$$p = 20 - x - y$$

で表される場合を考える。まず企業 A，B がともに価格を 8 にしていたとすると（産出量は等しいものと仮定する）両企業の利潤は 36 である。ここで企業 A が価格を 7 に下げると，同質財であるからすべての消費者が企業 A の財を買うことになり企業 A の販売量は 13，利潤は 65 に増える。したがってクールノーモデルの均衡は企業が価格を選ぶベルトランモデルでは均衡とならない。もちろんこのとき企業 B の販売量，利潤は 0 である。それに対抗して企業 B が価格を 6 に下げるとすべての消費者が企業 B の財を買うことになり企業の販売量は 14，利潤は 56 になる。そのとき企業 A の販売量，利潤は 0 である。それに対抗して企業 A が価格を 4 に下げると販売量は 16，利潤は 32 になる，$\cdots$ と考えていくと価格が 2 より高い限り各企業は相手よりもわずかに低い価格をつけてすべての消費者を奪いそれまでよりも大きな利潤を得ることができる。ともに価格が 2 になると両企業の利潤は 0 になる。それ以上に価格を下げると売れば売るだけ損をすることになるし，自分だけが価格を上げると誰も買ってくれない。したがってともに価格 2 をつけ利潤が 0 になる状態が均衡となる。この均衡はベルトラン均衡と呼ばれる。このような競争行動を考えれば企業数がわずかに 2 であっても完全競争と同様の均衡が実現するのである。このベルトラン均衡もクールノー均衡と同様にゲーム理論のナッシュ均衡の一種である。

1.13.2　同質財で費用関数が二次関数の場合のベルトラン均衡

企業 A，B の産出量を x，y，財の価格を p_A，p_B とし，p_A，p_B の内小さい方を p として逆需要関数が

$$p = 1 - x - y$$

で，各企業の費用が $\frac{1}{2}x^2$，$\frac{1}{2}y^2$ であるとする．企業は価格を決め，消費者は安い方の企業の財を購入する．両企業が同じ価格を提示したときは $\frac{1}{2}$ ずつの消費者が各企業の財を買

[*26] 企業が決める変数を「戦略変数」と呼ぶ。クールノーのモデルでは産出量が戦略変数であり，ここで考えるベルトランのモデルでは価格が戦略変数である。

う．企業 A が独占の場合は $p_A = \frac{1}{3}$ のときに利潤が 0 になり（そのとき $p_B > p_A$ である，企業 B が独占の場合も同様），それより大きければ利潤は正，小さければ負である．

$(1 - p_A)p_A - \frac{1}{2}(1 - p_A)^2 \geqq 0$ より $p_A \geqq \frac{1}{3}$ となる．

両企業が生産をする複占の場合は $p_A = p_B = \frac{1}{5}$ のときに利潤が 0 になり，それより大きければ利潤は正，小さければ負である．

$p = p_A = p_B$ として $\frac{1-p}{2}p - \frac{(1-p)^2}{8} \geqq 0$ より $p \geqq \frac{1}{5}$ を得る．

また，$p = \frac{3}{7}$ のときに独占と複占の利潤が等しくなり，それより大きければ独占の方が，小さければ複占の方が利潤が大きい．

$(1 - p)p - \frac{1}{2}(1 - p)^2 \geqq \frac{1-p}{2}p - \frac{(1-p)^2}{8}$ より $p \geqq \frac{3}{7}$ が得られる．

このモデルにおいて均衡は以下のようになる．

$p = p_A = p_B$ で $\frac{1}{5} \leqq p \leqq \frac{3}{7}$.

そのとき独占より複占の方が利潤が大きい（かあるいは等しい）ので，ある企業が価格を下げて独占にしても利潤は増えず（$\frac{1}{3}$ より低い価格をつけて独占にすると利潤は負になる）．もちろん上げれば利潤は 0 になる．$\frac{1}{5}$ より価格を下げて独占にしてももちろん利潤は負になるが，両企業が $\frac{1}{5}$ より低い価格をつけると，両企業ともに利潤が負になるのでそのような均衡はない（価格を上げれば利潤は 0）．一方 $\frac{3}{7}$ より高い価格をつける独占においても複占においても，一つの企業（独占の場合はもう一方の企業）がその価格よりわずかに低く $\frac{3}{7}$ よりは高い価格をつけることによって利潤を増やすことができるので均衡にはならない．

均衡において $\frac{1}{5} < p \leqq \frac{3}{7}$ のときには企業は正の利潤を得る．そのとき価格を下げて独占にしても得にならないので限界費用が一定の場合と同様のメカニズムが働かない．

1.13.3　ベルトラン均衡 - 差別化された財を生産する場合

上記のクールノーモデルと同様に 2 つの企業が差別化された財を生産するケースを考える。企業を A，B，それぞれの産出量および需要を x_A，x_B，各財の価格を p_A，p_B とする。差別化された財なので価格が異なる可能性がある。それぞれの（逆）需要関数を

$$p_A = 12 - x_A - kx_B$$

$$p_B = 12 - x_B - kx_A$$

と仮定する。$-1 < k < 1$ である。この両式から

$$x_A = \frac{1}{1 - k^2}[12(1 - k) - p_A + kp_B]$$

$$x_B = \frac{1}{1-k^2}[12(1-k) - p_B + kp_A]$$

が得られる。これらが需要関数である。簡単化のために費用をゼロとする。企業 A の利潤は

$$\pi_A = \frac{1}{1-k^2}[12(1-k) - p_A + kp_B]p_A$$

となる。各企業は相手の価格を与えられたものとして自らの利潤が最大となるようにその価格を決めるから，利潤を最大化する価格は

$$p_A = 6(1-k) + \frac{1}{2}kp_B$$

を満たす。同様に

$$p_B = 6(1-k) + \frac{1}{2}kp_A$$

を得る。これらが反応関数である。したがって均衡価格

$$p_A = p_B = \frac{12(1-k)}{2-k}$$

が求まる。$0 < k < 1$ または $-1 < k < 0$ のとき，この価格は差別化された財を生産するクールノー均衡における価格よりは低いが[*27]，同質財のベルトラン均衡（費用がゼロなので価格もゼロになる）の価格よりは高い[*28]。企業間で費用が異なれば通常は均衡価格も異なる（演習問題 24 参照）。

k に数字を入れてクールノーモデルを含めて計算の練習をしてみていただきたい。たとえば

$$p_A = 24 - 2x_A - x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B - x_A$$

あるいは

$$p_A = 24 - 2x_A + x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + x_A$$

などで。

---

*27

$$\frac{12}{2+k} - \frac{12(1-k)}{2-k} = \frac{12k^2}{(2+k)(2-k)} > 0$$

*28 $k = 1$ に近づいた極限が同質財の場合である。

1.14　寡占と独占，完全競争との比較

上で見た同質財を生産するクールノー均衡の例において企業 A，B のいずれかが生産をやめ残った企業が独占になったとすると，産出量や価格はどうなるかを考えてみよう。独占企業の場合，その企業の産出量が市場の需要，供給に等しくなるからそれを X で表すと利潤は

$$\pi_m = (20 - X)X - 2X \tag{1.19}$$

となり，利潤を最大にする産出量は $X = 9$ となる。これは寡占の場合の一企業の産出量よりは大きいが，両企業の産出量の合計より小さい。また均衡価格は 11，独占企業の利潤は 81 となる。

一方企業 A，B が完全競争的に行動したとすると，価格と限界費用とが等しくなるように産出量を選ぶから，各企業の産出量は 9 で合計 18，価格は 2 となる。また各企業の利潤はゼロである。

したがって，寡占における企業の行動は独占よりは競争的だが，完全競争よりは独占に近く，価格や合計の産出量も両者の間の値をとることがわかる。

1.15　価格差別

ここまでは企業が財の価格を決める際，買い手によって異なる価格をつけるということは想定せず，すべての買い手に同じ価格で販売すると仮定してきたし，今後も基本的にそうであるが，状況によっては，特に独占企業の場合買い手を区別し異なる価格をつけることによってより大きい利潤を得ることができる場合もある。それを価格差別と呼ぶが，価格差別にはいくつかの種類がある。

1.15.1　第 1 種価格差別

企業が 1 人 1 人の買い手を区別し，それぞれに異なる価格をつけることを第 1 種価格差別と呼ぶ。ある商品について企業が望む最低価格（限界費用・平均費用に等しい価格）が 1000 円であり，1 つずつ買う可能性がある 5 人の買い手が最大限払ってもよいと思う価格（効用を貨幣で表した値，留保価格と呼ぶ）がそれぞれ，2000 円，1600 円，1300 円，1000 円，800 円であるとする。企業が 1 人 1 人と交渉して価格を決めることができれば，最初の 4 人までにそれぞれ 2000 円，1600 円，1300 円，1000 円の価格で販売し 1900 円の利潤を得られるが消費者余剰はゼロとなる。5 人目には売らない。このように第 1 種価格差別が可能な場合は消費者余剰に相当する金額も企業が得ることになるが，供給量は競争的な場合と同じになる。

企業が各消費者の留保価格（効用の値）を知っていることが必要であるが，独占企業で

あって競争相手がいないことと買い手の間で転売できないことも条件である。転売できれば競争相手がいるのと同じことになる。同じ費用の別の企業が存在すれば，その企業は最初の 3 人までにそれぞれ 1900 円，1500 円，1200 円で売って 1600 円の利潤が得られる。そうすると最初の企業も値下げをする。というようにして結局すべてが 1000 円で販売されることになる。

1 人 1 つではなくいくつも買う場合でも同じ人が購入する 1 つ目，2 つ目，...，とそれぞれ払ってもよいと思う価格（限界効用を貨幣で表した値）をつけられれば消費者余剰をすべて企業が奪い取ることができる。これも第 1 種価格差別である。

現実には企業が消費者の効用，留保価格を知ることが困難であるので異なる方法として以下で述べる第 2 種価格差別，第 3 種価格差別がある。

1.15.2 第 2 種価格差別

第 2 種価格差別は買い手の購入量に応じて事実上異なる価格で販売することである。ある会の会員にならないと商品が購入できないようにし，購入量に関わらず入会金や会費を徴収した上でさらに購入量に応じた料金をとるようなシステムがこれに相当する。例を考えてみよう。逆需要関数が

$$p = 120 - x,\ p\ は価格,\ x\ は需要$$

で一定の限界費用が 20 であるとき。

1. 通常の独占のモデルで利潤を最大化する価格を決めると $p = 70$，$x = 50$ で利潤は 2500。このとき消費者余剰は $\frac{1}{2}(120 - 70) \times 50 = 1250$ で総余剰（利潤と消費者余剰の和）は 3750。
2. 価格を 20 とすると需要は $x = 100$ になり，消費者余剰は $\frac{1}{2}(120 - 20) \times 100 = 5000$ であるから，企業はこの 5000 までの固定料金を課すことができる。固定料金があれば購入量が少ないほど単価は高い。固定料金に関わらず総余剰は 5000 で変わらないが，固定料金によって企業と消費者の負担が異なる。

このような料金体系は「二部料金制」と呼ばれる。通常の独占モデルよりも二部料金制の方が総余剰が大きい。電力，ガスなど固定費用が大きく，かつ独占的地位にある企業があまり販売を減らさずに固定費用を回収する料金体系として用いている。

1.15.3 第 3 種価格差別

需要関数が異なる消費者のグループが存在する場合にグループによって異なる価格で販売するのが第 3 種価格差別である。男性と女性，学生とそれ以外，ある年齢以上と以下に消費者をグループ分けして異なる価格をつけるようなことが考えられる。やはり独占で転売できない（またはできても面倒）ことが条件となる。2 つのグループを A，B としてそ

れぞれのグループに販売する価格を p_A，p_B，需要を x_A，x_B として次のような逆需要関数を仮定する。

$$p_A = 24 - x_A,\ p_B = 32 - 2x_B$$

コストを 0 とすると企業が各グループへの販売から得る利潤は

$$\pi_A = (24 - x_A)x_A,\ \pi_B = (32 - 2x_B)x_B$$

となり，それぞれ利潤を最大化するときの価格と供給量は

$$p_A = 12,\ p_B = 16,\ x_A = 12,\ x_B = 8$$

であり，合計の利潤は 272 である。

もし 2 つのグループの消費者に対して同じ価格で販売しなければいけないとすると，その価格を p としてぞれぞれのグループの需要は次のように表される。

$$x_A = 24 - p,\ x_B = \frac{32 - p}{2}$$

合計の需要を x とすると $x = 40 - \frac{3}{2}p$ より利潤は

$$\pi = (40 - \frac{3}{2}p)p$$

となり，利潤を最大化する価格は $p = \frac{40}{3}$，そのときの供給量は 20，利潤は $\frac{800}{3} < 272$ であるから異なる価格をつけた場合の方が利潤が大きい。

1.16　屈折需要曲線

■屈折需要曲線　寡占理論において価格の硬直性を説明する理論である。差別化された寡占を考える。各企業は，自分が現行価格から値上げをしても（あるいは産出量を減らした結果価格が上がっても）相手はそれに追随して価格を引き上げたり，産出量を減らしたりしないが，値下げをしたら（あるいは産出量を増やした結果価格が下がったら）それに対抗して相手も値下げをしたり，産出量を増やしてくるであろうと予測する。単純な寡占モデルではない。このとき現行価格を境に自分の財に対する需要関数（需要曲線）の形が異なる。2 企業 A と B を考えそれぞれの産出量を q_A，q_B，価格を p_A，p_B として現行価格以上（現行産出量以下）では次のような逆需要関数であるとする。

$$p_A = a - q_A - \frac{1}{2}q_B,\ p_B = a - q_B - \frac{1}{2}q_A$$

各企業の費用は $\frac{1}{2}c_A^2$，$\frac{1}{2}c_B^2$，したがって限界費用は c_A，c_B で，$c_A = c_B$ であるとする。各企業は相手の産出量を与えられたものとして自分の産出量を決める（自分の産出量を減ら

すと相手の価格も少し上がる)。このとき各企業の限界収入（これがポイント）は（A の場合は p_Aq_A を p_A で微分，B も同様）

$$MR_A = a - 2q_A - \frac{1}{2}q_B,\ MR_B = a - 2q_B - \frac{1}{2}q_A$$

となる。

ここで現行の産出量を $\bar{q}_A$，$\bar{q}_B$ で表すことにする。現行価格以下（現行産出量以上）では企業 A は B の産出量が

$$q_B = \bar{q}_B + \frac{1}{2}(q_A - \bar{q}_A)$$

に基づいて決められると予想し，同様に企業 B は A の産出量が

$$q_A = \bar{q}_A + \frac{1}{2}(q_B - \bar{q}_B)$$

に基づいて決められると予想するものと仮定する。すなわち，自分が産出量を増やせば相手も増やしてくると予想する。そのとき逆需要関数は次のようになる。

$$p_A = a - q_A - \frac{1}{2}[\bar{q}_B + \frac{1}{2}(q_A - \bar{q}_A)] = a - \frac{5}{4}q_A - \frac{1}{2}\bar{q}_B + \frac{1}{4}\bar{q}_A$$

$q_A = \bar{q}_A$，$q_B = \bar{q}_B$ であれば両方の逆需要関数は同じになるので現行産出量において需要曲線はつながっている。しかし傾きが現行産出量以下では -1，現行産出量以上では $-\frac{5}{4}$ であるから，現行産出量の点で折れ曲がった（屈折した）形になる。企業 B の逆需要関数も同様に表せる。現行産出量以上での企業 A の限界収入は

$$MR'_A = a - \frac{5}{2}q_A - \frac{1}{2}\bar{q}_B + \frac{1}{4}\bar{q}_A$$

となり，$q_A = \bar{q}_A$ において $MR_A > MR'_A$ となるので限界収入曲線は現行産出量においてつながっておらず不連続になる。もし限界費用が現行産出量の所で MR_A と MR'_A の間の値をとれば（$a - 2\bar{q}_A > c_A > a - \frac{5}{2}\bar{q}_A$）現行産出量が最適な（利潤を最大化する）産出量となるが，限界費用が変化してもその状況が変わらず最適な産出量が変化しない可能性がある。そのとき価格も変化しない。これが価格の硬直性である。通常の寡占モデルでは限界費用が変化すればそれに応じて産出量，価格も変化する。

図 1.16 でどれが需要曲線でどれが限界収入曲線かはわかるであろう。C で需要曲線が屈折している。微妙だが。点 A と B の間を限界費用曲線（c_A）が通っている限り産出量，価格（C の水準）は変化しない。

このように屈折需要曲線の理論は経済の状況が少々変わっても財の価格がすぐには変化しないという現象の説明に有用であるが，現行の価格や産出量がどのような根拠で決まっているのかという点は問題にしない。

いささか古い理論だが最近でも公務員試験や経済学検定試験などでは出題されているようだ。

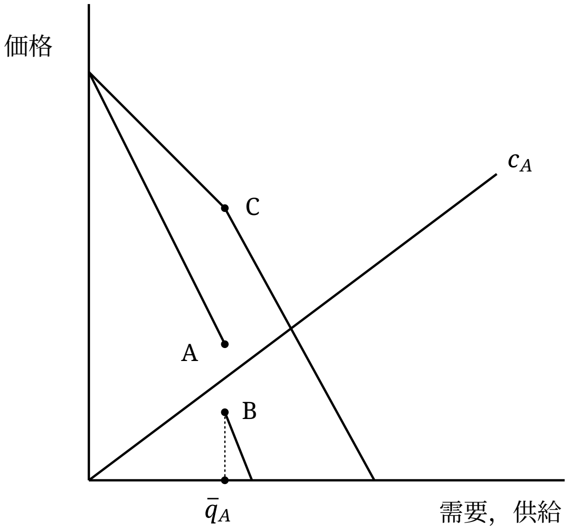


図 1.16　屈折需要曲線

■ラーナーの独占度　独占において $\frac{p-c'}{p}$ をラーナーの独占度（「マークアップアップ率」と呼んでいる本もある）と言う（c' は限界費用）。

$$p\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)=c'$$

より

$$\text{ラーナーの独占度}=\frac{1}{\varepsilon}$$

である（ε は需要の価格弾力性の逆数）。

1.17　外部性，外部経済・外部不経済

企業の利潤や消費者の効用が他の企業や消費者の活動によって影響を受ける場合外部性が存在すると言う。よく取り上げられる例として畑で花を栽培する業者とその近くで蜜蜂を飼う養蜂業者との関係がある。蜜蜂が花の蜜を吸ってくることによってより多くの蜂蜜が生産できるが，この花は養蜂業社が栽培しているのではないから費用はかからないので産出量が増えた分だけ利潤が増える。このように他の企業の活動がある企業の生産，利潤を増加させる場合外部経済が存在すると言う。逆の例としては水質汚染などの公害が上げられることが多い。ある川の下流から水を取ってジュースを作っている企業があり，その川の上流では化学肥料を生産する企業があって汚染した排水を川に流しているとする。下流のジュース会社では汚染した水を浄化しなければ商品になるジュースが作れず余計な費用がかかるが，本来これはジュース会社自身の責任ではない。このように他の企業の活動

がある企業の生産，利潤を減少させたり費用を増大させる場合，外部不経済が存在すると言う。簡単な数値例を考えてみよう。X 財を生産する競争的な企業 A があり財の価格は 100，費用関数は産出量を x として

$$c_A = x^2$$

で表される。一方 Y 財を生産する競争的な企業があって財の価格は 90，費用関数は産出量を y として

$$c_B = 2y^2 + xy$$

であるとする。すなわち企業 A の産出量が増えれば（Y 財の産出量を一定として）企業 B の費用が増えるような外部不経済が存在する。このとき企業 A の利潤は

$$\pi_A = 100x - x^2$$

となるから利潤を最大化する産出量は 50 である。それを前提にすると企業 B の利潤は

$$\pi_B = 90y - 2y^2 - 50y$$

となるので利潤を最大化する産出量は 10 である。しかし，社会全体にとって本来企業 A の生産に伴う費用は x^2 だけではなく xy も含まれるものと考えなければならない。企業 A，B を合わせた利潤は

$$\pi = 100x + 90y - x^2 - 2y^2 - xy$$

である。これが最大化されるように x，y を決めるとすると（ここは偏微分を使う）

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = 100 - 2x - y = 0 \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial y} = 90 - 4y - x = 0 \tag{1.21}$$

という条件が得られる。(1.20) は y を一定としたときに利潤の合計を最大化する x の値と y の関係を示すものであり，(1.21) は x を一定としたときに利潤の合計を最大化する y の値と x の関係を示すものである。これらを連立させて解けば，$x = \frac{310}{7} \approx 44.3$，$y = \frac{80}{7} \approx 11.4$ となり，企業がそれぞれ選んだ産出量よりも X は少なく，Y は多い方が全体の利潤が大きくなることがわかる[*29]。ここで競争的な市場を仮定しているので財の価格が一定であれば消費者の消費量は変わらず（両企業の利潤の変化が消費に及ぼす効果は無視できる程度であるとする）企業の利潤が社会全体にとっての利益であると考えてよい。

しかし，企業の判断に任せておいたのではこの状態は実現できない。そこで外部不経済を与える企業 A に課税することを考えよう（この企業に対する課税であり，X 財の生産全

[*29] (1.20) より $x = 50 - \frac{1}{2}y$ を求め，それを π に代入して y で最大化しても同じ結果が得られる。

体への課税ではない)。そのとき 1 単位当りいくらの税を課せばよいであろうか。企業 A の産出量が $\frac{310}{7}$ となるように税を課せばよいのでこの企業の利潤が

$$\pi_A = \frac{620}{7}x - x^2$$

となるようにすればよい。したがって 1 単位当り $100 - \frac{620}{7} = \frac{80}{7}$ の税を課すことになる。そのとき企業 B の利潤は

$$\pi_B = 90y - 2y^2 - \frac{310}{7}y$$

となるので，利潤を最大化する産出量は $\frac{80}{7}$ となり社会的に望ましい生産が行われる。このように外部不経済を発生させる企業に課税してその活動を抑制させるような税は（提唱者の名前をとって）ピグー税と呼ばれる。外部経済を発生させる企業に対しては逆に補助金を与えるべきである。

■外部性と減産補助金について　ある企業の生産に外部不経済がある場合にその企業に税を課すことによって望ましい産出量に減らすことができるが企業の負担は増える。そこで税を課すのではなく補助金を与えることを考える。企業 A，B の産出量を x，y としてそれぞれの利潤が次のように表されるとしよう（価格は一定であるとする)。

$$\pi_A = 80x - 2x^2$$

$$\pi_B = 80y - y^2 - xy$$

企業 A の利潤を最大化する産出量は 20 なので

$$\pi_B = 80y - y^2 - 20y$$

より企業 B の利潤を最大化する産出量は 30 である。一方両方の利潤の和は

$$\pi_A + \pi_B = 80x - 2x^2 + 80y - y^2 - xy$$

となるから x，y で微分して

$$80 - 4x - y = 0,\ 80 - 2y - x = 0$$

より，$x = \frac{80}{7} < 20,\ y = \frac{240}{7} > 30$ が求まる。これが社会的に最適な産出量である。この産出量を実現するためには企業 A の利潤が

$$\pi_A = \frac{320}{7}x - 2x^2 + 定数$$

となるようにすればよい。税を課すのなら産出量 1 単位当たり $80 - \frac{320}{7} = \frac{240}{7}$ の税を課すことになる。そのとき上の式の定数は 0 である。減産補助金を与える場合はある基準とな

る産出量 $\bar{x}$ から 1 単位生産を減らすごとに $\frac{240}{7}$ の補助金を与える。そうすると企業 A の利潤は

$$\pi_A = 80x - 2x^2 + \frac{240}{7}(\bar{x} - x) = \frac{320}{7}x - 2x^2 + \frac{240}{7}\bar{x}$$

となる。すなわち上の式の定数は $\frac{240}{7}\bar{x}$ である。このとき利潤を最大化する産出量が $\frac{80}{7}$ となることは明らかである。税を課したときの利潤が $\frac{12800}{49}$ で規制がないときの利潤が 800 であるから $\frac{240}{7}\bar{x}$ がそれらの差 $\frac{26400}{49}$ に等しくなるように，すなわち

$$\frac{240}{7}\bar{x} = \frac{26400}{49}$$

となるように決めると $\bar{x} = \frac{110}{7}$ となる。そのように決めると企業 A は減産補助金による規制がある場合にも規制がないときと同じ利潤を得ることができる。このとき補助金に必要な財源は $\frac{240}{7} \times \frac{30}{7} = \frac{7200}{49}$ である。税をかけたときの税収は $\frac{240}{7} \times \frac{80}{7} = \frac{19200}{49}$ であるが，これと補助金財源の和が $\frac{26400}{49}$ に等しい。なお企業 A が自発的に産出量を $\frac{80}{7}$ にしたときに得られる利潤は $\frac{32000}{49}$ であるが，税をかけたときの企業 A の利潤と税収の和，および減産補助金を与えたときの企業 A の利潤と補助金財源の差はともに $\frac{32000}{49}$ に等しい。したがって 3 つの状態の社会的な余剰は等しく分配が異なるだけである。

1.18　コースの定理

本文にある外部性の説明の内，減産補助金の説明の所で使った例をもう一度考えてみる。企業 A，B の産出量を x，y としてそれぞれの利潤が次のように表されると仮定した（価格は一定であるとする）。

$$\pi_A = 80x - 2x^2$$

$$\pi_B = 80y - y^2 - xy$$

企業 A の利潤を最大化する産出量は 20，それをもとにした企業 B の利潤を最大化する産出量は 30 である。また両方の利潤の和を最大化する産出量はそれぞれ $x = \frac{80}{7} < 20$，$y = \frac{240}{7} > 30$ であった（そのときの利潤は企業 A が $\frac{32000}{49} \approx 653$，企業 B が $\frac{57600}{49} \approx 1176$）。ここで政府が介入するのではなく両企業が交渉してそれぞれの産出量を決める問題を考えてみよう。2 つのケースに分ける。

1. 企業 B には企業 A が発生させる外部性を理由にその生産を差し止める権利があるものとする。それに対して企業 A の側が B にお金を払って生産させてもらうことを考える。まず A の産出量が 0 のとき B の利潤は

$$\pi_B = 80y - y^2$$

となり利潤を最大化する産出量は 40，そのときの利潤は 1600 である（企業 A の利潤は 0）。企業 A は B に対してこの利潤を保証しなければならない。すなわち企業

B の産出量が変わってもその利潤は 1600 でなければならない。そのとき企業 A の利潤は

$$\pi_A = 80x - 2x^2 - 1600 + 80y - y^2 - xy$$

と表せる。つまり企業 A は自分の利潤から B に $(1600 - 80y + y^2 + xy)$ のお金を支払わなければならないのである。この式は

$$\pi_A = 80x - 2x^2 + 80y - y^2 - xy - 1600$$

に等しい。つまりこのときの企業 A の利潤は両企業の利潤の合計から定数 1600 を引いたものである。したがってそれを最大化する各企業の産出量は利潤の合計を最大化するときの $x = \frac{80}{7}$，$y = \frac{240}{7}$ に等しい。このとき企業 B の利潤は 1600，企業 A の利潤は約 229 である。

2. 一方，企業 A が B の損失を気にせずに生産を行う権利を持っていて，B の側がお金を渡して A の生産を抑えてもらう場合を考えてみよう。何もしなければ $x = 20$，$y = 30$ で A の利潤は 800 である（B の利潤は 900）。企業 B は A のこの利潤 800 を保証しなければならない。そのとき B の利潤は次のように表される。

$$\pi_B = 80y - y^2 - xy - 800 + 80x - 2x^2$$

つまり企業 B は自分の利潤から A に $(800 - 80x + 2x^2)$ のお金を支払わなければならない。この式は

$$\pi_B = 80x - 2x^2 + 80y - y^2 - xy - 800$$

に等しい。つまりこのときの企業 B の利潤は両企業の利潤の合計から定数 800 を引いたものである。したがってそれを最大化する各企業の産出量もやはり利潤の合計を最大化するときの $x = \frac{80}{7}$，$y = \frac{240}{7}$ に等しい。このとき企業 A の利潤は約 1029，企業 B の利潤は 800 である。

以上のように企業 A，B どちらが権利を持っていても結果として同じように両方の企業の利潤を最大化する最適な状態が実現する。このことをコースの定理（Ronald Coase による）と言う。ただし 2 つのケースで利潤の分配は異なる。

1.19　プリンシパル-エージェント理論の簡単な例

企業と労働者の関係を考える**プリンシパルは雇う側，エージェントは雇われる側である。企業と労働者ではなく**。労働者が努力したとき 80% の確率でよい結果が得られるが 20% の確率で悪い結果になる。努力しなければよい結果は得られない。企業には労働者が努力したかどうかはわからず結果によって判断するしかない。

1. 企業が労働者に固定賃金 w を提示した場合の企業と労働者の利得は以下のようになる[*30]。
   - (i) 労働者が求人に応じて努力し，よい結果が得られた場合の企業の利得は $5000 - w$，労働者の利得は $w - 200$（200 は努力のコスト）。
   - (ii) 労働者が求人に応じて努力したが悪い結果になった場合の企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は $w - 200$。
   - (iii) 労働者が努力しなかった場合，企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は w。
   - (iv) 労働者が求人に応じなかったとき，企業の利得は 0，労働者の利得は 500（500 は外部の機会で得られる利得）。

   $w - 200 < w$ であるから固定賃金がいくらであれ努力しないのが労働者にとって最適である。その前提で労働者が求人に応じる条件は $w \geq 500$ である。したがって企業にとっては $w = 500$ を提示して $2000 - 500 = 1500$ の利得を得るのが最適である。

2. 企業が固定賃金 w に加えてよい結果が得られた場合にボーナス b を支払うインセンティブ契約を提示したとする。このときの経営者と労働者の利得は以下のようになる。
   - (i) 労働者が求人に応じて努力し，よい結果が得られた場合の企業の利得は $5000 - w - b$，労働者の利得は $w + b - 200$（200 は努力のコスト）。
   - (ii) 労働者が求人に応じて努力したが悪い結果になった場合の企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は $w - 200$。
   - (iii) 労働者が努力しなかった場合，企業の利得は $2000 - w$，労働者の利得は w。
   - (iv) 労働者が求人に応じなかったとき，企業の利得は 0，労働者の利得は 500（500 は外部の機会で得られる利得）。

   労働者が求人に応じて努力したときの労働者の期待利得 E_1 は

   $$E_1 = 0.8 \times (w + b - 200) + 0.2 \times (w - 200) = w + 0.8b - 200$$

   である。ただし，労働者に努力させるためにはこれが努力しなかったときの利得以上である必要がある（インセンティブ両立条件）。これは

   $$w + 0.8b - 200 \geq w$$

   より

   $$b \geq 250$$

   と表される。さらに努力することを前提とした場合，労働者が求人に応じるには上記の期待利得が外部の機会で得られる利得以上である必要がある（参加条件）。こ

[*30] 「利得 (payoff)」はゲーム理論の用語であるが，企業や労働者が得るものを意味する。企業の場合は利潤，労働者の場合は効用であるが，ここでは効用を貨幣で表現したものになっている。

れは

$$w + 0.8b - 200 \geq 500$$

より

$$b \geq -1.25w + 875$$

と表現される。企業の期待利得 E_2 は

$$E_2 = 0.8 \times (5000 - w - b) + 0.2 \times (2000 - w) = 4400 - w - 0.8b$$

である。$b = -1.25w + 875$ をこれに代入すると

$$E_2 = 3700$$

となるから，企業は $b = -1.25w + 875$ かつ $b \geq 250$ を満たすように w と b を決めれば期待利得 3700 を得ることができるのである。例えば $(w, b) = (0, 875)$ あるいは $(w, b) = (500, 250)$ と決めればよい。

どちらの契約でも労働者の利得は同じ（外部機会の利得に等しい）であるが企業の利得はインセンティブ契約の方が大きい。

以上の議論では企業も労働者も危険中立的であると仮定していた。企業の株主は様々な投資先を持つことによって危険（リスク）を分散させられるので危険中立的であるという仮定は非現実的ではないが，労働者は危険回避的であると考えるのが適当かもしれない。そうすると $b = -1.25w + 875$ を満たす報酬では満足しない。その場合は少し余分に賃金またはボーナスを支払う必要があり，企業は 3700 の利得を得ることはできない。

もし企業が労働者の努力を観察できるとすると結果ではなく努力したかどうかで報酬を決めることができる。そのときインセンティブ両立条件と参加条件はそれぞれ $b \geq 200$, $b \geq -w + 700$ となるから $(w, b) = (500, 200)$ や $(w, b) = (0, 700)$ などが企業の利得を最大にする賃金とボーナス（努力に対するボーナスなので労働者にとってリスクはない）であり，そのとき企業は 3700 の利得を得る。労働者の努力についての情報を企業が持っていればこの状態を実現できるが，努力したかどうかが直接には観察できず，不確実な結果で判断するしかないという情報の不完備性（非対称性）によって，労働者が危険回避的な場合には最適な状態が実現できなくなるのである。

1.20　費用最小化と利潤最大化の数学的分析

1.20.1　費用最小化：シェパードの補題

費用最小化問題とは，企業が『ある一定の産出量を生産するという条件のもとで』生産にかかる費用が最も小さくなるような資本と労働の使用量を求める問題であるから，消費者の効用最大化問題と同様にラグランジュ乗数法を用いて分析することができる。

ある財の生産関数を次のように表す。

$$x = f(L, K) \tag{1.22}$$

x は財の産出量，L，K はそれぞれ生産要素である労働と資本の使用量あるいは雇用量を表す。一方費用は

$$c = wL + rK \tag{1.23}$$

と表される。w は労働の価格である賃金率，r は資本の価格である資本レンタルである。x を定められた産出量とすると，企業は (1.22) の制約のもとで (1.23) が最小になるように L と K を決める。この問題のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = wL + rK + \lambda[(f(L, K) - x] \tag{1.24}$$

である。(1.24) を L，K で微分すると，

$$w + \lambda f_L = 0 \tag{1.25}$$
$$r + \lambda f_K = 0 \tag{1.26}$$

が得られる。f_L，f_K は生産関数 f の L，K についての微分で，それぞれ労働および資本の限界生産力を表す[*31]。(1.25)，(1.26) より

$$\frac{w}{f_L} = \frac{r}{f_K} = -\lambda \tag{1.27}$$

および

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{w}{r} \tag{1.28}$$

を得る。(1.28) は費用が最小となっている状態では，**労働と資本の限界生産力の比が賃金と資本レンタルの比に等しくなっている**，ということを意味するが，これは等産出量曲線と等費用線が接するという関係が成り立っていることを意味するものである。この条件と産出量が x に等しいという条件を満たすように資本，労働投入量が決まり，それによって最小の費用が求められる。それは与えられた生産関数のもとで r，w および産出量 x の関数となる。この関数を費用関数と呼び

$$c(r, w, x) = rK(r, w, x) + wL(r, w, x)$$

と表す。$K(r, w, x)$，$L(r, w, x)$ は資本，労働投入量が r，w，x によって決まるということを意味する。これを x 一定のもとで r で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K + r\frac{\partial K}{\partial r} + w\frac{\partial L}{\partial r}$$

---

*31

$$f_L = \frac{\partial f}{\partial L},\ f_K = \frac{\partial f}{\partial K}$$

である。

が得られる。一方 $f(L,K)=x$ という式を x 一定のもとで r で微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial K}\frac{\partial K}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial L}\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

を得る。(1.28) より

$$r\frac{\partial K}{\partial r}+w\frac{\partial L}{\partial r}=0 \tag{1.29}$$

となるので

$$\frac{\partial c}{\partial r}=K$$

が導かれる。同様にして

$$\frac{\partial c}{\partial w}=L$$

が得られる。これらは産出量一定のもとで生産要素に対する需要が費用関数をその生産要素の価格で微分したものに等しいことを示しており，**シェパードの補題**と呼ばれている。消費者行動の分析におけるマッケンジーの補題に対応するものである。

(1.27) の意味を考えてみよう。この式の $\frac{f_L}{w}$ は賃金 1 円当たりの労働の限界生産力であり，同様に $\frac{f_K}{r}$ は 1 円当たりの資本の限界生産力である。したがって企業の費用最小化問題におけるラグランジュ乗数（の符号を変えたもの）は各生産要素 1 円当たりの限界生産力，すなわち 1 円の費用の増加による産出量の増加を表していると見ることができる。序数的な効用関数が用いられている消費者の効用最大化問題と違ってこの場合のラグランジュ乗数の値には実質的な意味がある。

費用が

$$c=rK+wL$$

と表されるので L，K を一定とすると $\frac{\partial c}{\partial r}=K$ となるのはあたりまえのように思われるがそうではない。r が変化すれば L も K も変わるが，費用最小化の条件によって打ち消し合っているのである。(1.29) がそれを表している。

■例 1　具体的に次の生産関数のもとで (1.23) の費用を最小化する問題を考えよう。

$$x=L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} \tag{1.30}$$

この形の生産関数はコブ・ダグラス型の生産関数と呼ばれる。ラグランジュ関数は

$$\mathcal{L}=wL+rK+\lambda(L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}-x)$$

である。これを L，K で微分すると

$$w+\frac{1}{3}L^{-\frac{2}{3}}K^{\frac{2}{3}}\lambda=0 \tag{1.31}$$

$$r+\frac{2}{3}L^{\frac{1}{3}}K^{-\frac{1}{3}}\lambda=0 \tag{1.32}$$

が得られる。(1.31)，(1.32) より λ を消去すると，

$$K = \frac{2w}{r}L \tag{1.33}$$

あるいは

$$rK = 2wL \tag{1.34}$$

を得る。(1.33)，(1.34) は (1.30) の生産関数のもとにおいては，企業の資本への支出が労働への支出の 2 倍になることを意味する。(1.33)，(1.34) を (1.30) へ代入して

$$L = \left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} x \tag{1.35}$$

および

$$K = \left(\frac{2w}{r}\right)^{\frac{1}{3}} x \tag{1.36}$$

が導かれる。これらは企業の労働および資本に対する需要を表すものである。(1.35) より，w が上昇すると労働の需要が減少し r が上昇すると増加することがわかる。同様に (1.36) より，r が上昇すると資本の需要が減少し w が上昇すると増加する。

ここで $L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}} = x$ を満たすわずかな L と K の変化をそれぞれ ΔL，ΔK とすると

$$\frac{\partial x}{\partial K}\Delta K + \frac{\partial x}{\partial L}\Delta L = 0$$

より

$$\frac{\Delta K}{\Delta L} = -\left(\frac{\partial x}{\partial L}\right)\Big/\left(\frac{\partial x}{\partial K}\right) = -\frac{1}{2}\frac{L^{-\frac{2}{3}} \cdot K^{\frac{2}{3}}}{L^{\frac{1}{3}} \cdot K^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{1}{2}\frac{K}{L}$$

が得られる。その変化に対する c の変化は

$$\Delta c = r\Delta K + w\Delta L = \left(-\frac{1}{2}\frac{K}{L}r + w\right)\Delta L$$

と表される。等産出量曲線上で $L < (>) \left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} x$ のとき $K > (<) \left(\frac{2w}{r}\right)^{\frac{1}{3}} x$ であり，したがって $\frac{K}{L} > (<) \frac{2w}{r}$ であるから，$L < (>) \left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} x$ のとき $\frac{\Delta c}{\Delta L} < (>) 0$ である。これは L が小さいときはその増加に伴って c が減少し，大きいときは L の増加によって c が増加することを意味するから，$L = \left(\frac{r}{2w}\right)^{\frac{2}{3}} x$ のとき c は最小値（正しくは極小値）をとる。

1.20.2　土地を含むシェパードの補題

労働，資本，土地の 3 つの生産要素によってある財を生産する場合を考えてみよう。土地（サービス）の投入量（一定の期間使用できる土地の面積で測る）を T，地代を t で表す[*32]。財の生産関数は $x = f(L, K, T)$ と表され，費用は

$$c = wL + rK + tT$$

*32 英語では土地は Land であるから L で，地代は rent なので r で表すべきかもしれないが労働や資本レンタルと区別できなくなるので T と t を使う。

と，産出量 x が一定であるときの費用最小化問題のラグランジュ関数は

$$\mathcal{L} = wL + rK + tT + \lambda(x - f(L, K, T))$$

と書ける。これを L，K，T で微分してゼロとおくと

$$w + \lambda f_L = 0,\ r + \lambda f_K = 0,\ t + \lambda f_T = 0$$

が得られる。f_T は土地の限界生産力（労働，資本投入量を一定として土地を少し広げたときの生産の増加）である。これらの式から

$$\frac{f_L}{w} = \frac{f_K}{r} = \frac{f_T}{t} \tag{1.37}$$

が導かれる。この式は各生産要素の価格（賃金率，資本レンタル，地代）とその限界生産力の比がすべて等しいことが費用最小化の条件であることを意味する。これらの条件と生産関数から，与えられた w，r，t のもとで各生産要素の投入量

$$L(w, r, t),\ K(w, r, t),\ T(w, r, t)$$

が求まる。これを費用の式に代入すると費用関数が次のように表される。

$$c(w, r, t) = wL(w, r, t) + rK(w, r, t) + tT(w, r, t)$$

これを w で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial w} = L + w\frac{\partial L}{\partial w} + r\frac{\partial K}{\partial w} + t\frac{\partial T}{\partial w} \tag{1.38}$$

を得る。一方 $x = f(L, K, T)$ を x 一定のもとで w で微分すると

$$f_L\frac{\partial L}{\partial w} + f_K\frac{\partial K}{\partial w} + f_T\frac{\partial T}{\partial w} = 0$$

が得られる。(1.37) よりこの式は

$$w\frac{\partial L}{\partial w} + r\frac{\partial K}{\partial w} + t\frac{\partial T}{\partial w} = 0$$

と書き直される。したがって (1.38) から

$$\frac{\partial c}{\partial w} = L$$

を得る。同様の計算で

$$\frac{\partial c}{\partial r} = K$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = T$$

が導かれる。これらの式が生産要素として土地を含む場合のシェパードの補題であり，費用関数を各生産要素の価格で微分して得られる値がその生産要素の投入量（企業の需要）に等しいことを意味している。生産要素がいくつあっても同じように議論できるが，企業の生産活動においては労働，資本，土地の 3 つが根源的な生産要素である。

1.20.3　完全競争企業の利潤最大化

次に完全競争企業の利潤最大化問題を考える。上で見た費用最小化行動によって企業の（総）費用関数が確定する。それを $C(x)$ で表す。財の産出量 x はあらゆる実数値をとりうるものとする。企業の利潤は次のように表される。

$$\pi = px - C(x) \tag{1.39}$$

p は財の価格である。完全競争のもとにおいて企業は自らが生産する財の価格は与えられたもの，すなわち定数と見なして産出量を決める。企業はこの利潤を最大化すべく産出量 x を決めるわけだが，利潤最大化問題には制約条件はなく変数も x 一つだけなので，通常の微分による最大値問題の解法を適用できる。(1.39) を x で微分しそれをゼロとおくと，

$$p - C'(x) = 0$$

が得られる。$C'(x)$ は $C(x)$ の微分であり限界費用を表しているから，利潤最大化の条件は**価格と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶ**ことであるという上で述べた結論が得られる。

■例 2　具体的に次のような利潤最大化問題を考えてみよう。

$$\pi = px - (x^2 + 10) \tag{1.40}$$

x^2 が可変費用であり，10 が固定費用である。(1.40) を x で微分しそれをゼロとおくと，

$$p - 2x = 0$$

を得る。したがってこの企業の供給曲線を表す方程式は

$$x = \frac{1}{2}p$$

となる。

価格と限界費用の差 $p - C'(x)$ は，わずかに産出量を増やしたときの利潤の変化を表しており，その値を $x = 0$ から企業が選ぶ産出量（x^* で表す）まで加えたものが企業の利潤（正確には利潤に固定費用を加えたもの，限界費用には固定費用は含まれていない）になる。すなわち，利潤を $\pi(x^*)$ とすると

$$\pi(x^*) = \int_0^{x^*} (p - C'(x))dx$$

である。これは価格を表す水平線と限界費用曲線の間の部分の面積に等しい（図 1.9 参照)。

1.20.4　独占企業の利潤最大化

独占企業の産出量を X，費用関数を $C(X)$，需要関数を $p=p(X)$ とすると，利潤は

$$\pi = p(X)X - C(X)$$

と表される。これを X で微分しそれをゼロとおくと

$$\frac{d\pi}{dX} = p + p'(X)X - C'(X) = 0 \tag{1.41}$$

が得られる。$p'(X)$ は需要曲線の傾きを表す。限界収入 MR は

$$MR = p + p'(X)X \tag{1.42}$$

と定義される。第 1 項 p は産出量の増加による収入の増加，第 2 項の $p'(X)X$ は産出量の増加に伴う価格の低下による収入の減少を表している。(1.41)，(1.42) より独占企業の利潤最大化の条件は**限界収入と限界費用が等しくなるような産出量を選ぶ**ことであるという先に述べた結論が得られる。

(1.42) を変形すると

$$MR = p\left(1 + \frac{p'(X)X}{p}\right) = p\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \tag{1.43}$$

となる。ここで ε は需要の価格弾力性であり，次のように定義される。

$$\varepsilon = -\frac{p}{p'(X)X} = -\left(\frac{dX}{X}\right) / \left(\frac{dp}{p}\right)$$

dp，dX は価格と需要の微小な変化を表す。したがって独占企業の利潤最大化条件 (1.41) は ε を用いて

$$p\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) = C'(X) \tag{1.44}$$

と書き表すことができる。p は X の関数なのでこの式から X およびそれに対応して p の値が求まる。後者を p_m と表すと独占企業の利潤（に固定費用を加えたもの）は

$$\pi(x^*) = \int_0^{x^*} (p_m - C'(X))dX$$

と書ける（図 1.13 参照)，これは p_m を表す水平線と限界費用曲線の間の部分の面積に等しい)。

1.20.5　利潤最大化の一般的記述：ホテリングの補題

完全競争企業の利潤を

$$\pi = pf(L,K) - wL - rK$$

と表し（価格 p は定数），企業はその利潤が最大となるよう L と K を決めるものとする。π を L，K で微分すると

$$\frac{\partial\pi}{\partial L} = pf_L - w = 0$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial K} = pf_K - r = 0$$

が得られ, その解として $L(p,w,r)$, $K(p,w,r)$, さらに生産関数によって産出量 $x(p,w.r) = f(L(p,w,r),K(p,w,r))$ が決まる。この両式より $pf_L = w$，$pf_K = r$ を得る。これらは『労働の限界生産力と財の価格の積（「労働の限界生産力の価値」と呼ぶ）が賃金率に等しく，資本の限界生産力と財の価格の積（「資本の限界生産力の価値」）が資本レンタルに等しくなるように労働，資本投入量を決めることが利潤最大化の条件である』ことを示している。

$L(p,w,r)$，$K(p,w,r)$ を π へ代入すると

$$\pi(p,w,r) = pf(L(p,w,r),K(p,w,r)) - wL(p,w,r) - rK(p,w,r)$$

となる。この $\pi(p,w,r)$ を利潤関数と呼ぶ。これを p，w，r で微分すると

$$\frac{\partial\pi}{\partial p} = f(L,K) + pf_L L_p + pf_K K_p - wL_p - rK_p$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial w} = pf_L L_w + pf_K K_w - wL_w - L - rK_w$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial r} = pf_L L_r + pf_K K_r - wL_r - rK_r - K$$

が得られる。ここで L_p，K_p，L_w，K_w，L_r，K_r は価格，賃金率，資本レンタルの変化による労働，資本投入量の変化を表す。この 3 つの式に $pf_L = w$，$pf_K = r$ を代入すると

$$\frac{\partial\pi}{\partial p} = f(L,K) = x$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial w} = -L,\quad \frac{\partial\pi}{\partial r} = -K$$

が導かれる。これらの関係は**ホテリングの補題**と呼ばれる。

企業の利潤が

$$\pi = px - wL - rK$$

と表されるから，x，L，K を一定とすれば $\frac{\partial\pi}{\partial p} = x$ となるのはあたりまえのように思われるがそういう意味ではない。p が変われば x，L，K は変化するが，それらの変化が，利潤最大化条件から得られる $pf_L = w$，$pf_K = r$ によって打ち消し合うのである。

■企業の利潤最大化の例　x を産出量，p を財の価格として生産関数が $x = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}}$ であるとすると利潤は

$$\pi = pL^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}} - wL - rK$$

である。これを L，K で微分して 0 とおくと

$$\frac{1}{2}pL^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}} = w,\ \frac{2}{5}pL^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{5}} = r$$

が得られる。左の式から $L^{-\frac{1}{2}} = \frac{2w}{p}K^{-\frac{2}{5}}$ より

$$L^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{2w}K^{\frac{2}{5}}$$

となる。これを右の式に入れると

$$\frac{p^2}{5w}K^{-\frac{1}{5}} = r$$

となり $K^{\frac{1}{5}} = \frac{p^2}{5rw}$ より

$$K = \frac{p^{10}}{5^5r^5w^5}\text{（資本の需要関数）}$$

が求まる。そうすると $L^{\frac{1}{2}} = \frac{p}{2w}\frac{p^4}{5^2r^2w^2}$ より

$$L = \frac{p^{10}}{2^25^4r^4w^6}\text{（労働の需要関数）}$$

が得られる。産出量は

$$x = L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}} = \frac{p^9}{2\cdot 5^4r^4w^5}$$

である。また，このとき $wL = \frac{p^{10}}{2^25^4r^4w^5}$，$rK = \frac{p^{10}}{5^5r^4w^5}$ より

$$wL = \frac{5}{4}rK = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{2}{5}}rK$$

が成り立つ。これはコブ・ダグラス生産関数の特徴である。

利潤関数は $\pi = px - wL - rK$ より

$$\pi = \frac{p^{10}}{2\cdot 5^4r^4w^5} - \frac{p^{10}}{2^25^4r^4w^5} - \frac{p^{10}}{5^5r^4w^5} = \frac{p^{10}}{20\cdot 5^4r^4w^5}$$

となる。これを w，r で微分すると

$$\frac{\partial\pi}{\partial p} = \frac{p^9}{2\cdot 5^4r^4w^5} = x$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial w} = -\frac{p^{10}}{4\cdot 5^4r^4w^6} = -L$$

$$\frac{\partial\pi}{\partial r}=-\frac{p^{10}}{5^5r^5w^5}=-K$$

が得られ，ホテリングの補題が成り立つ。

r が上昇しても w が上昇しても資本，労働の需要は減少するが，これは生産が減少することによる。産出量を一定とすればそうはならない。

■産出量が一定のときの企業の利潤最大化（費用最小化）の例　ラグランジュ関数は

$$px-wL-rK+\lambda(L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}}-x)$$

となる。これを L，K で微分して 0 とおくと

$$-w+\frac{1}{2}\lambda L^{-\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}}=0,\ -r+\frac{2}{5}\lambda L^{\frac{1}{2}}K^{-\frac{3}{5}}=0$$

を得る。x は一定なので x では微分しない。px は一定なので，この形の利潤最大化は，一定の産出量のもとで $wL+rK$ で表される費用を最小化するのと同じことである。両式から $wL=\frac{5}{4}rK$ が得られる。これから $L=\frac{5r}{4w}K$ となり，$L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{2}{5}}=x$（$x$ は一定）に代入すると $\left(\frac{5r}{4w}\right)^{\frac{1}{2}}K^{\frac{9}{10}}=x$ より

$$K=\left(\frac{4w}{5r}\right)^{\frac{5}{9}}x^{\frac{10}{9}}\text{（産出量一定のもとでの資本の需要関数）}$$

を得る。r が上昇すると資本の需要は減り，w が上昇すると増える。労働については

$$L=\left(\frac{5r}{4w}\right)^{\frac{4}{9}}x^{\frac{10}{9}}\text{（産出量一定のもとでの労働の需要関数）}$$

となり，r が上昇すると労働の需要は増え，w が上昇すると減る。費用関数は

$$\begin{aligned}c=wL+rK&=\left(\frac{5^4r^4w^5}{2^8}\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}+\left(\frac{2^{10}r^4w^5}{5^5}\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}\\&=\frac{1}{2}\left(2\cdot5^4r^4w^5\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}+\frac{2}{5}\left(2\cdot5^4r^4w^5\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}=\frac{9}{10}\left(2\cdot5^4r^4w^5\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{10}{9}}\end{aligned}$$

これを w，r で微分すると

$$\frac{\partial c}{\partial w}=\left(\frac{5r}{4w}\right)^{\frac{4}{9}}x^{\frac{10}{9}}=L$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}=\left(\frac{4w}{5r}\right)^{\frac{5}{9}}x^{\frac{10}{9}}=K$$

となりシェパードの補題が得られる。費用関数 c を x で微分すると限界費用

$$\frac{dc}{dx}=\left(2\cdot5^4r^4w^5\right)^{\frac{1}{9}}x^{\frac{1}{9}}$$

を得る。この限界費用が価格に等しいという利潤最大化条件を考えると，産出量が

$$x = \frac{p^9}{2 \cdot 5^4 r^4 w^5}$$

となり，上の利潤最大化で求めた産出量と等しいことがわかる。

この費用関数は逓増的な限界費用を持つ。これは生産関数の指数の和 $(\frac{1}{2} + \frac{2}{5})$ が 1 より小さくなっており，規模に関して収穫逓減になっているからである。一方指数の和が 1 に等しい規模に関して収穫一定の場合には限界費用は一定になり，価格と限界費用の一致による企業の産出量は決まらなくなる。

1.20.6　規模に関して収穫一定の生産関数

x を財の産出量，L，K を労働，資本の投入量として規模に関する収穫一定の生産関数が次のように表されるものとする。

$$x = f(L, K)$$

a をある実数として $f(aL, aK)$ を考えると規模に関する収穫が一定であることより

$$f(aL, aK) = af(L, K) = ax$$

が得られる。このような関数の性質は「一次同次」と呼ばれる*33。この式を a で微分すると

$$f_L L + f_K K = x$$

となり，利潤最大化条件 $pf_L = w$，$pf_K = r$ より

$$wL + rK = px$$

が導かれる。この式は労働と資本に対する報酬の合計が企業の収入に等しくなることを意味しており，「オイラーの定理」の名で知られている事実を示している。

生産関数が

$$x = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

として利潤最大化を考える。A は正の定数，$0 < \alpha < 1$ である。財の価格を p とすると利潤は

$$\pi = pAL^{\alpha}K^{1-\alpha} - wL - rK$$

である。これを L，K で微分してゼロとおくと

$$\alpha pAL^{\alpha-1}K^{1-\alpha} - w = 0$$

*33 「一次同次」とは関数に含まれる変数をすべて a 倍すると関数の値も a 倍になることを意味する。変数を a 倍しても関数の値が変わらないという性質は「0 次同次」と言われる。

$$(1-\alpha)pAL^{\alpha}K^{-\alpha}-r=0$$

となる。上の式に L を，下に式に K をかけると

$$wL=\alpha pAL^{\alpha}K^{1-\alpha}=\alpha px$$

$$rK=(1-\alpha)pAL^{\alpha}K^{1-\alpha}=(1-\alpha)px$$

となり，これらを加えると

$$wL+rK=px$$

となる。したがって利潤（超過利潤）はゼロであり，労働分配率 ($\frac{wL}{px}$) は α，資本分配率 ($\frac{rK}{px}$) は $1-\alpha$ である。

1.20.7　技術的限界代替率

産出量を一定にした状態で労働を増やして資本を減らしたとき（あるいはその逆）の労働と資本の変化の比を技術的限界代替率と呼ぶ．消費者の限界代替率と同様のものである．（労働を横軸，資本を縦軸にとった）等産出量曲線が凸ならば（「－資本の変化／労働の変化」で定義される）技術的限界代替率は労働の増加に伴って小さくなる．これを技術的限界代替率逓減の法則と呼ぶ．収穫逓減の法則（限界生産力逓減の法則）から導かれる．$x=f(L,K)$ を用いると（x を一定として微分する）

$$\text{技術的限界代替率}=-\frac{dK}{dL}=\frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}}$$

となる．例としていわゆるコブ・ダグラス型生産関数 $x=L^{\alpha}K^{\beta}$ を考えると．

$$-\frac{dK}{dL}=\frac{\alpha L^{\alpha-1}K^{\beta}}{\beta L^{\alpha}K^{\beta-1}}=\frac{\alpha K}{\beta L}$$

となり，L が大きくなれば技術的限界代替率が小さくなる．なお，$\alpha+\beta$ が 1 より大きければ規模に関して収穫逓増，小さければ逓減，1 に等しければ一定である．L，K をともに 2 倍にしたときに x が 2 倍以上になるか，以下か，ちょうど 2 倍になるかを確認すればよい．

1.20.8　CES 生産関数

規模に関する収穫一定の生産関数の代表的なものとして CES 生産関数があり実証分析でよく用いられている。資本，労働の 2 つの生産要素を用いてある財を生産する場合の CES 生産関数は次のように表される。

$$x=f(L,K)=(\alpha L^{\sigma}+\beta K^{\sigma})^{\frac{1}{\sigma}},\ \alpha+\beta=1,\ 0<\alpha<1,\ 0<\beta<1$$

x は産出量，L，K は労働，資本の投入量であり α，β，σ は実数である（$\sigma < 1$）。L，K をそれぞれ定数倍，たとえば 2 倍したときの産出量を x' とすると

$$
\begin{aligned}
x' &= (\alpha(2L)^\sigma + \beta(2K)^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} \\
&= [2^\sigma]^{\frac{1}{\sigma}}(\alpha L^\sigma + \beta K^\sigma)^{\frac{1}{\sigma}} = 2x
\end{aligned}
$$

となるからこの生産関数は規模に関して収穫一定であることがわかる。労働と資本の限界生産力 f_L，f_K はそれぞれ

$$f_L = \alpha(\alpha L^\sigma + \beta K^\sigma)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} L^{\sigma-1} = \alpha x^{1-\sigma} L^{\sigma-1}$$

$$f_K = \beta(\alpha L^\sigma + \beta K^\sigma)^{\frac{1-\sigma}{\sigma}} K^{\sigma-1} = \beta x^{1-\sigma} K^{\sigma-1}$$

となり，それらの比をとると

$$\frac{f_L}{f_K} = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{L}{K}\right)^{\sigma-1}$$

が得られる。企業が利潤最大化しているときにはこれは賃金率と資本レンタルの比 ($\frac{w}{r}$) に等しい。この式を変形すると

$$\frac{L}{K} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{f_L}{f_K}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}$$

となる。$\frac{L}{K}$ は企業が投入する労働と資本の比である。$\frac{f_L}{f_K} = \tau$ としてこの式を τ で微分すると，

$$\frac{d\frac{L}{K}}{d\tau} = \frac{1}{\sigma-1}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\sigma-1}} \tau^{\left(\frac{1}{\sigma-1}-1\right)} = \frac{1}{\sigma-1}\frac{\frac{L}{K}}{\tau}$$

を得る。したがって

$$\eta = -\frac{d\frac{L}{K}}{d\tau}\frac{\tau}{\frac{L}{K}} = -\left(\frac{d\frac{L}{K}}{\frac{L}{K}}\right)\Big/\left(\frac{d\tau}{\tau}\right) = \frac{1}{1-\sigma}$$

が導かれる。この η を**代替の弾力性** (elasticity of substitution) と呼ぶ。これは「労働・資本投入量の比の変化率」と「限界生産力の比，したがって（利潤最大化の状態では）生産要素の相対価格 ($\frac{w}{r}$) の変化率」の比（の絶対値）を表している。ある生産要素の価格が上昇するとその生産要素の投入量は減少するので上記の比の値が負であるから弾力性が正となるように先頭にマイナスをつけてある。σ が一定であるから η の値も一定である，CES とは「一定の代替の弾力性 (constant elasticity of substitution)」を意味する。

　ここで σ の値を 0 に近づけたときの労働・資本の限界生産力を考えてみると

$$f_L = \alpha\frac{x}{L}$$

$$f_K = \beta\frac{x}{K}$$

となる。これらはコブ・ダグラス型生産関数

$$x = f(L, K) = L^{\alpha} K^{\beta},\ \alpha + \beta = 1$$

から得られるものと同一である。したがってコブ・ダグラス型生産関数は CES 生産関数において $\sigma \to 0$，したがって $\eta \to 1$ としたときの極限であると考えることができる。

第 2 章

ゲーム理論入門

■この章のキーワード　戦略，静学的なゲーム，標準型ゲーム，最適反応，ナッシュ均衡，混合戦略，純粋戦略，動学的なゲーム，ゲームの樹，展開型ゲーム，部分ゲーム，部分ゲーム完全均衡，繰り返しゲーム，不完備情報ゲーム，完全ベイジアン均衡，シグナル，Separating 均衡，Pooling 均衡，オークションの理論，ベイジアン・ナッシュ均衡，シグナリングゲーム，合理的な均衡，コア，仁，シャープレイ値，企業立地の問題

2.1　ゲームおよびゲーム理論

1994 度のノーベル経済学賞をジョン・ナッシュ，ラインハート・ゼルテン，ジョン・ハルサーニの 3 人のゲーム理論家が受賞した（その後もオーマン，シェリングが受賞している）。ゲーム理論は経済学の一分野として，また各分野における経済学研究の重要な分析手法としてその地位を確立したように思われる。

ゲーム理論でいうゲームとは，トランプ・将棋・麻雀などの遊び（仕事でしている人達もいるが）のゲーム，あるいは野球・サッカーなどスポーツのゲームばかりではなく，それらも含めて複数の個人あるいは組織が自分の行動だけでなく相手の行動が自分の利益に（プラスまたはマイナスに）影響する状況において，それぞれが自分の利益をなるべく大きくしようとして行動を選択するというように設定された枠組みを意味する。ゲームに登場する個人または組織を**プレイヤー (player)** と呼ぶ。

政治や経済にはゲームに当てはまる状況が多い。経済に例をとって一つのゲームを考えてみよう。

ゲーム 1　ある産業に属する 2 つの企業（それらを企業 A，B とする）が生産・販売する財の価格を決める問題を考えてみよう。両方の企業が価格を低くすると販売量は増えるが利潤は小さくなり，両企業が価格を高くすると販売量は減るが互いの利潤は低い価格のときよりも大きくなる。しかし企業 A（あるいは B）が高い価格をつけているときに企業 B（あるいは A）が価格を下げると，相手の顧客を奪って一層大

企業Aの戦略 ＼ 企業Bの戦略	高価格	低価格
高価格	5, 5	1, 7
低価格	7, 1	2, 2

表 2.1　ゲーム 1–寡占のゲーム

きな利潤を稼ぐことができると仮定する。

これは寡占（の中でも企業数が 2 つの最も簡単な複占のケース）の一例であるが，一方の企業が選ぶ行動が他方の企業の利潤にも影響を与えるゲームになっている。このとき各企業は実際にどのような行動を選択するか，すなわち価格を選ぶであろうか。ゲーム理論では，それぞれの状況において選ばれる行動を**戦略** (strategy) と呼ぶ[*1]。また各企業がそれぞれ自分の利潤の最大化を図って実際に選ぶであろう戦略の組合せを**均衡** (equilibrium) と呼ぶ。どのようなゲームでどのような均衡が実現すると考えられるか。それを分析するのがゲーム理論である。以下主にプレイヤーが 2 人（企業ならば 2 社）の場合を中心に解説して行くが，一般的には 3 人以上のプレイヤーの存在も考える。

2.2　静学的なゲームとナッシュ均衡

2.2.1　静学的なゲーム・標準型ゲームと最適反応

上で見た寡占ゲームの例（ゲーム 1）をもう少し詳しく考えてみよう。企業 A，B が生産する財は同種の財ではあるが差別化されたものであるとする。両企業が作る財が完全に同じ財（同質財，消費者から見て区別できないもの）の場合には，一方が他方より少しでも安い価格をつければ（情報を入手するのが簡単で，買い物に行くための費用などもかからないとすると）すべての消費者は価格が安い方の財を買い，高い価格をつけている企業の財はまったく売れなくなる。しかし差別化された財の場合は消費者によって好みの違いがあるため価格に差があってもすべての消費者が一方の財に集中してしまうことはなく，価格の変化に伴って需要は徐々に変化するであろう。企業 A の財の価格が上がると，その財に対する好みがあまり強くない消費者は企業 B の財に移っていくかもしれないが，好みの強い消費者は企業 A の財を買い続けるであろうから，企業 A はすべての需要を失うわけではない。このような製品差別化された寡占ゲームの例を表 2.1 に示した。表の各枡目の数字は，左側が企業 A の利潤を右側が企業 B の利潤を表している。各プレイヤーがそれぞれ選択した戦略を実行した結果として得るものをゲーム理論では**利得** (payoff) と呼

[*1] 次節で取り扱う静学的なゲームでは，純粋戦略を考えている限り行動と戦略は同じものであるが，後の節で考える動学的なゲームでは行動と戦略の意味は異なる。

ぶ[*2]。企業間のゲームでは利潤が利得になっているが，何が利得であるかはそのゲームによって異なる[*3]。各企業はこのゲームの構造を知っていて，自分の利潤が最大となるように行動するが，相手と協力すべく相談したりはできないものと仮定する。したがって**相手の行動は与えられたものと考えて**自らの行動を選択しなければならない。このようにゲームのプレイヤーが互いに協力できない状況でそれぞれの戦略を選択するようなゲームを**非協力ゲーム** (non-cooperative game) と呼ぶ。またこのゲームでは 2 つの企業が同時に戦略を選択するゲームになっているので同時決定ゲームと呼ぶことができるが，時間的に同時であるがどうかが問題ではなく，各企業は相手がどの戦略を選んだかを知ることができない状況で自分の戦略を選ばなければならないということを意味する。このようなゲームにおいては，ゲームの中で時間の流れを考えていないので**静学的なゲーム** (static game) と呼ばれる。また表 2.1 のようにゲームの構造を行列で表すような表し方を**標準型ゲーム** (normal form game) と言う[*4]。

各プレイヤーは相手が選ぶ戦略に対応して自分にとって最適な，すなわち自分の利得が最も大きくなる戦略を選ぼうとする。あるプレイヤーにとって，**相手のプレイヤーが選ぶ戦略を与えられたものとして**自分にとって最適な戦略を**最適反応** (best response) と呼ぶ。表 2.1 のゲームでは最適反応は具体的に次のようになる。

(1). 企業 A の最適反応
  (i) 企業 B が高価格を選んだ場合 → 低価格を選ぶのが最適
  高価格を選ぶと利潤は 5，低価格を選ぶと利潤は 7。
  (ii) 企業 B が低価格を選んだ場合 → 低価格を選ぶのが最適
  高価格を選ぶと利潤は 1，低価格を選ぶと利潤は 2。
(2). 企業 B の最適反応
  (i) 企業 A が高価格を選んだ場合 → 低価格を選ぶのが最適
  高価格を選ぶと利潤は 5，低価格を選ぶと利潤は 7。
  (ii) 企業 A が低価格を選んだ場合 → 低価格を選ぶのが最適
  高価格を選ぶと利潤は 1，低価格を選ぶと利潤は 2。

相手のある戦略に対して，自分がある戦略を選んでも別の戦略を選んでも利得が等しいということもありうる。その場合は両方とも最適反応になるので一般に最適反応は一つとは限らない。

[*2] 通常ゲーム理論では利得は「期待効用定理」の条件を満たすフォン・ノイマン-モルゲンシュテルン型効用関数で表されるものと仮定する。

[*3] 選挙での勝利をめざす 2 つの政党間の，有権者に示す政策提案を戦略とするゲームを考えれば，選挙で獲得する得票数ないしは議席数が利得になる。

[*4] **戦略型ゲーム** (strategic form game) とも言う。一般的に標準型ゲームとはプレイヤーの選択可能な戦略の組とそれに対応した利得の組とでゲームを表現するものであり，行列を使うとは限らない。

2.2.2　ナッシュ均衡

ゲーム 1 の均衡を考える。ゲームの均衡というのは，実際にこのゲームが行われたときにプレイヤーが選択するであろうと思われる戦略の組み合わせである。ゲームの均衡について最も基本となる考え方は次のナッシュ均衡である。

ナッシュ均衡　各プレイヤーが選んでいる戦略が，それぞれ相手の戦略に対する最適反応になっている場合, そのような戦略の組み合わせを**ナッシュ均衡** (Nash equilibrium) と呼ぶ。ナッシュ均衡においては相手が戦略を変えなければ自分だけが一方的に戦略を変えても利得を増やすことはできない（利得が減るとは限らない)。

ゲーム 1 のナッシュ均衡を考えてみよう。このゲームでは企業 A にとっては企業 B がどちらの戦略を選んでも低価格を選択することが最適になっている。同様に企業 B にとっても企業 A がどちらの戦略を選んでも低価格を選択することが最適になっている。したがってこのゲームのナッシュ均衡は企業 A，企業 B の戦略がともに低価格となる組合せであり，そのとき各プレイヤーが得る利得（利潤）は表 2.1 の右下の枠に示されている (2,2) である。

このゲームでは 2 つの企業がカルテルを結んでともに高価格をつけるように協力すれば左上に示されている利潤 (5,5) を実現することができる。しかし，拘束力のある協力関係を結べない非協力ゲームでは相手が高価格をつけると想定すると自分が低価格をつけた方が利潤が大きくなる（それが最適反応）ので両企業ともに低価格をつけ，結果的に低い利潤になってしまう。

支配戦略　このゲームでの低価格戦略のように，あるプレイヤーにとって相手がどのような戦略を選ぼうとも自分にとって最適な戦略がただ一つに決まっている場合，その戦略を**支配戦略** (dominant strategy) と呼ぶ。ここで支配というのは，低価格という戦略が高価格という戦略を支配しているという意味であり，どちらかのプレイヤーが相手を支配しているということではない。

この例のようなゲームは**囚人のジレンマ** (prisoner’s dilemma) と呼ばれる。表 2.1 を表 2.2 のように作り変えてみる。この表の利得は表 2.1 の利得からすべて 7 を引いた数字である。期待効用と同様にこのようにしてもゲームの構造は変わらず，最適反応，ナッシュ均衡も変わらない。「高価格」「低価格」という戦略はそれぞれ「黙秘」「自白」と名前が変わっている。ある犯罪を共同で犯した 2 人の容疑者（取調べ段階で留置場などに入っている囚人）A，B がいて別々に取り調べられている。検察官は「自白すれば罪を軽くしてやる」と言う。自分だけが自白すれば無罪放免（利得は 0)，自分だけが黙秘すると懲役 6 年（利得は −6)，ともに自白すれば懲役 5 年，そしてともに黙秘を貫けば証拠不十分で懲役 2 年になることがわかっているものとする。このゲームでは「自白」が支配戦略であ

		囚人 B の戦略	
囚人 A の戦略		黙秘	自白
	黙秘	-2, -2	-6, 0
	自白	0, -6	-5, -5

表 2.2　囚人のジレンマ

		企業 B の戦略	
企業 A の戦略		規格 X	規格 Y
	規格 X	8, 6	4, 4
	規格 Y	3, 3	6, 8

表 2.3　ゲーム 2–互換性のゲーム

り，ともに自白することがナッシュ均衡である。相手の自白を心配して自白するのではなく，相手がどうであれ自分にとって自白した方が有利なので自白してしまうのである。

ゲーム 1 のように両方のプレイヤーに支配戦略があれば互いにその支配戦略を選ぶという組合せがナッシュ均衡になるが，支配戦略のあるゲームばかりではない。次の例を考えてみよう。

ゲーム 2　企業 A と B がある製品の規格を決める問題を考える。規格に X と Y の 2 種類があり，両方の企業が同じ規格を選ぶと製品の互換性が高くなり消費者にとって便利になるので市場が大きくなって企業は大きな利潤を得られるが，各企業が異なった規格を選ぶと消費者には不便になって市場が小さくなり利潤も少なくなる。また企業 A は規格 X に，企業 B は規格 Y にすぐれた技術を持っていると仮定する。

この状況を表にすると表 2.3 のようになる。先ほどの例と同じく，表の各桝目の中の数字は，左側が企業 A の利潤を右側が企業 B の利潤を表している。このゲームについて各プレイヤーの最適反応を考えると

(1). 企業 A の最適反応
- (i) 企業 B が規格 X を選んだ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 3。
- (ii) 企業 B が規格 Y を選んだ場合 → 規格 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 6。

(2). 企業 B の最適反応
- (i) 企業 A が規格 X を選んだ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 6，Y を選ぶと利潤は 4。
- (ii) 企業 A が規格 Y を選んだ場合 → 規格 Y を選ぶのが最適

女性の戦略

男性の戦略		サッカー	音 楽
	サッカー	5, 3	1, 1
	音 楽	0, 0	3, 5

表 2.4　両性の闘い

X を選ぶと利潤は 3，Y を選ぶと利潤は 8。

すなわち，各企業とも相手と同じ規格を選ぶのが最適反応になっている。各プレイヤーにとって相手の戦略によって自分の最適な戦略が異なっているので支配戦略はないが，ナッシュ均衡はある。しかもこのゲームの場合ナッシュ均衡は 2 つある。具体的には次のようになる。

(1). **ナッシュ均衡** 1–企業 A，企業 B ともに規格 X を選ぶ。
企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は規格 X であり，企業 B が規格 X を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，お互いに最適反応になっておりこの戦略の組合せはナッシュ均衡である。
(2). **ナッシュ均衡** 2–企業 A，企業 B ともに規格 Y を選ぶ。
企業 A が規格 Y を選んだ場合の企業 B の最適反応は規格 Y であり，企業 B が規格 Y を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 Y なので，お互いに最適反応になっておりこの戦略の組合せはナッシュ均衡である。

この 2 つの均衡のうち，ともに規格 X を選ぶ均衡の方が企業 A にとって有利であり，ともに規格 Y を選ぶ均衡の方が企業 B にとって有利であるが，どちらの方が実現しやすい均衡であるかはわからない。このようにゲームの均衡は一つとは限らない。

このゲームは**両性の闘い**と呼ばれるゲームの一例になっている。表 2.3 を表 2.4 のように作り変える。この表の利得は表 2.3 の利得からすべて 3 を引いたものになっている。互いに連絡を取れない状況におかれた（なぜかは問わない）男女がある日のある時刻にサッカー（のある特定の試合）を見に行くかある音楽コンサートに行くかを決めなければならない。男性はサッカーを，女性は音楽を好むが，何よりも会えなければいけない。利得はそれぞれの状況での 2 人の効用（満足感）を表すものと考えられる。このゲームにはナッシュ均衡が 2 つある。1 つはともにサッカーを見に行くことであり，もう 1 つはともに音楽を聞きに行くことである。

2.2.3　混合戦略

次のゲームを考えてみよう。

		企業Bの戦略	
企業Aの戦略		製品 X	製品 Y
	製品 X	5, 5	8, 2
	製品 Y	8, 2	5, 5

表 2.5　ゲーム 3–類似品のゲーム

ゲーム 3　企業 A と企業 B がある製品を作っているが，企業 A は独自の技術を使って特徴ある製品を作るのが得意であり企業 B とは異なったタイプの製品を作ろうとしている。一方，企業 B は類似品を作るのが得意で企業 A の製品とよく似た製品を作りたいと思っていると仮定する。製品のタイプを X，Y で表す。

このゲームは表 2.5 のように表現される。やはり左側の数字が企業 A の利潤，右側の数字が企業 B の利潤を表す。このゲームについて各プレイヤーの最適反応を求めると

(1). 企業 A の最適反応
  (i) 企業 B が製品 X を選んだ場合 → 製品 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 5，Y を選ぶと利潤は 8
  (ii) 企業 B が製品 Y を選んだ場合 → 製品 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 5

(2). 企業 B の最適反応
  (i) 企業 A が製品 X を選んだ場合 → 製品 X を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 5，Y を選ぶと利潤は 2
  (ii) 企業 A が製品 Y を選んだ場合 → 製品 Y を選ぶのが最適
  X を選ぶと利潤は 2，Y を選ぶと利潤は 5

となる。企業 A は相手とは違うタイプの製品を選ぼうとし，一方企業 B は相手と同じタイプの製品を選ぼうとする。このゲームにはお互いに相手の戦略に対して最適反応になっているような戦略の組み合わせがないのでナッシュ均衡はない。しかし，戦略について異なった考え方をするとナッシュ均衡が存在するようになる。その戦略についての考え方とは以下に述べる混合戦略である。

混合戦略　ゲームのプレイヤーが自分の選択可能な戦略を確率的に選択するとき，各プレイヤーが各戦略に対して割り当てる確率の組合せを**混合戦略** (mixed strategy) と呼ぶ。

上のゲーム 3 であれば，企業 A が確率 1/3 で製品 X を選び，確率 2/3 で製品 Y を選ぶというような戦略を考えることになる。サイコロをころがして 1 から 4 までの目が出れば製品 X，5 または 6 の目が出れば製品 Y というように選べばそのような確率になる。このよう

な混合戦略に対してこれまで考えてきたように行動をはっきり一つに決めて選ぶような戦略を**純粋戦略** (pure strategy) と呼ぶ。混合戦略は純粋戦略を確率的に組み合わせたものであるが，純粋戦略も混合戦略の一種（X を選ぶ確率が 1 あるいは 0 の）と見ることができる。

自分あるいは相手が混合戦略を選んでいる場合は，自分がある戦略（純粋戦略でも）を選んだときに得られる利得は確実なものではなく確率的なものになる。

混合戦略を考えたときでも純粋戦略の場合と同じように，最適反応およびナッシュ均衡が定義される。すなわち，それぞれのプレイヤーが相手の戦略に対して自分にとって最も有利な戦略（最適反応）を選んでいるときの戦略の組合せがナッシュ均衡である。表 2.5 のゲームで混合戦略によるナッシュ均衡を考えてみよう。企業 A が確率 p で製品 X を，確率 $1-p$ で製品 Y を選び，企業 B が確率 q で製品 X を，確率 $1-q$ で製品 Y を選んだ場合に企業 A が獲得する利潤の期待値（平均値）を π_A，企業 B が獲得する利潤の期待値を π_B とすると[*5]

$$\begin{aligned}\pi_A =& 5pq + 8(1-p)q + 8p(1-q) + 5(1-p)(1-q)\\ =& 5 + (3-6q)p + 3q \end{aligned} \tag{2.1}$$

および

$$\begin{aligned}\pi_B =& 5pq + 2(1-p)q + 2p(1-q) + 5(1-p)(1-q)\\ =& 5 + (6p-3)q - 3p \end{aligned} \tag{2.2}$$

が得られる。企業 A は式 (2.1) が最大となるように p を決め，企業 B は式 (2.2) が最大となるように q を決めるのであるが，(2.1) の $3-6q$ がゼロでなければ，$p=1$（$3-6q>0$ の場合），または $p=0$（$3-6q<0$ の場合）とすることによって企業 A の利潤が最大となるから純粋戦略になる。純粋戦略では均衡がないことを確認済みなので混合戦略の均衡を考えるには $3-6q=0$ となっていなければならない。すると $q=1/2$ を得る。一方 (2.2) の $6p-3$ がゼロでなければ，$q=1$（$6p-3>0$ の場合），または $q=0$（$6p-3<0$ の場合）とすることによって企業 B の利潤が最大となり，純粋戦略となる。混合戦略の均衡を考えるには $6p-3=0$ となっていなければならない。したがって $p=1/2$ を得る。以上のことからゲーム 3 のナッシュ均衡は次のように表現される。

[*5] 期待値は以下のように計算する。『サイコロを 2 個同時に振って両方とも 1 の目が出れば賞金 1200 円，1 と 2 が出れば 300 円それ以外は賞金なし』というゲームを考えると，1 回だけそのゲームをプレイしたときの賞金の期待値は

$$\frac{1}{36}\times 1200 + \frac{1}{18}\times 300 = 50$$

となる。これはサイコロの目が事前の確率通りに出たとして（2 個のサイコロともに同じ目が出る確率はそれぞれの目について $\frac{1}{36}$，異なった目が出る確率はそれぞれの組み合わせについて $\frac{1}{18}$）このゲームを何度もプレイして得られる平均の賞金に等しい。

ゲーム 3 のナッシュ均衡　企業 A，企業 B ともに確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するという戦略の組合せがナッシュ均衡となる。そのとき企業 A が獲得する利潤（の期待値）は 6.5，企業 B が獲得する利潤（の期待値）は 3.5 である。

$q = 1/2$，すなわち企業 B が確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するとき式 (2.1) の $3 - 6q$ がゼロであるから，企業 A にとってはどのような確率で製品 X を選んでも得られる利潤の期待値は同じである。その場合，混合戦略ではなく純粋戦略として製品 X（$p = 1$ のとき）を選んでも製品 Y（$p = 0$ のとき）を選んでも得られる利潤の期待値は等しくなっている。したがって $p = 1/2$ とするのも最適反応である。同様に，$p = 1/2$，すなわち企業 A が確率 1/2 で製品 X，製品 Y を選択するとき，式 (2.2) の $6p - 3$ がゼロであるから，企業 B にとってどのような確率で製品 X を選んでも得られる利潤の期待値は同じであり，$q = 1/2$ とするのも最適反応になっている。したがって，$p = 1/2$，$q = 1/2$ は互いに最適反応であるからナッシュ均衡になる。

このように混合戦略が相手のある戦略に対して最適反応になっている場合には，その混合戦略を構成する各純粋戦略自体も最適反応になっている[*6]。そうすると確率 1/2 はそれを選ぶプレイヤーの合理的な判断によって選ばれたものと考えるよりも，そのプレイヤーの戦略についての相手の予想を示すものと考えた方がよい。つまり企業 B にとっては企業 A が確率 1/2 で製品 X を選んでいると予想したときに製品 X と製品 Y が同じ利得をもたらす戦略になり，逆に企業 A にとっては企業 B が確率 1/2 で製品 X を選んでいると予想したときに製品 X と製品 Y が同じ利得をもたらす戦略になる。確率 1/2 はお互いの戦略が最適反応になるためにつじつまの合う予想になっている。

先に見たゲーム 2 も，2 つの純粋戦略によるナッシュ均衡の他に次のような混合戦略によるナッシュ均衡を持つ。

ゲーム 2 の混合戦略によるナッシュ均衡　企業 A は確率 5/7 で規格 X を，確率 2/7 で規格 Y を選び，一方企業 B は確率 2/7 で規格 X を，確率 5/7 で規格 Y を選ぶという戦略の組合せがナッシュ均衡である。

これは以下のようにして示される。

ゲーム 3 の場合と同様に企業 A が確率 p で規格 X を，確率 $1 - p$ で規格 Y を選び，企業 B が確率 q で規格 X を，確率 $1 - q$ で規格 Y を選んだ場合に企業 A が獲得する利潤の期待値（平均値）を π_A，企業 B が獲得する利潤の期待値を π_B とすると

[*6] ここでは戦略の数が 2 つのゲームを考えているので混合戦略はその 2 つの戦略をある確率で選ぶものとなっているが，戦略の数が 3 つ（あるいはそれ以上）あるゲームにおいては 3 つすべてからなる混合戦略の他に 3 つの内の 2 つからなる混合戦略も考えることができる。そのような戦略が最適反応になっている場合には，それを構成する 2 つの純粋戦略それぞれも最適反応である。

$$\begin{aligned}\pi_A &= 8pq + 3(1-p)q + 4p(1-q) + 6(1-p)(1-q) \\ &= 6 + (7q-2)p - 3q \end{aligned} \tag{2.3}$$

および

$$\begin{aligned}\pi_B &= 6pq + 3(1-p)q + 4p(1-q) + 8(1-p)(1-q) \\ &= 8 + (7p-5)q - 4p \end{aligned} \tag{2.4}$$

と表される。各企業の最適反応は以下の通りである。

(1). 企業 A の最適反応
  (i) $\frac{2}{7} < q \leqq 1$ のときは $p = 1$ が最適
  (ii) $0 \leqq q < \frac{2}{7}$ のときは $p = 0$ が最適
  (iii) $q = \frac{2}{7}$ のときは p の値は何でもよい

(2). 企業 B の最適反応
  (i) $\frac{5}{7} < p \leqq 1$ のときは $q = 1$ が最適
  (ii) $0 \leqq p < \frac{5}{7}$ のときは $q = 0$ が最適
  (iii) $p = \frac{5}{7}$ のときは q の値は何でもよい

以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(1). $p = 1, q = 1$。これは企業 A が X，B も X を選ぶ純粋戦略による均衡である。
(2). $p = 0, q = 0$。これは企業 A が Y，B も Y を選ぶ純粋戦略による均衡である。
(3). $p = \frac{5}{7}, q = \frac{2}{7}$。これはともに（純粋戦略ではない）混合戦略を選ぶ均衡である。

混合戦略によるナッシュ均衡においては企業 A は確率 5/7 で規格 X を確率 2/7 で規格 Y を選び，一方企業 B は確率 2/7 で規格 X を確率 5/7 で規格 Y を選ぶ。この場合には，企業 B にとっては企業 A が確率 5/7 で規格 X を選んでいると予想したときに規格 X と規格 Y が同じ利得をもたらす戦略になり，逆に企業 A にとっては企業 B が確率 2/7 で規格 X を選んでいると予想したときに規格 X と規格 Y が同じ利得をもたらす戦略になる。5/7 と 2/7 がつじつまの合う予想になっている。

ナッシュ (John Nash) はプレイヤーの数や戦略の数が 2 以上の場合も含めて一般的に次のような定理を証明した[*7]。

ナッシュの定理 混合戦略を考えるとあらゆるゲームに少なくとも一つのナッシュ均衡が存在する。

このナッシュの業績にちなんで**ナッシュ均衡**と呼ばれている。前章で見たクールノー均衡，ベルトラン均衡もナッシュ均衡の一種である。

[*7] この定理の証明にはブラウワーの不動点定理（またはそれの拡張版である角谷の不動点定理）が用いられている。詳しくは数理経済学の書物を参照されたい。ブラウワーの不動点定理の証明については上下統合版 pdf ファイルの付録で解説している。

■混合戦略の図解

ゲーム 3 の均衡

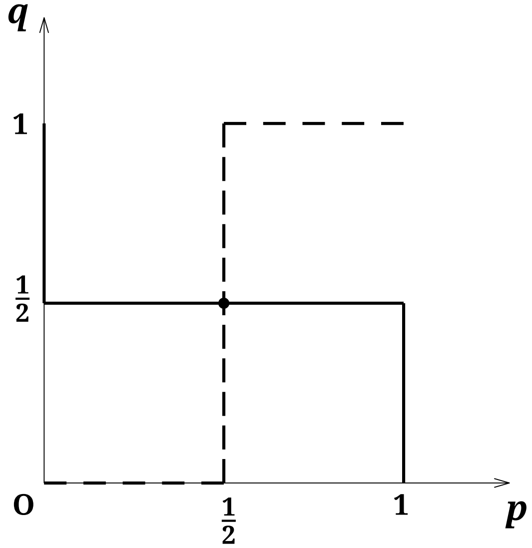
p. 179 の (4.1)，(4.2) よりプレイヤー A の最適反応は

(1). $q < \frac{1}{2}$ のとき $p = 1$。
(2). $q = \frac{1}{2}$ のとき p は任意。
(3). $q > \frac{1}{2}$ のとき $p = 0$。

プレイヤー B の最適反応は

(1). $p < \frac{1}{2}$ のとき $q = 0$。
(2). $p = \frac{1}{2}$ のとき q は任意。
(3). $p > \frac{1}{2}$ のとき $q = 1$。

横軸にプレイヤー A が X を選ぶ確率 p，縦軸にプレイヤー B が X を選ぶ確率 q をとってこれを図に表すと以下のようになる。太線と破線で描いたものがそれぞれプレイヤー A と B の最適反応を表す曲線であり，互いに交わる点がナッシュ均衡となる。このケースでは交点は $(p, q) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 一つだけで，これが唯一のナッシュ均衡である。



ゲーム 2 の均衡

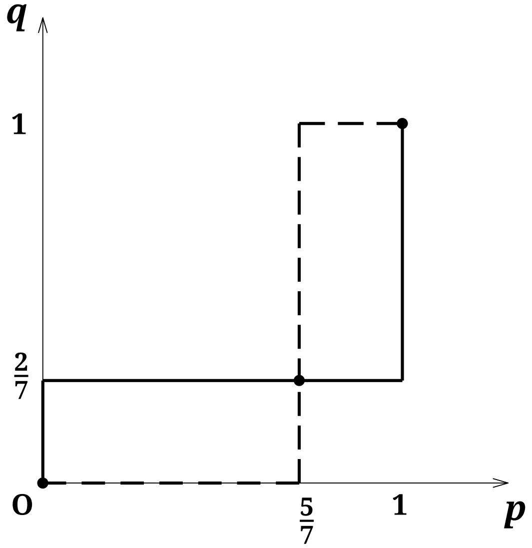
p. 181 の (4.3)，(4.4) よりプレイヤー A の最適反応は

(1). $q < \frac{2}{7}$ のとき $p = 0$。
(2). $q = \frac{2}{7}$ のとき p は任意。
(3). $q > \frac{2}{7}$ のとき $p = 1$。

プレイヤー B の最適反応は

(1). $p < \frac{5}{7}$ のとき $q = 0$。
(2). $p = \frac{5}{7}$ のとき q は任意。
(3). $p > \frac{5}{7}$ のとき $q = 1$。

横軸にプレイヤー A が X を選ぶ確率 p，縦軸にプレイヤー B が X を選ぶ確率 q をとってこれを図に表すと以下のようになる。太線と破線で描いたものがそれぞれプレイヤー A と B の最適反応を表す曲線である。交点は $(p, q) = (1, 0)$，$(p, q) = (0, 1)$，$(p, q) = (\frac{5}{7}, \frac{2}{7})$ の三つあり，それぞれがナッシュ均衡である。その内，初めの二つは純粋戦略による均衡である。



演習問題 36 の解答例（上下統合版では 82）

プレイヤー A が X を選ぶ確率を $p(0 \leqq p \leqq 1)$，プレイヤー B が X を選ぶ確率を $q(0 \leqq q \leqq 1)$ とすると，プレイヤー A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = pq + 2p(1-q) + 2(1-p)q + 2(1-p)(1-q) = 2 - pq$$

$$\pi_B = 2pq + 3p(1-q) + 3(1-p)q + (1-p)(1-q) = 1 + 2p + 2q - 3pq = 1 + q(2-3p) + 2p$$

となる。各プレイヤーの最適反応は以下の通りである。

(1). プレイヤー A の最適反応
- (i) $0 < q \leqq 1$ のときは $p = 0$ が最適。
- (ii) $q = 0$ のときは p の値は任意。

(2). プレイヤー B の最適反応
- (i) $\frac{2}{3} < p \leqq 1$ のときは $q = 0$ が最適。
- (ii) $0 \leqq p < \frac{2}{3}$ のときは $q = 1$ が最適。
- (iii) $p = \frac{2}{3}$ のときは q の値は任意。

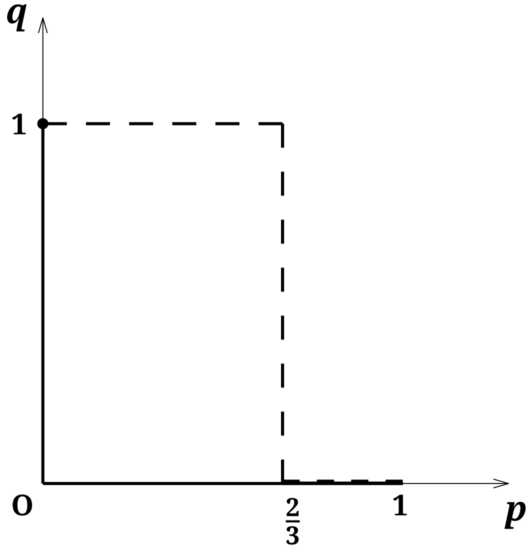
以上によってナッシュ均衡は次のように分類される。

(1). $p = 0, q = 1$。これはプレイヤー A が Y，B が X を選ぶ純粋戦略からなる均衡である。

(2). $q = 0$ で $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$。この均衡ではプレイヤー B は純粋戦略として Y を選ぶが，プレイヤー A は $\frac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ の範囲で純粋戦略（X）または混合戦略を選ぶ。したがってこの均衡には次のような均衡も含まれる。

「$p = 1, q = 0$，プレイヤー A が X，B が Y を選ぶ純粋戦略からなる均衡」

図解すると以下のようになる。やはり太線と破線で描いたものがそれぞれプレイヤー A と B の最適反応を表す曲線である。太線と破線が重なっている箇所はすべてがナッシュ均衡である。



■ジャンケンゲーム　ジャンケンのゲームを考えよう。プレイヤーを A，B とすると，それぞれ戦略はグー，チョキ，パーの 3 つであり，これらを G, C, P と表す。そのゲームの利得表は表 2.6 のように表現される。

プレイヤーBの戦略

		G	C	P
プレイヤーAの戦略	G	0, 0	1,-1	-1, 1
	C	-1, 1	0, 0	1, -1
	P	1,-1	-1, 1	0, 0

表 2.6　ジャンケンゲーム

勝てば利得は 1，負ければ -1，あいこの場合は 0 とする。このゲームに純粋戦略に限定したナッシュ均衡はない。混合戦略を考えよう。プレイヤーAが G, C, P をそれぞれ確率 $p_A, q_A, 1-p_A-q_A$ で出し，プレイヤーBが G, C, P を確率 $p_B, q_B, 1-p_B-q_B$ で出すとすると，プレイヤーAの期待利得は

$$\begin{aligned}\pi_A =& p_A[0p_B + q_B - (1-p_B-q_B)] + q_A[-p_B + 0q_B + (1-p_B-q_B)] \\ &+ (1-p_A-q_A)[p_B - q_B + 0(1-p_B-q_B)] \\ =& p_A(3q_B-1) + q_A(1-3p_B) + p_B - q_B\end{aligned}$$

となる。したがって混合戦略の均衡においては

$$3q_B - 1 = 0$$

$$1 - 3p_B = 0$$

が成り立たなければならない。これらから

$$p_B = q_B = \frac{1}{3}$$

同様にプレイヤーBの期待利得を考えることによって

$$p_A = q_A = \frac{1}{3}$$

が求まる。つまりグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すような戦略の組が混合戦略を含めたときのナッシュ均衡である。

2.2.4　支配される戦略の逐次消去

図の囚人のジレンマの例を考えてみよう。

B の戦略

		X	Y
A の	X	4, 4	0, 6
戦略	Y	6, 0	2, 2

B が X，Y どちらの戦略を選んでも A は Y を選ぶ方がよい。同様に A がどちらの戦略を選んでも B は Y を選ぶ方がよい。そのとき A，B それぞれについて Y が X を強く支配する（強支配する）と言う（X は Y に強く支配される）。このような場合両プレイヤーにとって相手の戦略に関わらず X は最適反応にはなりえない。したがってナッシュ均衡を構成する戦略には含まれない（混合戦略を考えても同様）から X を省いてゲームを考えてもよいと考えられる。まず A の戦略 X を消去するとゲームは次のようになる。

B の戦略

		X	Y
A の戦略	Y	6, 0	2, 2

ここで B にとっても X は Y に強く支配されているからこれを消すと双方にとって Y だけが残り，ともに Y を選ぶ状態，すなわちナッシュ均衡が得られる。このようにして選ばれる戦略を順に絞りながら均衡を考えて行く方法を「**強く支配される戦略の逐次消去**」と言う。別の例を考える。

B の戦略

		X	Y
A の	X	4, 4	0, 6
戦略	Y	6, 2	2, 0

このゲームでは A にとって X は Y に強く支配される戦略であるが，B にとってはそうではない。A がどちらを選ぶかで B の最適反応は異なる。しかし A の戦略 X を消去するとゲームは

B の戦略

		X	Y
A の戦略	Y	6, 2	2, 0

となり，この状態では B にとって Y が X に強く支配されているから Y を消去すると (Y,X) という戦略の組だけが残りそれがナッシュ均衡になる。これも（と言うよりこのような手順が）強く支配される戦略の逐次消去である。B がどちらを選んでも（あるいは混合戦略を選んでも）A は絶対に X を選ばない。A が X を選ばないとすると B にとって Y が最適反応になることはありえないので消去してもナッシュ均衡を見つけるのに問題はない。互いの戦略が 3 つ以上あるゲームにおいてこの手順で戦略を消去した結果 2 つずつ（あるいはそれ以上）の戦略が残った場合，そのゲームでナッシュ均衡を考えることによってもとのゲームのナッシュ均衡が得られる。さらに別の例を考える。

B の戦略

		X	Y
A の	X	4, 4	0, 4
戦略	Y	4, 2	2, 0

このゲームには 2 つの（純粋戦略による）ナッシュ均衡がある。(X,X) と (Y,X)。また，A, B にとって X も Y も他方に強く支配される関係にはなっていない。しかし A にとっては X が Y より大きい利得を与えることはなく Y の方が X より大きい利得を与えることがある。このような場合 A にとって X は Y に弱く支配される（弱支配される）と言う。同様に B にとっては Y が X に弱く支配されている。弱く支配される戦略を順に消去して均衡を考える手順を「**弱く支配される戦略の逐次消去**」と言う。まず A の戦略 X を消去するとゲームは次のようになる。

B の戦略

		X	Y
A の戦略	Y	4, 2	2, 0

このゲームにおいては B にとって Y が X に（強く）支配されているのでこれを消すとナッシュ均衡 (Y,X) が得られる。しかしこの方法によってはもう 1 つのナッシュ均衡が消えて

しまう。このように弱く支配される戦略を消去してゲームの均衡を考えて行く手順によってはすべてのナッシュ均衡を見つけられない可能性がある。

せっかくだから戦略が 3 つのゲームも考えてみよう。

B の戦略

		X	Y	Z
A の	X	4, 4	0, 4	3, 6
戦略	Y	4, 2	2, 0	3, 3
	Z	2, 2	1, 1	1, 0

このゲームの純粋戦略によるナッシュ均衡は (X,Z) と (Y,Z) の 2 つある。A にとって Z は Y に強く支配される戦略であるが，B の戦略にはそのような関係はない（A が Z を選んだ場合を考えればよい）。A の戦略 Z を消去するとゲームは

B の戦略

		X	Y	Z
A の	X	4, 4	0, 4	3, 6
戦略	Y	4, 2	2, 0	3, 3

となる。このゲームでは B にとって X，Y がともに Z に強く支配されているのでそれらを削除するとナッシュ均衡 (X,Z)，(Y,Z) の 2 つの状態しか残らない。一方もとのゲームにおいて A にとって X が Y に弱く支配されているのでそれも消去するとナッシュ均衡 (X,Z) が消えてしまう。ただし B にとって Y が X に弱く支配されているので，それを先に消去するとゲームは

B の戦略

		X	Z
A の	X	4, 4	3, 6
戦略	Y	4, 2	3, 3
	Z	2, 2	1, 0

のようになり A にとって X が Y に弱く支配される関係ではなくなるので Z のみが消去され 2 つのナッシュ均衡はともに残る。このように弱く支配される戦略を消去する順番によっては残る均衡が異なることがある。

2.3　動学的なゲームと部分ゲーム完全均衡

前節では二人のプレイヤーがそれぞれの戦略を同時に 1 回限り選択するという構造をもったゲーム，同時決定ゲームを考えた。先に述べたように**同時に**というのは時間的に同時であるかどうかということではなく，各プレイヤーが相手がどのような戦略を選んだかを知ることができない状況で自分の戦略を選ばなければならないという意味である。それ

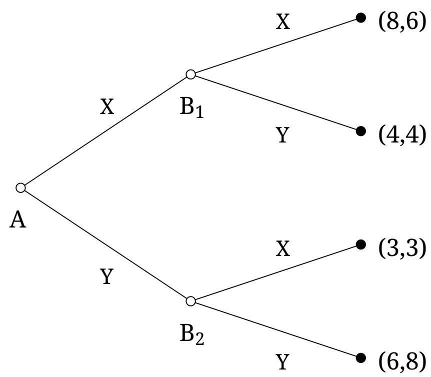


図 2.1 ゲーム 4–動学的な互換性のゲーム（展開型ゲーム）

に対して一方のプレイヤーが先に意思決定をして行動を選び，その結果を見てからもう一方のプレイヤーが行動を選ぶという構造をもったゲームも考えられる。プレイヤーが交互に行動を選ぶのでこのようなゲームは交互行動ゲームと呼ぶことができる。またゲームの進行の中で時間の流れを考えているので**動学的なゲーム** (dynamic game) とも呼ばれる。やはりプレイヤーは互いに相談・協力することができないと仮定するので非協力ゲームである。

この節と次の節では純粋戦略のみを考える。

2.3.1 動学的なゲームとゲームの樹・展開型ゲーム

前節のゲーム 2 をもとにして次の例を考えてみよう。

ゲーム 4 ゲーム 2 と同様に企業 A と企業 B が製品の規格 X または Y を選ぶゲームであるが，企業 A が先にどちらの規格を選ぶかを決め，その結果を見てから企業 B が規格を選ぶ。

ゲーム 4 の構造を図に表すと図 2.1 のようになる。このようにゲームにおける意思決定の流れを樹が枝分かれするように表したものを**ゲームの樹** (game tree) あるいは**展開型ゲーム** (extensive form game) と呼ぶ[*8]。図の点 A は企業 A が戦略を決める時点を，点 B_1 と B_2 は企業 B が戦略を決める時点を示す。A と B_1 あるいは A と B_2 を結ぶ線の上または下に書かれている X や Y は各プレイヤーが選択した戦略を表す。右側に並んでいる 4 つの

[*8] 展開型ゲームは各プレイヤーにとっての行動の選択肢だけではなく，その行動を選ぶ順番やゲームの流れの中での位置関係，意思決定をする時点での情報の状態などがわかるようにゲームを記述するものでありゲームの樹を用いるとは限らない。

		企業Bの戦略			
企業Aの戦略		XX	XY	YX	YY
	規格 X	8,6	8,6	4,4	4,4
	規格 Y	3,3	6,8	3,3	6,8

表 2.7　ゲーム 4–動学的な互換性のゲーム（標準型ゲーム）

黒い点は各プレイヤーがそれぞれの戦略を選んでゲームが終了する状態を表しており，各点の右に書かれている数字は各プレイヤーの利得である。左側の数字が企業 A の利得を右側の数字が企業 B の利得を表す。

このゲームでの企業 A の戦略の選択肢は静学的なゲームの場合と同じく規格 X と規格 Y の 2 つであるが，企業 B は企業 A の行動を見てから自分の行動を決めるので，企業 A が規格 X を選ぶか規格 Y を選ぶかに応じて 4 つの戦略の選択肢を持つ[*9]。企業 B の戦略は具体的には次のように表される。

(1). 戦略 XX
　　企業 A が規格 X を選んでも規格 Y を選んでも規格 X を選ぶ
(2). 戦略 XY
　　企業 A が規格 X を選べば規格 X を，企業 A が規格 Y を選べば規格 Y を選ぶ。
(3). 戦略 YX
　　企業 A が規格 X を選べば規格 Y を，企業 A が規格 Y を選べば規格 X を選ぶ。
(4). 戦略 YY
　　企業 A が規格 X を選んでも規格 Y を選んでも規格 Y を選ぶ。

戦略 XY と YX に見られるように，企業 B は企業 A の戦略に応じて同じ規格を選ぶことも異なった規格を選ぶことも可能なので 4 つの選択肢を持つ。このように動学的なゲームで後から戦略を選ぶプレイヤーは静学的なゲームにおけるよりも多くの選択肢を持つことになる。通常静学的なゲーム（同時決定ゲーム）は表を用いた標準型ゲームとして，動学的なゲーム（交互行動ゲーム）はゲームの樹を用いた展開型ゲームで表されることが多いが，動学的なゲームを標準型ゲームとして表すこともできる。ゲーム 4 を標準型ゲームで表現すると表 2.7 のようになる。

2.3.2　部分ゲーム完全均衡

表 2.7 によってゲーム 4 のナッシュ均衡を考えてみよう。まず各プレイヤーの最適反応を調べてみる。

[*9] 戦略とは状況に応じて選ばれる行動の組み合わせであるが，ここでは企業 A が選んだ行動に応じて企業 B が選ぶ行動の組み合わせが企業 B の戦略である。

(1). 企業 A の最適反応
  (i) 企業 B が戦略 XX を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
    X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 3
  (ii) 企業 B が戦略 XY を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
    X を選ぶと利潤は 8，Y を選ぶと利潤は 6
  (iii) 企業 B が戦略 YX を選ぶ場合 → 規格 X を選ぶのが最適
    X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 3
  (iv) 企業 B が戦略 YY を選ぶ場合 → 規格 Y を選ぶのが最適
    X を選ぶと利潤は 4，Y を選ぶと利潤は 6

(2). 企業 B の最適反応
  (i) 企業 A が規格 X を選んだ場合 → 戦略 XX または XY を選ぶのが最適
    XX を選ぶと利潤は 6，XY を選ぶと 6，YX を選ぶと 4，YY を選ぶと 4
  (ii) 企業 A が規格 Y を選んだ場合 → 戦略 XY または YY を選ぶのが最適
    XX を選ぶと利潤は 3，XY を選ぶと 8，YX を選ぶと 3，YY を選ぶと 8

このゲームのナッシュ均衡は次のように 3 つある。

(1). **ナッシュ均衡** 1–企業 A は規格 X を選び，企業 B は戦略 XX を選ぶ。
企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 XX（または XY）であり，企業 B が戦略 XX を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。

(2). **ナッシュ均衡** 2–企業 A は規格 X を選び，企業 B は戦略 XY を選ぶ。
企業 A が規格 X を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 XY（または XX）であり，企業 B が戦略 XY を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 X なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。

(3). **ナッシュ均衡** 3–企業 A は規格 Y を選び，企業 B は戦略 YY を選ぶ。
企業 A が規格 Y を選んだ場合の企業 B の最適反応は戦略 YY（または XY）であり，企業 B が戦略 YY を選んだ場合の企業 A の最適反応が規格 Y なので，この戦略の組合せはナッシュ均衡である。

以上の 3 つのナッシュ均衡はいずれも合理的なものであろうか。ナッシュ均衡 3 について検討してみよう。ナッシュ均衡 3 では，企業 B は図 2.1 の点 B_1 でも点 B_2 でも規格 Y を選ぶという戦略をとる。この均衡で想定されているように『企業 A が規格 Y を選ぶという前提で考えれば』点 B_1 は各企業が均衡戦略に示された行動を選択する限り実際には実現しない状態なので，企業 B はその時点で規格 X を選ぶと考えても規格 Y を選ぶと考えても利得に影響はなく戦略 YY は最適反応になっている。一方企業 A が規格 Y を選ぶにあたっては，もし『自分が規格 X を選んだとき相手は規格 Y で応じてくるであろう』という想定のもとに行動することになっているが，この想定は合理的ではないのではなかろう

か。もし実際に企業 A が規格 X を選んでゲームが点 B_1 に達したとすれば，企業 B にとっては規格 Y よりも規格 X を選んだ方が利潤が大きくなり有利である。したがって『合理的な均衡では点 B_1 で企業 B が規格 X を選ぶという戦略になっていなければならない』。すると企業 A は，規格 X を選べば 8 の規格 Y を選べば 6 の利潤を得られることになり，点 A において規格 X を選ぶであろう。以上のことからナッシュ均衡 3 は合理的ではない。この均衡は，B が「A が X を選んだら Y を選ぶ」という脅しをかけ，A がその脅しを信用していることによって成り立っている。しかし実際に A が X を選ぶと B は Y ではなく X を選ぶ方が利得が大きいので Y を選ぶインセンティブはない。このような脅しは**信用できない脅し** (incredible threat) と言う。以下で述べる部分ゲーム完全均衡は信用できない脅しにもとづくナッシュ均衡を排除する。

次にナッシュ均衡 1 では点 B_1 で企業 B が規格 X を選ぶようになっているのでそれは合理的であるが，企業 A が規格 Y を選びゲームが点 B_2 に達したときに，企業 B が利得が小さい方の規格 X を選ぶことになっておりやはり合理的ではない。これも信用できない脅しである。『合理的な均衡では点 B_2 で企業 B が規格 Y を選ぶという戦略になっていなければならない』。

以上のことから，ゲーム 4 の合理的な均衡はナッシュ均衡 2 であることがわかる。

動学的なゲームの合理的な均衡を定義するのに次に示す部分ゲームの概念が必要となる。

部分ゲーム (subgame)　動学的なゲームにおいて，途中のある時点から先が一つの独立したゲームになっている場合，その途中の時点からのゲームを部分ゲーム (subgame) と呼ぶ。また全体のゲームそのものも一つの部分ゲームと見なされる。

ゲーム 4 にはそれ自身の他に，点 B_1 から始まるゲームと点 B_2 から始まるゲームの 2 つの部分ゲームがある。それぞれ部分ゲーム 1 と部分ゲーム 2 と呼ぶことにする。部分ゲーム 1 におけるプレイヤーの利得は点 B_2 での意思決定の影響を受けない。また部分ゲーム 2 における利得は点 B_1 での意思決定の影響を受けない。すなわち 2 つの部分ゲームは互いに独立している。この 2 つの部分ゲームにおいては企業 A は意思決定をする機会がなく企業 B のみが戦略を選択することができるが，ゲームであることには違いがない。企業 B にとっては点 B_1 では規格 X を，点 B_2 では規格 Y を選ぶのが最適なので，それらの戦略がそれぞれ部分ゲーム 1 と部分ゲーム 2 のナッシュ均衡になる。したがってゲーム 4 の 3 つのナッシュ均衡のうちナッシュ均衡 1 では点 B_2 における企業 B の戦略が部分ゲームのナッシュ均衡になっていない。またナッシュ均衡 3 では点 B_1 における企業 B の戦略が部分ゲームのナッシュ均衡になっていないことがわかる。ナッシュ均衡 2 においては部分ゲーム 1，部分ゲーム 2 ともにナッシュ均衡となる戦略が選ばれている。上で見た均衡の合理性とは戦略が各部分ゲームにおいてナッシュ均衡になっているということである。以上のことから動学的なゲームについて次の均衡概念を得る。

部分ゲーム完全均衡　動学的なゲームにおいて，そのゲームに含まれるすべての部分ゲームにおいてそれぞれナッシュ均衡となるような戦略の組合せを**部分ゲーム完全均衡** (subgame perfect equilibrium) と呼ぶ。

ゲーム 4 の部分ゲーム完全均衡はナッシュ均衡 2 だけである。部分ゲーム完全均衡の概念はゼルテン (Reinhert Selten) によって提唱されたものであり，動学的なゲームにおいてナッシュ均衡がいくつもある場合により合理的な均衡を選び出すのに用いられる。

2.3.3　部分ゲーム完全均衡の見つけ方

上の解説では動学的なゲームを行列を使った標準型ゲームとして表し，そのナッシュ均衡を求めた上でそれぞれの均衡の合理性を検討して部分ゲーム完全均衡を選び出したが，より簡単にゲームの樹を用いて直接部分ゲーム完全均衡を求めることができる。ゲーム 4 は点 A から始まって点 B_1 または B_2 に進むのであるが，逆に点 B_1，B_2 で企業 B にとって最適な戦略を考えることから始めよう。もしゲームが点 B_1 に到達したとすると企業 B は X を選べば利得 6，Y を選べば利得 4 を得るので X を選ぶであろう。これは部分ゲーム 1 のナッシュ均衡である。同様に点 B_2 においては Y を選んだ方が利得が大きいので Y を選ぶことになる。これは部分ゲーム 2 のナッシュ均衡である。以上のような企業 B の行動についての見通しを前提として企業 A は点 A において X か Y を選ぶことになる。X を選んだ場合は企業 B も X を選ぶので A の利得は 8，Y を選ぶと B も Y を選ぶので A の利得は 6 となるから，企業 A は点 A において X を選ぶ。したがって点 A において企業 A が X，点 B_1，B_2 で企業 B はそれぞれ X，Y を選ぶという戦略の組合せが部分ゲーム完全均衡になる。このようにして動学的なゲームの部分ゲーム完全均衡は，ゲームを最後の方からさかのぼって解いていくことによって見つけることができる。このような動学的なゲームの解法は**逆向き推論法** (backward induction)[*10] と呼ばれている。

前章で見た複占におけるシュタッケルベルク均衡は部分ゲーム完全均衡の一種である。シュタッケルベルク均衡は，一方の企業が先に産出量を決め，もう一方がそれを見てから自らの産出量を決める（見てからでないと決められない）から，先に決める企業は相手の反応を読み込んで産出量を決めることになる。このように複占，寡占の問題はゲーム理論を用いて分析できる代表的な経済学のテーマである。

2.3.4　動学的なゲームの応用：銀行の取り付けゲーム

二人の投資家が銀行に D の預金をし，銀行はその資金をある投資プロジェクトに投資している。その預金を満期前（プロジェクトが完成する前）に引き出すか満期まで待つかの選択ができるが，一人が満期前に引き出せばもう一人もそうしなければならない。二人が

[*10] この訳語は R. ギボンズ（福岡正夫他訳）『経済学のためのゲーム理論入門』（創文社）による。

同時に満期前に引き出した場合にはそれぞれ r を受けとり，一人だけが引き出した場合にはその人が D を，もう一人が $2r-D$ を受け取ってゲームが終わる。どちらも満期前に引き出さなければゲームは満期後に進む。ともに満期後に引き出せば R を，一人だけが満期後に引き出せばその人は $2R-D$ を，もう一人が D を受け取ってゲームが終わる。どちらも引き出さなければ銀行は R ずつを返してゲームが終わる。このゲームは満期前と満期後の 2 段階のゲームになっている。それぞれは標準型ゲームである。$R > D > r > \frac{D}{2}$ と仮定する。

まず満期後を考えると $R > D$ かつ $2R-D > R$ なので二人にとって引き出すことが支配戦略（相手が引き出しても引き出さなくても引き出すことが最適）になっており，ともに引き出すという戦略の組がナッシュ均衡である。利得表は以下の通り。満期後のゲームは全体のゲームの部分ゲームになっている。

		投資家２	
投資		引き出す	引き出さない
家１	引き出す	R, R	2R-D, D
	引き出さない	D, 2R-D	R, R

満期後のナッシュ均衡を前提にすると満期前のゲームの利得表は次のようになる。

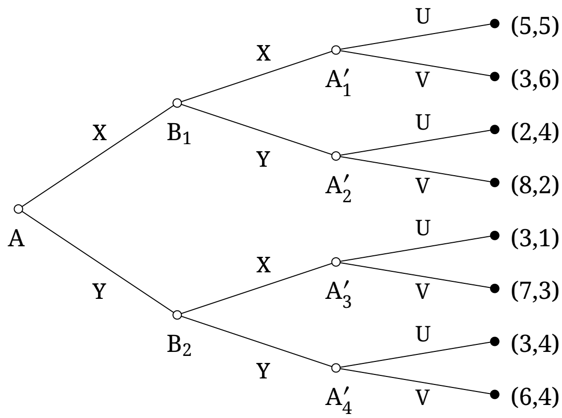
		投資家２	
投資		引き出す	引き出さない
家１	引き出す	r, r	D, 2r-D
	引き出さない	2r-D, D	R, R

$r > 2r-D$，$R > D$ であるから，相手が引き出すとき各投資家の最適反応は「引き出す」，相手が引き出さないときの最適反応は「引き出さない」である。したがってこのゲームには「ともに満期前に引き出す」という戦略の組と「ともに満期前には引き出さず，ともに満期後に引き出す」という戦略の組の二つの純粋戦略によるナッシュ均衡がある。そのナッシュ均衡と満期後の「ともに引き出す」というナッシュ均衡の組がゲーム全体の部分ゲーム完全均衡である。

$R > D$ であるからともに満期まで待つ方がお互いにとって得策であるが，相手が満期前に引き出すのではないかという疑心暗鬼に陥ると自分も引き出すことが最適になってしまうのである。そのような均衡は銀行に対する取り付けと解釈できる。待っていた方が得だから合理的根拠を欠いた取り付けだと言えるかもしれないが，人が取り付けに走れば自分もそうした方がよいという意味では合理的である。満期前のゲームは「協調ゲーム」の例になっている。

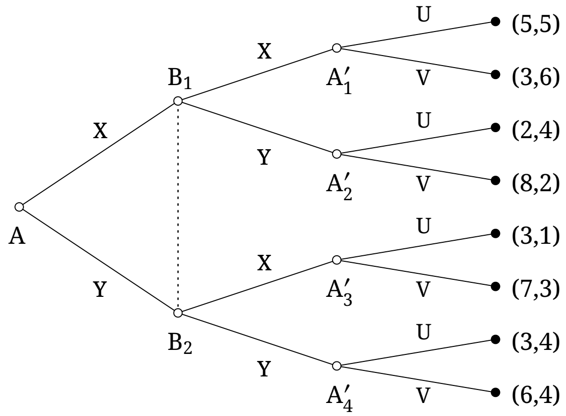
2.3.5　部分ゲーム完全均衡の補足

下の図に表されたゲームを考える。プレイヤー A は A および A_1'，A_2'，A_3'，A_4' のいずれかで行動を選ぶ。つまり A は 2 度選択の機会がある。B の選択の機会は 1 度だけであり B_1，B_2 のいずれかで行動を選ぶ。ゲームを逆向きに考えて行くと A_1' において A は U を，A_2' においては V を，A_3'，A_4' においても V を選ぶ。それを前提にすると B は B_1 において X を，B_2 においては Y を選ぶ。さらにそれを前提にすると A においてプレイヤー A は Y を選ぶ。そのような選択が部分ゲーム完全均衡である。



結果として A は Y と V を選び，B は Y を選んで利得は $(6,4)$（左側が A の利得）が実現するが，部分ゲーム完全均衡を表すには各点における選択のすべてを記述しなければならない。このゲームでは各点から始まるゲームがすべて部分ゲームになっている。

次に下の図に表されたゲームを考える。上のゲームとの違いはプレイヤー B にとってプレイヤー A が X を選んだか Y を選んだかがわからないという点である。B_1，B_2 が点線で結ばれているのは二つの点を B が区別できないという意味であり，B_1 と B_2 からなる集合は B の情報集合と呼ばれる（二つの点を線で結ぶのではなく楕円で囲む書き方もある）。このゲームは，まず A と B が同時に X か Y を選び，その結果を見てから A が U か V を選ぶという構造になっている。



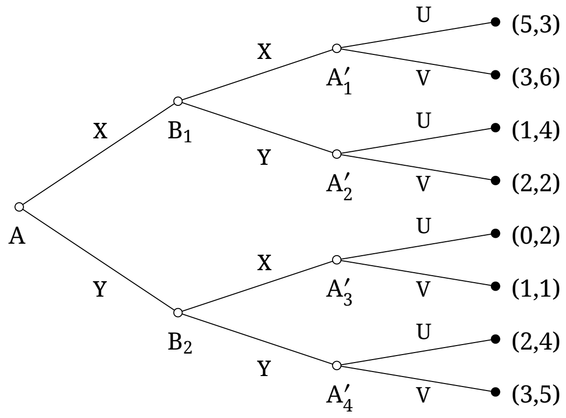
A'_1，A'_2，A'_3，A'_4 における A の意思決定は上のゲームと同じであり，それを前提にすると X と Y の選択は次の標準型ゲームで表される。

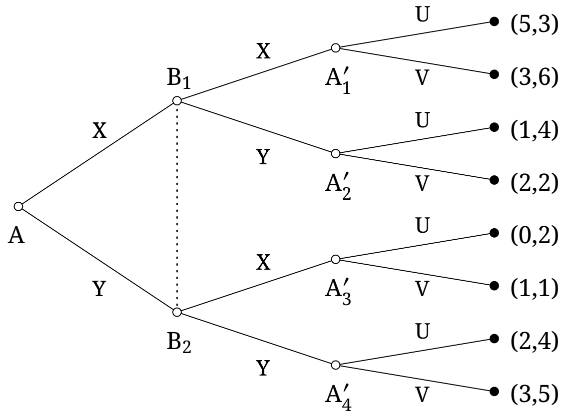
B の戦略

		X	Y
A の	X	5, 5	8, 2
戦略	Y	7, 3	6, 4

この標準型ゲームには純粋戦略によるナッシュ均衡はない。混合戦略によるナッシュ均衡はあり（A が $\frac{1}{4}$ の確率で，B が $\frac{1}{2}$ の確率でそれぞれ X を選ぶ戦略の組み合わせ），それが（A'_1，A'_2，A'_3，A'_4 における A の意思決定を含めて）このゲームの部分ゲーム完全均衡である。もちろん純粋戦略に限定すれば部分ゲーム完全均衡はない。このゲーム（図に表されたゲーム）では全体のゲームと A'_1，A'_2，A'_3，A'_4 の各点から始まるゲームが部分ゲームになっているが，B_1 または B_2 から始まる部分ゲームはない。

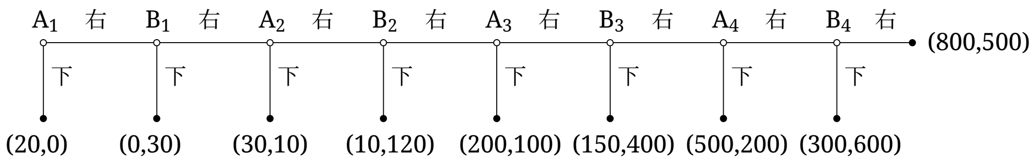
練習問題として次の二つのゲームを考えてみよう。





上のゲームでは A も B も X を選ぶ戦略の組が（A による U または V の選択と合わせて）部分ゲーム完全均衡になる。右側のゲームには二つの純粋戦略による部分ゲーム完全がある。確認してみていただきたい。

■ムカデゲーム　図のようなゲームを考えてみよう。



ムカデに似た図なのでムカデゲームと呼ばれる。ムカデの足はもっとたくさんあってもよい。プレイヤー A は A_1，A_2，A_3，A_4 で，プレイヤー B は B_1，B_2，B_3，B_4 で右か下かを選ぶ意思決定をする。右を選べば（B_4 を除いて）ゲームは続き，下を選べばゲームは終わる。左側の数字が A の利得である。逆向きに考えると，まず B_4 において B は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，それを前提にすると A_4 において A は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，それを前提にすると B_3 において B は右を選ぶより下を選んだ方が利得が大きいので下を選ぶ，...，とういうように考えて行くと，結局 A_1 において A が下を選んでゲームは終わり，$(20, 0)$ という利得が実現する。これがこのゲームの部分ゲーム完全均衡である。本当にそうなるだろうか？ A は A_1 で右を選ぶと次に B が下を選ぶのではないかと思って下を選ぶ。一方 B は B_1 で右を選ぶと次に A が下を選ぶのではないかと思って下を選ぶ，ということになっている。しかしともに少し我慢すれば 100 を越える利得が得られるのである。実際には何回か右に動き，適当な所で下に降りるという結果になるのではないかと予想されるしそのような実験結果もあるようだが，通常のゲーム理論の論理だけではなく心理学的な要因や，次の最後通牒ゲームと同様に利他的な行動を含めて考える必要があるかもしれない。

■最後通牒（つうちょう）ゲームとその実験について　部分ゲーム完全均衡の応用として最後通牒ゲームというのを紹介しよう。二人のプレイヤー A と B が 1 万円のお金を分け合うことを考える。そのルールは以下のようなものである。

(1). A が 1 円単位で自分と相手の取り分を提案する。自分が x 円取ると提案したとしよう。
(2). それに対して B は受け入れるか拒否するかを回答する。受け入れれば B の取り分は $10000 - x$ 円であり，拒否すると二人とも 1 円ももらえない。そこでゲームは終わる。再提案はない。

動学的なゲームであるが図を描くまでもないだろう。A が提案した後の状況を考えると B は受け入れれば $10000 - x$ 円もらえ，拒否すれば 1 円ももらえないから $x < 10000$ ならば受け入れるのが最適であるが，$x = 10000$ のときには受け入れても拒否しても結果は 1 円ももらえないので受け入れも拒否もどちらも最適な行動である。このとき受け入れを選ぶものと考えよう。すると，それに対応して A は $x = 10000$，すなわち全部自分が取るという提案をするのが最適である。これが一つの部分ゲーム完全均衡である。一方，その提案に対して B が拒否を選ぶとすると A は $x = 9999$，すなわち B に 1 円あげるという提案をすればよい。これが二つ目の部分ゲーム完全均衡である。1 円単位ではなくお金をいくらでも細分化できるならば後者の部分ゲーム完全均衡においても限りなく $x = 10000$ に近づく。

最近はやりの実験経済学でこの最後通牒ゲームの実験が行われている。それによると以下のような事実が報告されている。

(1). プレイヤー B は自分の取り分があまりにも小さい（$10000 - x = 2000$ 程度以下の）提案は受け入れず A を道連れにしてともに 0 になることを選ぶ。
(2). プレイヤー A はそもそも相手にあまり不利な提案はせず，だいたい $x = 5000$ から $x = 7000$ くらいの提案をする。

これらの結果はゲーム理論が間違っていることを意味するのであろうか？ そんなことはない。そうではなくプレイヤーの利得（「効用」というべきかもしれない）が必ずしも自分の取り分だけでは決まらず，自分と相手との取り分の差にも依存するということを考えなければならないのである。上の 2 点について検討してみると。

(1). A の取り分と自分の取り分との差が大きいとプレイヤー B の利得が小さくなるのであまり x が大きい提案は受け入れない。これは人間が自分と比べて人の豊かさを羨む（あるいは妬む）という性質，つまり嫉妬心を持つということを意味すると考えられる。
(2). A にとっても同様に自分の取り分と B の取り分との差が大きいと利得が小さくなるのであまり x が大きい提案はしない。これは人間が必ずしも利己的に行動するばか

りではなく「公平性」や「平等」ということも意識しているということ，つまりより公平な提案をすることによって満足を得るということを意味すると考えられる。ただし，A の行動についてはあまり x が大きい提案は B によって拒否されるだろうという推測によるものであるという側面もあるかもしれない。

なお，このような場合に「人間は必ずしも合理的ではない」と言われることがあるが，それは違う。「利己的でない」ということと「合理的でない」ということとはまったく異なる。ゲーム理論で「合理的」とはプレイヤーが自らの利得を最大化するように行動（あるいは戦略）を選択するということであるが，上で述べたようにその利得が自らの取り分の大きさだけではなく相手との差にもよるとするならば，そのような利得を最大化することこそが「合理的」なのである。金儲け第一主義者にとっては金儲けを追求することが，他人のために尽くす人にとってはそうすることが「合理的」な行動なのである。

実験経済学の参考文献は，川越敏司「実験経済学」（東京大学出版会）。

さて，B が嫉妬心を持ち A が利他愛を持つようなケースをゲーム理論的に考えてみよう。それぞれの利得が次の式で表されるとする。

$$u_A = x_A - \frac{1}{12000}(x_A - x_B)^2$$

$$u_B = x_B - \frac{1}{2}(x_A - x_B)$$

u_A，u_B は各プレイヤーの利得，x_A，x_B はそれぞれの取り分であり $x_A \geq x_B$ を前提とする。各プレイヤーにとって互いの取り分の差が大きいほど利得は小さくなる。B が A の提案を受け入れれば $x_B = 10000 - x_A$ であるが，拒否すれば $x_A = x_B = 0$，したがって $u_A = u_B = 0$ である。A の提案を x として（$x \geq 5000$ とする）B がそれを受け入れたときの利得は $u_B = 10000 - x - \frac{1}{2}(2x - 10000) = 15000 - 2x$，拒否したときの利得は $u_B = 0$ であるから，$x \leq 7500$ のときは受け入れることが最適であり，$x > 7500$ のときには拒否するのが最適である。つまり B は自分の取り分が 2500 円以上でなければ受け入れない。$\frac{1}{2}$ を変えればこの数字も変わる。混合戦略を考えるのは面倒なので = のときは受け入れるものとしよう。それを前提にすると A の利得は

(1). B が提案を受け入れるときは $u_A = x - \frac{1}{12000}(2x - 10000)^2$ である。これは $x = 6500$ のとき最大値 5750 をとる。

(2). B が拒否するときは $u_A = 0$,

となる。したがって A の最適な戦略は $x = 6500$ を選ぶことであり，これは 7500 以下であるからその提案を B が受け入れるという戦略の組が部分ゲーム完全均衡となる。$\frac{1}{12000}$ を変えれば x の値も変わる。

B が $x = 7500$ 以下の提案しか受け入れないというのが嫉妬心によるものであり，A が $x = 6500$ を提案するというのが利他愛によるものである。A が利他愛を持たない場合（$u_A = x_A$ のとき）は $x = 7500$ を提案する（$x = 7500$ のとき $u_A \approx 5417 > 0$ である）。

2.4　繰り返しゲーム

2.4.1　トリガー戦略

最初に見たゲーム 1 を繰り返すような動学的ゲームを考えてみる。もう 1 度利得表を書いてみよう。

		企業Bの戦略	
		高価格	低価格
企業Aの戦略	高価格	5, 5	1, 7
	低価格	7, 1	2, 2

このゲームを静学的なゲームと見た場合のナッシュ均衡は，ともに「低価格」を選ぶ戦略の組であった。このゲームを無限に繰り返すとすると毎回両者が協力して「高価格」を選ぶような戦略の組がナシュ均衡（あるいは部分ゲーム完全均衡）となる可能性がある。企業 A，企業 B が次の戦略を選ぶとする。このような戦略はトリガー（引き金）戦略と呼ばれる[*11]。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。2 回目以降は前回相手が「高価格」を選んでいれば「高価格」を，「低価格」を選んでいればそれ以降は永遠に「低価格」を選ぶ。

両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回 5 の利潤を得る。一方の企業から見て相手が「高価格」を選んでいる状況において 1 度「低価格」を選ぶと利潤 7 を実現できるが，それ以降は相手が「低価格」に転じるので自分も「低価格」を選ぶのが最適となり永遠にその状態が続くから利潤は毎回 2 となる。そこで問題になるのは相手を出し抜いて「低価格」を選んで実現される利益と，それ以降利潤 2 になってしまうことによる損失との比較である。もし企業が将来の利潤を割り引いて考えないのであれば「低価格」を選ぶことは絶対に利益にはならない。すなわちともに「高価格」を選ぶカルテル状態が実現できるが，企業が将来の利潤を割り引く場合は「低価格」を選ぶことが利益になる可能性がある。割引因子 (discount factor) を δ とすると「低価格」を選ぶことが

*11 トリガー戦略以外にもナッシュ均衡となる戦略はあるが，トリガー戦略は最も単純でわかりやすいものである。協力せず常に低価格を選ぶという戦略もナッシュ均衡となる。相手が常に低価格を選ぶ限り自分がゲームのどこかで高価格を選んでも損をするだけである。

絶対に利益にならない条件は次の通りである[*12]。

$$5[1+\delta+\delta^2+\cdots] > 7+2[\delta+\delta^2+\cdots]$$

これより

$$\frac{5}{1-\delta} > 7+\frac{2\delta}{1-\delta}$$

が得られ

$$\delta > 0.4$$

が求まる。したがって割引因子が 0.4 より大きければ（それ以上に割り引かなければ），ともに上記のトリガー戦略を選ぶことが均衡となり結果として「高価格」を選ぶ協力状態が永遠に続く。割引率 (discount rate) r を $\frac{1}{1+r}=\delta$ と定義するとこの条件は $r<\frac{3}{2}$ となる。つまり割引率が 150% より小さければともにトリガー戦略を選ぶことが部分ゲーム完全均衡となる。

2.4.2 より罰則の弱い均衡

トリガー戦略よりも罰則の弱い均衡をもたらす戦略もある。互いに次のような戦略を選ぶものとする。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。相手が「高価格」を選べば次の回では自分も「高価格」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「低価格」を選んだらその後 2 回は自分も「低価格」を選び，3 回目以降は（その 2 回のゲームでの相手の戦略に関わらず）再び「高価格」を選ぶ。以下同様。

両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回 5 の利潤を得る。相手が「高価格」を選んでいる状況において 1 度「低価格」を選ぶと利潤 7 を実現できるが，それ以降は 2 回だけ相手が「低価格」に転じるのでその間は自分も「低価格」を選ぶのが最適となる。3 回目には相手が「高価格」に転じるがそのとき自分がどうすべきかはそこまでの「低価格」を選ぶ 3 回のゲームでの利得による。それが 3 回とも「高価格」を選んで協力するときの利得よりも大きければ「低価格」を続けるのが最適であり，その場合は相手が「高」「低」「低」を繰り返し，自分は「低」を選び続ける。一方，逆に「高価

[*12] 等比数列の和の公式によれば

$$5[1+\delta+\delta^2+\cdots+\delta^{n-1}] > 7+2[\delta+\delta^2+\cdots\delta^{n-1}]$$

が成り立つ条件は

$$\frac{5(1-\delta^n)}{1-\delta} > 7+\frac{2\delta(1-\delta^{n-1})}{1-\delta}$$

である。$n\to\infty$（n が限りなく大きくなる）とすると $\delta^n\to 0$，$\delta^{n-1}\to 0$ なので本文の式が得られる。

格」を選んで協力するときの利得の方が大きければそもそもこのような裏切りをしないことが最適となり，ともに「高価格」を選ぶ協力関係が実現する。そのようになる条件を求める。3 回のゲームで相手が「高」「低」「低」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$7 + 2\delta + 2\delta^2 \tag{2.5}$$

であり，互いに「高」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$5(1 + \delta + \delta^2) \tag{2.6}$$

である。(2.6) が (2.5) より大きくなる条件は $3\delta + 3\delta^2 > 2$ であり，この式から

$$\delta > 0.46$$

が得られる。これはトリガー戦略の場合の $\delta > 0.4$ よりも厳しい条件となっている。ここの戦略では裏切りに対する罰則が弱くなっているので協力が実現しにくくなるのである。

2.4.3 さらに罰則の弱い均衡

しつこいがさらに罰則の弱い均衡をもたらす戦略を考えてみよう。互いに次のような戦略を選ぶものとする。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。相手が「高価格」を選べば次の回では自分も「高価格」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「低価格」を選んだらその後 1 回だけ自分も「低価格」を選び，2 回目以降は再び「高価格」を選ぶ。以下同様。

やはり両者が「高価格」を選んでいれば永遠に「高価格」が続き両企業は毎回 5 の利潤を得る。相手が「高価格」を選んでいる状況において 1 度「低価格」を選ぶと利潤 7 を実現できるが，それ以後は 1 回だけ相手が「低価格」に転じるのでその時は自分も「低価格」を選ぶのが最適となる。2 回目には相手が「高価格」に転じるがそのとき自分がどうすべきかはそこまでの「低価格」を選ぶ 2 回のゲームでの利得による。それが 2 回とも「高価格」を選んで協力するときの利得よりも大きければ「低価格」を続けるのが最適であり，その場合は相手が「高」「低」を繰り返し，自分は「低」を選び続ける。一方，逆に「高価格」を選んで協力するときの利得の方が大きければそもそもこのような裏切りをしないことが最適となり，ともに「高価格」を選ぶ協力関係が実現する。2 回のゲームで相手が「高」「低」を選ぶときの（割引を含めた）自分の利得は

$$7 + 2\delta \tag{2.7}$$

であり，互いに「高」を選び続けるときの（割引を含めた）自分の利得は

$$5(1 + \delta) \tag{2.8}$$

である。(2.8) が (2.7) より大きくなる条件は $3\delta > 2$ であり，この式から

$$\delta > \frac{2}{3}$$

が得られる。これは 2 回罰する時の $\delta > 0.46$ よりも厳しい条件となっている。ここの戦略では裏切りに対する罰則がさらに弱くなっているので一層協力が実現しにくくなるのである。

なお繰り返しの回数が無限ではない（有限回）とすると，常に低価格を選ぶ戦略のみが部分ゲーム完全均衡となる。なぜならば，最後のゲームではともに低価格を選ぶことがわかるのでその前のゲームで高価格を選んでも得られるものがなく低価格を選ぶ。その前のゲームでも高価格を選んでも得られるものがないので低価格を選ぶ。というように考えていくと，結局すべての段階でともに低価格を選ぶことになるからである。しかし戦略が 3 つ以上あると少し話が異なる。

2.5　繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡としっぺ返し戦略

2.5.1　トリガー戦略などが部分ゲーム完全均衡になることの確認

囚人のジレンマタイプのゲームを繰り返すことを考える*13。

2.5.2　トリガー戦略

上の説明ではトリガー戦略などがナッシュ均衡になる，詳しく言えば二人のプレイヤーが互いにトリガー戦略を選ぶ組み合わせがナッシュ均衡になることの説明にしかなっていなかった。すなわち

> ともにトリガー戦略を選ぶと結果として永久にお互いに協力（高価格）を選ぶ状態が続く。どこかで一方が裏切って低価格を選んだとすると最初は 7 の利得が得られるがその次からは互いに低価格を選ぶ状態が続き各回の利得は 2 になる。割引因子が 0.4 より大きければ，裏切ることはそのプレイヤーにとって損である。

これは相手がトリガー戦略が選んでいるならば自分も（途中で裏切ったりせず）トリガー戦略を選ぶことが最適であるという意味で，ナッシュ均衡になる説明である。

部分ゲーム完全均衡であるためには次のことが必要である。

> **互いにトリガー戦略を選び協力が続いていたが，ある時点でどちらかが何かの間違いで低価格を選んだときに，それ以降も互いにトリガー戦略を続けることが最適である。**

*13 以下の部分は「中級ミクロ経済学」の授業で配ったプリントの内容を後から組み込んだものである。完全に融合せずつぎはぎ感が出ていると思う。それも味わっていただきたい。

つまり，どこかの時点で裏切りが生じたときに，その次の回以降のゲームにおいてともにトリガー戦略を選ぶ組み合わせがナッシュ均衡になっていなければならない。

さて，プレイヤー B（企業 B）がどこかで何かの間違いで低価格を選んだとする。すると，トリガー戦略に従えばプレイヤー A（企業 A）はそれ以降低価格を選ぶ。B もそれを知っているからやはり低価格を選び，B が裏切った回以降のゲームでは毎回両者が低価格を選ぶことになる。相手が常に低価格を選んでいる限り自分も低価格を選ぶことが最適であるからそれ自体はナッシュ均衡である。したがってトリガー戦略は部分ゲーム完全均衡になる。この議論において最初に B が裏切ったときの B の利得は関係ない。その後が問題である。

2.5.3　さらに罰則の弱い戦略

さらに罰則の弱い戦略とは以下のような戦略であった。

> まず最初に「高価格」を選ぶ。 2 回目以降は前回に相手が裏切ったときに 1 回だけ低価格で報復し 2 回目からは高価格に戻す。

これが部分ゲーム完全均衡になることを確認する。本文の説明はこの戦略同士がナッシュ均衡になるという説明であった。部分ゲーム完全均衡であるためには，先に裏切ることが得にならないというだけではなく上の議論と同様に（何かの間違いで）裏切りが生じたとしてもこの戦略に従うことが最適でなければならない。

プレイヤー B がどこかで何かの間違いで低価格を選んだとする。すると，この戦略に従えばプレイヤー A はその次の回で低価格を選ぶが 2 回目は高価格に戻す。B もそれを知っているからやはり 1 回目は低価格を選ぶ。B が 1 回目にどちらを選ぶかは 2 回目以降の A の戦略に影響しない（これが次のしっぺ返しと異なる点である)。2 回目以降のゲームを考えると互いにこの戦略に従う限りそこから永久に協力（互いに高価格）が続く。そうなるかどうかは結局そもそもこの戦略がナッシュ均衡となるかどうかということと同じ議論である。したがって割引率が $\frac{2}{3}$ より大きければ両者がこの戦略を選ぶ組み合わせは部分ゲーム完全均衡である。

2 回だけ報復するという戦略についても同様の議論が成り立つ。この場合一方が何かの間違いで低価格を選んだときに 2 回だけともに低価格という状態が続き，3 回目からは高価格に戻る。その 3 回目以降のゲームでも 2 回だけ報復するという戦略がナッシュ均衡になれば全体のゲームの部分ゲーム完全均衡になる。

2.5.4　しっぺ返し戦略 (Tit for tat strategy)

繰り返しゲームではしっぺ返し戦略という戦略がよくとり上げられる。これは次のような戦略である。

　　最初に協力（高価格）を選ぶ。それ以降は前回に相手が選んだ戦略と同じ戦略を選ぶ。

相手が裏切れば裏切り返すが，協力に戻せば次は自分も協力する。

■（割引因子が大きければ）しっぺ返し戦略はナッシュ均衡である。　互いにしっぺ返し戦略を選ぶ組み合わせがナッシュ均衡になることを確認しよう。両者がしっぺ返し戦略を選ぶと高価格による協力が続く。プレイヤー A が途中で裏切って低価格を選んだとして，B がしっぺ返し戦略に従うときに A の裏切りが損になる条件を考える。裏切ったその回において A は 7 の利得を得る。その後は二通りの結果が想定される。一つは A と B が交互に高価格と低価格を選ぶ場合。もう一つは A がそれ以降常に低価格を選び B もしっぺ返し戦略に従って常に低価格を選ぶ場合である。割引因子を δ とすると，前者の場合の裏切った回を含めた A の利得は

$$7+\delta+7\delta^2+\delta^3+7\delta^4+\cdots=\frac{7}{1-\delta^2}+\frac{\delta}{1-\delta^2}=\frac{7+\delta}{1-\delta^2} \tag{2.9}$$

であり，後者の場合の裏切った回を含めた A の利得は

$$7+2\delta+2\delta^2+\cdots=7+\frac{2\delta}{1-\delta}=\frac{7-5\delta}{1-\delta} \tag{2.10}$$

である。一方協力を続けたときの利得は

$$\frac{5}{1-\delta} \tag{2.11}$$

に等しい。(2.11) が (2.9) より大きいための条件は

$$\delta>\frac{1}{2}$$

であり，(2.11) が (2.10) より大きいための条件は

$$\delta>\frac{2}{5}$$

である。したがって $\delta>\frac{1}{2}$ のときしっぺ返し戦略（互いにしっぺ返し戦略を選ぶ組み合わせ）はナッシュ均衡となる。ちなみに $\delta>\frac{1}{5}$ であれば (2.9) が (2.10) より大きい。

　$\delta=\frac{1}{2}$ のときもしっぺ返し戦略であってもそうでなくてもよいという弱い意味ではあるがナッシュ均衡になる。

■しっぺ返し戦略は（特殊な場合を除いて）部分ゲーム完全均衡ではない。　しっぺ返し戦略は割引因子がある程度大きければ（割引率がある程度小さければ）ナッシュ均衡であるが（特殊な場合を除いて）部分ゲーム完全均衡にはならない。そのことを確認してみよう。例えばプレイヤー A が，ある時点で何かの間違いで裏切り（低価格）を選んでしまったとする。そのとき両者がしっぺ返し戦略に従うとするとプレイヤー A の利得は A が裏

切って以降（A が裏切った回は含まない），1，7，1，7，1，... となり，プレイヤー B の利得は，7，1，7，1，7，... となる。前者の合計は

$$1 + 7\delta + \delta^2 + 7\delta^3 + \cdots = 1 + \frac{7\delta}{1-\delta^2} + \frac{\delta^2}{1-\delta^2} = 1 + \frac{7\delta + \delta^2}{1-\delta^2} \tag{2.12}$$

後者の合計は

$$7 + \delta + 7\delta^2 + \delta^3 + \cdots = \frac{7+\delta}{1-\delta^2} \tag{2.13}$$

である。もしプレイヤー A がしっぺ返し戦略に従わずその後常に高価格を選び続け，B がしっぺ返し戦略を続けるならば（そのとき B は最初に低価格を選び以後は高価格を選ぶ）A の利得は

$$1 + 5\delta + 5\delta^2 + \cdots = 1 + \frac{5\delta}{1-\delta} = 1 + \frac{5\delta + 5\delta^2}{1-\delta^2} \tag{2.14}$$

となり，一方プレイヤー B がしっぺ返し戦略に従わず常に高価格を選び続け，A がしっぺ返し戦略を続けるならば（そのとき A も毎回高価格を選ぶ）B の利得は

$$5 + 5\delta + 5\delta^2 + \cdots = \frac{5}{1-\delta} = \frac{5+5\delta}{1-\delta^2} \tag{2.15}$$

となる。しっぺ返し戦略が部分ゲーム完全均衡となるためにはナッシュ均衡の条件に加えて (2.12) が (2.14) より大きく（少なくとも等しく），(2.13) が (2.15) より大きく（少なくとも等しく）なければならない。前者，後者の条件はともに

$$\delta \leq \frac{1}{2}$$

である。したがって上のナッシュ均衡の議論と合わせると $\delta = \frac{1}{2}$ のときにのみ，互いにしっぺ返し戦略を選ぶ組み合わせは弱い意味で部分ゲーム完全均衡である。

2.5.5　一般的な囚人のジレンマとしっぺ返し戦略

一般的な囚人のジレンマとは次のようなゲームである。

		B	
		X	Y
A	X	a, a	b, c
	Y	c, b	d, d

ただし $c > a > d > b$，$b + c < 2a$ が成り立つ。本文の例がこの条件を満たすことを確認していただきたい。上の (2.9)，(2.10)，(2.11) はそれぞれ

$$\frac{c + b\delta}{1-\delta^2},\ \frac{c-(c-d)\delta}{1-\delta},\ \frac{a}{1-\delta}$$

となるから，しっぺ返し戦略がナッシュ均衡となる条件は

$$\delta \geq \frac{c-a}{a-b},\ \text{かつ}\ \delta \geq \frac{c-a}{c-d} \tag{2.16}$$

である。一方 (2.12)，(2.13) はそれぞれ

$$b+\frac{c\delta+b\delta^2}{1-\delta^2},\ \frac{c+b\delta}{1-\delta^2}$$

となり，(2.14)，(2.15) はそれぞれ

$$b+\frac{a\delta+a\delta^2}{1-\delta^2},\ \frac{a+a\delta}{1-\delta^2}$$

となるから，しっぺ返し戦略が部分ゲーム完全均衡となるためには (2.16) に加えて

$$\delta \le \frac{c-a}{a-b}, \tag{2.17}$$

が成り立たなければならない。(2.16)，(2.17) を合わせると

$$\delta=\frac{c-a}{a-b}$$

となり，この条件が成り立つときにのみしっぺ返し戦略は部分ゲーム完全均衡である。しかし，$c-d<a-b$ のときには $\frac{c-a}{c-d}>\frac{c-a}{a-b}$ となり $\delta \ge \frac{c-a}{c-d}$ と $\delta \le \frac{c-a}{a-b}$ が両立しないので，しっぺ返し戦略は部分ゲーム完全均衡にはならない。本文の例では $b=0$，$d=3$ とするとしっぺ返し戦略は部分ゲーム完全均衡ではなくなる。

2.5.6　一般的な囚人のジレンマでのトリガー戦略

上の一般的な囚人のジレンマゲームにおいてトリガー戦略が均衡となる条件は

$$\frac{a}{1-\delta}>c+\frac{d\delta}{1-\delta}$$

となり

$$\delta>\frac{c-a}{c-d}$$

が得られる。これを覚えておけば囚人のジレンマタイプである限りどのようなゲームにも応用できる。これはしっぺ返し戦略が均衡になるための条件の一方と同じである。

■有限回繰り返しゲーム　囚人のジレンマのようにナッシュ均衡が 1 つしかなければ有限回の繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡は毎回ナッシュ均衡に対応した戦略を選ぶことだけであり，協力を維持することはできない。なぜならば最後の回では協力しても意味がないのでナッシュ均衡が実現する。それがわかればその前の回もナッシュ均衡になる。というように逆向きに考えていくと最初からナッシュ均衡だけしか実現しない。しかしナッシュ均衡が 2 つあるゲームでは有限回の繰り返しゲームの部分ゲーム完全均衡において協力が実現する可能性がある。以下のゲームを n 回繰り返すことを考えよう。

Bの戦略

		X	Y	Z
A 戦	X	4, 4	0, 5	0, 0
の 略	Y	5, 0	2, 2	0, 0
	Z	0, 0	0, 0	0, 0

戦略 Z がなければ通常の囚人のジレンマゲームである。このゲームのナッシュ均衡は (Y, Y)，(Z, Z) の 2 つある。そこで繰り返しゲームにおける次のような戦略を考えよう。

> 最後の回は Y，それ以外は X。もし相手がこの戦略から逸脱したら次の回以降は Z を選ぶ。

n 回の繰り返しゲームにおいて m 回目（$m \leqq N-1$）にこの戦略から逸脱するとして得られる利得は（割引は考えない）

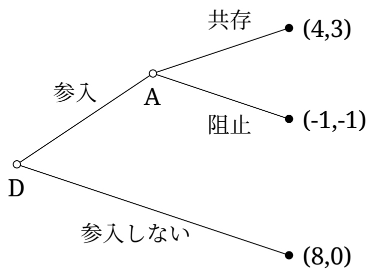
$$4(m-1)+5+(n-m)\times 0 = 4m+1$$

逸脱しない場合は

$$4(n-1)+2 = 4n-2$$

である。$m \leqq n-1$ であるから逸脱しない場合の利得の方が大きい。このように複数のナッシュ均衡があれば悪い方のナッシュ均衡を成す戦略を罰則として用いることによって有限回の繰り返しゲームで（最後の回を除いて）協力を実現できる可能性がある。

■チェーンストアパラドックス　部分ゲーム完全均衡の概念が必ずしも常識と一致しない例としてチェーンストアパラドックスというものがある。ある店 (A とする) が 3 つの地域で独占的に販売しているところに各地域で 1 つ 1 つ（B，C，D）の店が参入するかどうかを考えている状況を取り上げる。まず A と D のゲームを考える。



図において A は A 店が，D は D 店が意思決定する時点を表す。まず D が参入するかしないかを決め，それを見て A が受け入れて共存するか，参入を阻止すべく赤字覚悟で商品の値下げをするかを決める。数字は左側が A の右側が D の利潤である。D が参入しなけれ

ば A は大きな利潤を得られる。参入して共存すればそこそこの利潤，A が参入を阻止する行動に出ればともに赤字になる。このゲームにおいて部分ゲーム完全均衡を考えると D が参入したときに A は共存を選んだ方が得なのでそれを選ぶ。そのことがわかれば D は参入した方が得になるから参入する，ということになる。D 以外の店もすべて同じ状況におかれており，B，C，D の順にこのゲームをプレイすると考えると，まず最後のゲームで D が参入し，A は共存を選ぶ。それを前提に C のゲームを考えるとやはり C が参入し，A は共存を選ぶ。同じようにして B が参入し，A は共存を選ぶ。というようにすべての地域において参入と共存が実現するのが部分ゲーム完全均衡である。この結論は地域がいくつあっても成り立つ。しかし，現実には A が B とのゲームにおいて赤字覚悟で参入阻止行動を選ぶことによって後に続く C，D の参入を思いとどまらせようとすることがあると思われるし，その方が常識に叶っているかもしれない。このように部分完全均衡が意味する合理性が日常的な常識とは異なる場合もある。

この状況を説明するのに，参入した後の各店の利潤が確実ではなく，かつその情報を既存店の方が多く持っているというように不完備情報のゲームとして解釈する考え方もある。

2.6　経済学以外の例–アメリカ，ロシアの核戦略

プレイヤー　アメリカ，ロシア
戦略，行動　核兵器を持つか，持たないか

(1). 静学的なゲーム 1
アメリカとロシアが同時に戦略（行動）を選ぶ

		アメリカの戦略	
ロシアの戦略		持つ	持たない
	持つ	-10, -10	15, -15
	持たない	-15, 15	10, 10

数字は左側がロシアの利得，右側がアメリカの利得，ここで利得とは国民が得る経済的利益や精神的満足感などを合わせたもの。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応
[1] ロシアが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適
持つを選ぶと利得は −10，持たないを選ぶと利得は −15。
[2] ロシアが持たないを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，持つ）。

(2). 静学的なゲーム 2

アメリカの戦略

ロシアの戦略		持つ	持たない
	持つ	-10, -10	5, -15
	持たない	-15, 5	10, 10

相手が核兵器を持たないときに自分が持つ方がよいのか持たない方がよいのかが上のゲームと異なる。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適
持つを選ぶと利得は 5，持たないを選ぶと利得は 10。

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，持つ），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，持たない）の 2 つ。

このゲームは先に見た企業が製品の規格を選ぶゲームと似ているが，そのゲームとは違って 2 つのナッシュ均衡の一方がアメリカに，一方がロシアに有利なものにはなっておらず，（持たない，持たない）が両者にとってより望ましい均衡である。したがって協調してともに「持たない」を選ぶように促す仕組みがあればその均衡が実現できるかもしれないので**協調ゲーム** (coordination game) と呼ばれる。互いに協力はできないので「協力ゲーム」ではなくあくまでも「非協力ゲーム」である。

次の動学的なゲームはこの（持たない，持たない）という均衡を実現する 1 つの仕組みになるかもしれない。

なおこのゲームには混合戦略による均衡があるかもしれない（演習問題とする）。

(3). 動学的なゲーム

静学的なゲーム 2 において先にロシアが行動を選び，それを見てからアメリカが行動を選ぶ。逆でもよい。

(i) ロシアの戦略は

[1] 持つ

[2] 持たない

の 2 通り。

(ii) アメリカの戦略は

[1] もも：ロシアが持てば持つ，持たなければ持つ。

[2] もな：ロシアが持てば持つ，持たなければ持たない。

[3] なも：ロシアが持てば持たない，持たなければ持つ。

[4] なな：ロシアが持てば持たない，持たなければ持たない。

■標準型ゲームで表す　標準型ゲームとは戦略の組み合わせとそれに対する利得の組み合わせで表現するもの。

アメリカの戦略

ロシアの戦略		もも	もな	なも	なな
	持つ	-10,-10	-10,-10	5,-15	5,-15
	持たない	-15,5	10,10	-15,5	10,10

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 →「もも」または「もな」を選ぶのが最適

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 →「もな」または「なな」を選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが「もも」を選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

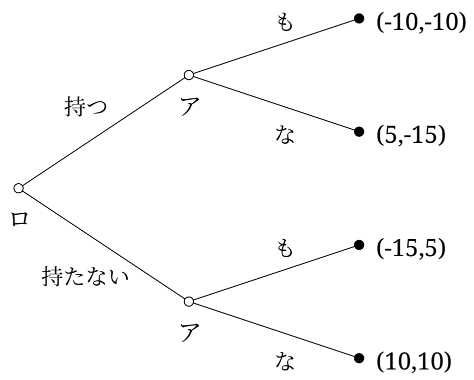
[2] アメリカが「もな」を選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

[3] アメリカが「なも」を選んだ場合 → 持つを選ぶのが最適

[4] アメリカが「なな」を選んだ場合 → 持たないを選ぶのが最適

■部分ゲーム完全均衡　ナッシュ均衡はここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，もも），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，なな），（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，もな）の 3 つ。
しかし（持つ，もも）はロシアが持たないを選んだときにアメリカが持つを選ぶという前提に立っており不合理。これは信用できない脅しである。また（持たない，なな）はロシアが持つを選んだときにアメリカが持たないを選ぶという前提に立っており不合理。合理的なのは（持たない，もな）。
別の方法で確認する。

■展開型ゲームで表す　展開型ゲームとは行動選択の順序を含めて図などを使って表現するもの。



ゲームを後ろから解く。上の「ア」でアメリカは持つを選ぶのが合理的で，下の「ア」では持たないを選ぶのが合理的。そのようなアメリカの行動選択を見越すとロシアは「持たない」を選ぶ。したがって（持たない，もな）が均衡。上下の「ア」から先を 1 つ 1 つのゲーム（部分ゲーム）と見るとそれぞれのゲームで均衡（アメリカが最適な戦略を選ぶよう）になっているのは（持たない，もな）のみ。これが部分ゲーム完全均衡である。
なお静学的ゲーム 1 を動学的なゲームにしても，ともに核兵器を持つのが均衡であることは変わらない。

(4). チキンゲーム
静学的ゲーム 1 に戻って少し設定を変える。利得が次のようであるとする。

	アメリカの戦略		
ロシアの戦略		持つ	持たない
	持つ	-20, -20	15, -15
	持たない	-15, 15	10, 10

ともに核兵器を持つと戦争の危険性が高まり利得が −20 になる。相手が持たないときに持った方が有利でることは変わらない。

■最適反応

(i) アメリカの最適反応

[1] ロシアが持つを選んだ場合 ⟶ 持たないを選ぶのが最適
持つを選ぶと利得は −20，持たないを選ぶと利得は −15。

[2] ロシアが持たないを選んだ場合 ⟶ 持つを選ぶのが最適

(ii) ロシアの最適反応

[1] アメリカが持つを選んだ場合 ⟶ 持たないを選ぶのが最適

[2] アメリカが持たないを選んだ場合 ⟶ 持つを選ぶのが最適

■ナッシュ均衡　互いに最適反応になっている戦略の組み合わせ。ここでは（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持つ，持たない)，（ロシアの戦略，アメリカの戦略）＝（持たない，持つ）の 2 つ。静学的ゲーム 2 と同様に均衡は 2 つあるが「持つ」を選んだ方が有利であるという点が異なる。これを行動を順に選ぶ動学的なゲームにすれば先に選ぶ方が「持つ」を選ぶ均衡が部分ゲーム完全均衡となるのは明らかである。

このタイプのゲームは「チキン（弱虫）ゲーム」と呼ばれる*14。本来のチキンゲームは次のようなものである。

> 2 人の人が乗った車が崖に向かって走っている。一方が先に逃げればその時点で車は止まり，逃げた方が負け（利得 −15)，残った方が勝ちとなる（利得は 15)。どちらも逃げなければ車は崖から落ちて 2 人とも大ケガをする（利得 −20)。たまたま同時に逃げれば引き分けで利得は 10。

「核兵器を持つ」を「逃げない」,「核兵器を持たない」を「逃げる」と変えればゲームの構造はまったく同じである。

このゲームも企業が規格を選ぶゲームに類似したゲームである。ただし互いに異なる規格を選ぶことがナッシュ均衡になる。経済の例としては，2 つの企業がある財の旧製品を売るか新製品を売るかを選択する次のようなゲームが考えられる。

*14 英語ではチキン (chicken) という言葉が弱虫を意味するらしい。

		企業Bの戦略	
企業Aの戦略		新製品	旧製品
	新製品	-20, -20	15, -15
	旧製品	-15, 15	10, 10

互いに新製品を売れば市場を分け合うので開発費をかけた割には売れずに利潤はともに −20。ともに旧製品を売れば消費者はそれしかないからそこそこ売れ，費用はあまりかからないのでともに利潤は 10。一方が新製品，他方が旧製品を売れば新製品を売る企業はたくさん売れるので開発費用を回収してなお利潤は 15，旧製品を売る企業はまったく売れずに利潤は −15 となる。

ナッシュ均衡は（企業A，企業B）＝（新製品，旧製品）と（企業A，企業B）＝（旧製品，新製品）である。

チキンゲームには混合戦略による均衡があるかもしれない（演習問題とする）。

2.7 ゼロ・サムゲーム

ゼロ・サムゲームとはプレイヤーの利得の和が常にゼロに等しいようなゲームで通常は 2 人ゲームである。ゲーム理論における利得に定数を足したり引いたり，（正の）定数をかけても同じ構造のゲームになるので利得の和が常に一定であるようなゲームもゼロ・サムゲームである。次の左の例を考えてみよう。

		Bの戦略	
Aの戦略		X	Y
	X	1, −1	2, −2
	Y	0, 0	−1, 1

		Bの戦略	
Aの戦略		X	Y
	X	1	2
	Y	0	−1

B の利得は常に A の利得のマイナスなので A の利得だけで右のように表すこともできる。このゲームでナッシュ均衡を求めることができるがゼロ・サムゲームでは別のアプローチもある。しかし，それらは同じ結果をもたらす。

A がある戦略を選んでいるとして，B が A の利得を最も小さくするようにその戦略を選ぶと考える。A が X を選んだときは B が X を選ぶと最悪の結果 1 になり，A が Y を選んだときは B が Y を選ぶと最悪の結果 −1 になる。最悪の結果をなるべく良くしようとすれば A は X を選んだ方がよい。最悪（あるいは最小 min）を最良（あるいは最大 max）にしようとするので**マキシ・ミン戦略**と言う。一方 B がある戦略を選んでいるとして，A が B の利得を最も小さくするようにその戦略を選ぶと考える。ゼロ・サムゲームでは B の利得を小さくするということは A の利得を大きくすることを意味する。B が X を選んだときは A が X を選ぶと B にとって最悪で A にとって最良の結果 1 になり，B が Y を選んだときは A が X を選ぶと B にとって最悪で A にとって最良の結果 2 になる。B にとって最悪の結果をなるべく良くしようとすれば，A にとって最良の結果をなるべく悪くしようとすること

になり，B は X を選んだ方がよい。A の利得を基準にすると最良（あるいは最大 max）を最悪（あるいは最小 min）にしようとするので**ミニ・マックス戦略**と言う。このとき A，B がそれぞれマキシ・ミン戦略 X，ミニ・マックス戦略 X を選んだときの結果はともに 1 である。これをこの**ゲームの値** (value of the game) と呼ぶ。さらに，A が X，B が X を選ぶという戦略の組はこのゲームのナッシュ均衡になっていることを確認していただきたい。

別の例を考えてみよう。

Bの戦略

		X	Y
Aの	X	0, 0	1, −1
戦略	Y	2, −2	0, 0

Bの戦略

		X	Y
Aの	X	0	1
戦略	Y	2	0

このゲームについてマキシ・ミン戦略とミニ・マックス戦略を調べる。A が X を選んだときは B が X を選ぶと最悪の結果 0 になり，A が Y を選んだときは B が Y を選ぶと最悪の結果 0 になる。このとき A はどちらを選んでもよいから X も Y もマキシ・ミン戦略である。B が X を選んだときは A が Y を選ぶと A にとって最良の結果 2 になり，B が Y を選んだときは A が X を選ぶと A にとって最良の結果 1 になる。A にとって最良の結果をなるべく悪くしようとすると B は Y を選んだ方がよい。A がマキシ・ミン戦略を選んだときの結果が 0 であるのに対して，B がミニ・マックス戦略 Y を選んだときの結果は 1 であって両者は一致しない。この場合は 0 も 1 もゲームの値ではない。また，A が X，B が Y，または A が Y，B が Y を選ぶという戦略の組はナッシュ均衡にはなっていない。このゲームには純粋戦略によるナッシュ均衡はない。あればそのときの結果がゲームの値になる。

そこで混合戦略を考えてみよう。A が X の確率 p，Y の確率 $1-p$ である混合戦略を選び，B が X の確率 q，Y の確率 $1-q$ である混合戦略を選んだとすると A，B の期待利得はそれぞれ

$$\pi_A = p(1-q) + 2(1-p)q = p + 2q - 3pq = -\frac{1}{3}(3p-2)(3q-1) + \frac{2}{3}$$

$$\pi_B = -\pi_A = \frac{1}{3}(3p-2)(3q-1) - \frac{2}{3}$$

となる。A は $p = \frac{2}{3}$ とすることによって q の値に関わらず $\frac{2}{3}$ の利得を確保できる。この $p = \frac{2}{3}$ がマキシ・ミン戦略である。また，B は $q = \frac{1}{3}$ とすることによって p の値に関わらず $-\frac{2}{3}$ の利得を確保できる。A の利得として表すと $\frac{2}{3}$ である。この $q = \frac{1}{3}$ がミニ・マックス戦略でありゲームの値は $\frac{2}{3}$ となる。

このゲームについてナッシュ均衡を求める形に π_A，π_B を書き直してみると

$$\pi_A = p + 2q - 3pq = p(1-3q) + 2q$$

$$\pi_B = -p - 2q + 3pq = q(3p-2) - p$$

が得られる。これらの式からマキシ・ミン戦略とミニ・マックス戦略である $p = \frac{1}{3}$，$q = \frac{2}{3}$ の組み合わせがナッシュ均衡であることがわかる。

このように混合戦略を考えることによって，どのようなゼロ・サムゲームにおいてもマキシ・ミン戦略を選んだときの結果とミニ・マックス戦略を選んだときの結果が一致してゲームの値が決まるとともに，それらの戦略の組がナッシュ均衡となることを示すことができる。

2.8　不完備情報ゲームと完全ベイジアン均衡

2.8.1　不完備情報ゲーム

ここまで考えてきたゲームでは，各プレイヤーはゲームの構造だけでなく相手がどのようなプレイヤーであるか，すなわち相手の利得がどのようになっているかが分かっていると仮定していた。しかし，相手がどのようなプレイヤーであるかがよく分かっていない，つまり情報が十分ではない状況で行動しなければならないゲームもあるであろう。そのような，相手がいかなるタイプのプレイヤーであるかについての情報が十分ではないゲームは**不完備情報ゲーム** (incomplete information game) または，このようなゲームではプレイヤーのもっている情報が対称的ではないので**非対称情報ゲーム** (asymmetric information game) と呼ばれる[*15]。具体的に次のゲームを考えてみよう。

ゲーム 5　ある産業で活動する企業 A と企業 B がある。企業 B は企業 A と同種の製品を作って戦いを挑むか，それとも異なる製品を作って正面からの対決を避けるかを選ばなければならない。企業 A について**強いタイプ（タイプ S）**と**弱いタイプ（タイプ W）**の 2 つの可能性があると仮定する。企業 A 自身は自分がどちらのタイプであるかがわかっているが，企業 B にはわからないものとする。企業 A がどちらのタイプであるかによってそれぞれの企業がある戦略を選んだときに得られる利得も異なっている。ここで，企業 B が戦略を選ぶ前に企業 A はある種の投資を行う必要がある。その投資には X，Y の 2 種類（投資 X と投資 Y と呼ぶ）があり，企業 A がタイプ S であるかタイプ W であるかによってその投資にかかるコストが異なる。たとえばタイプ S の場合は独自のアイデアが豊富で個性的な広告を作るのが得意であるのに対して，タイプ W の場合は他社の広告とよく似た広告を出すのが得意であるというように。企業 A がどちらの投資をするかは，投資そのものにかかる費用によって企業 A の利得に影響するが，企業 A と B とのゲームの結果には影響を与えない。したがって企業 A がどちらの投資を選ぶかは企業 B の利得には関係しないものと仮定する。

ゲームが始まる前に企業 B は，企業 A がどちらのタイプであるかについて何らかの情報

[*15] 情報が対称的でないとは，一方のプレイヤーが知っていることを他方のプレイヤーが知らないことを言う。

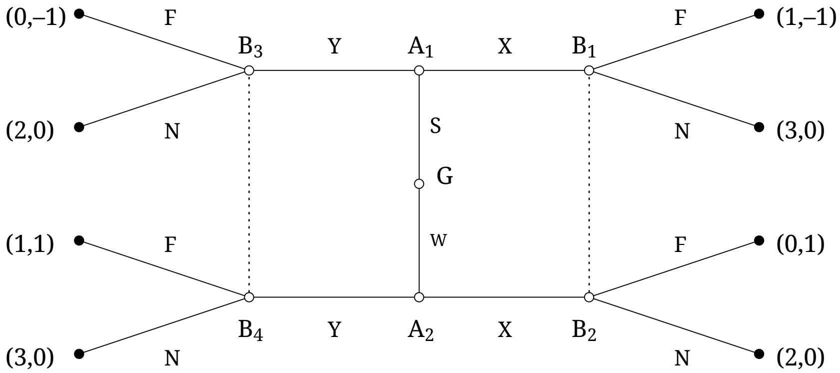


図 2.2　ゲーム 5–不完備情報ゲーム

にもとづいてある確率的な推測を抱いているものする[*16]。具体的に

ゲーム開始前の企業 B の推測　企業 B は，企業 A が確率 2/3 でタイプ S であり，確率 1/3 でタイプ W であるという推測を抱いてる。

と仮定する。一般的には

ゲーム開始前の企業 B の推測（一般的な表現）　企業 B は，企業 A が確率 p でタイプ S であり，確率 $1-p$ でタイプ W であるという推測を抱いてる。

と表現される。この確率は推測の強さを示すものと考えることができる。

このような不完備情報のゲームにおいては，企業 A，B の他に企業 A のタイプを選ぶ，またそれだけの役割を担った第 3 のプレイヤーを考え，それを**自然** (Nature) と名付ける。ゲーム 5 を展開型ゲームで表すと図 2.2 のようになる。点 G は自然が企業 A のタイプを選ぶ点を表す。F は企業 B が A に戦いを挑む (Fight) ということを，N は戦いを避ける (Not fight) ことを意味している。企業 A がタイプ S の場合ゲームは A_1 から出発し，そこで企業 A が投資 X か Y を選び，その結果を見て企業 B が戦いを挑むか避けるかを決める。企業 A が投資 X を選んだ場合ゲームは右に進んで点 B_1 に達し，投資 Y を選んだ場合は左に進んで点 B_3 に達する。企業 A がタイプ W の場合にはゲームは A_2 から出発して企業 A が選ぶ投資に応じて同じように点 B_2 または B_4 へ進む。図の点 B_1 と B_2 とが点線で結ばれているのは，企業 B がこの 2 つの点を区別できないことを意味している。つまり企業 B は企業 A が X を選んだか Y を選んだかはわかるがタイプ S かタイプ W かはわからないの

*16　ここで言う推測は英語文献では belief という言葉が使われており，『信念』と訳す方がよいのかもしれないが，日本語で信念という言葉が表すほど強い意味ではないので推測と呼ぶことにする。R. ギボンズ（福岡正夫他訳）では信念と訳されている。

で，ゲームが B_1 か B_2 のどちらかに到達していることはわかってもそのいずれであるかはわからない。同様に点 B_3 と B_4 とが点線で結ばれているのも企業 B がこの 2 つの点を区別できないことを意味している。点 B_1 と B_2 からなる集合，および点 B_3 と B_4 からなる集合はともに企業 B の**情報集合**と呼ばれる。あるプレイヤーの情報集合とはそのプレイヤーにとって区別できない（それぞれの点においてプレイヤーが持っている情報が同じであるような）点の集合である。

このようなゲームにおいては，企業 B は直接企業 A のタイプを知ることはできないが企業 A の投資行動を見て間接的にそのタイプを見抜くことができる可能性がある。企業 A の側から見れば自分のタイプを間接的に相手に知らせることができる，あるいは知られてしまう場合があるということである。そのようなとき，企業 A による投資行動がそのタイプの**シグナル**になると言う。あるプレイヤーの行動がそのプレイヤーのタイプのシグナルの役割を果たす可能性があるようなゲームを**シグナリングゲーム** (signaling game) と呼ぶ。ただし，このゲーム 5 の均衡では企業 A の投資はシグナルにはならない。演習問題 53 と次節でそのような例を扱う。

2.8.2　完全ベイジアン均衡

さてこのゲームの均衡を考えるのであるが，まずこのゲームには全体のゲーム以外には部分ゲームがないので部分ゲーム完全均衡の概念は使えない。あるいは，ナッシュ均衡と部分ゲーム完全均衡とは同じ意味になる。（全体のゲーム以外の）部分ゲームとはゲームの途中から先が一つの独立したゲームになっていなければならず，その部分ゲーム以外の点におけるプレイヤーの行動や利得の影響を受けてはならない。ゲーム 5 の場合，点 A_1 から先のゲームにおいては企業 B が点 B_1 と B_2，および B_3 と B_4 とを区別できないため，点 A_2 から始まるゲームと完全に分離されていないからそのゲームにおけるプレイヤーの利得の影響を受けることになり部分ゲームにはならない。同様に点 A_2 から始まるゲームも部分ゲームにはならない。また，点 B_1 と B_2 とは企業 B にとって区別できない点であるため，B_1 あるいは B_2 から始まる部分ゲームというのは考えることができない。同様に，B_3 あるいは B_4 から始まる部分ゲームというのも考えられない。部分ゲームはプレイヤーがはっきり区別できる点から出発しなければならない。

企業 B は区別できない点においてどのようにして戦略を選ぶであろうか。もし企業 A が投資 X を選んだとすると，企業 B は自分が点 B_1 か B_2 のどちらかにいるということはわかるがどちらにいるかはっきりはわからない。しかし，はっきりはわからないまでも『多分 B_1 にいるのではないか』とか『まず間違いなく B_2 にいるであろう』とかいうような推測あるいは見通しをもって自分の戦略を選ぶことになるのではないだろうか。具体的には

企業 A が投資 X を選んだときの企業 B の推測　企業 A が投資 X を選んだときに，企業 B はその企業 A がタイプ S である確率は q，タイプ W である確率は $1-q$ というような推測を抱くものとする。

先に，ゲームが始まる前に企業 B は『企業 A は確率 2/3 でタイプ S で，確率 1/3 でタイプ W である』と思っていると仮定した。それはまだゲームが始まっていない段階で入手可能な情報をもとにした推測であったが，企業 A が X，Y いずれかの投資を選んだことが明らかになれば，当初の情報にその情報を加えて新たな推測を立てることになる。その推測がゲームが始まる前の推測と同じ場合もあれば異なることもある。このように新たに獲得した情報を用いて推測を更新していくプロセスをベイズ的な（ベイジアン，Bayesian）プロセスと呼ぶ。

企業 B の推測が上のようなものであるとすると，企業 A が X を選びそれに対応して企業 B が戦略 F を選んだときに企業 B が得られる利得の期待値（平均値）は次のように表される。

$$(-1)q + 1(1-q) = 1 - 2q \tag{2.18}$$

一方，戦略 N を選んだ場合の企業 B の利得の期待値はゼロである。したがって $q < 1/2$ ならば F を選んだ方が，$q > 1/2$ ならば N を選んだ方が利得が大きい。これが『企業 B の最適反応』である。不完備情報ゲームにおいては，最適反応は区別できない点における相手のタイプについてのプレイヤーの推測の値によって異なったものになる可能性がある。

企業 A が Y を選んだ場合はゲームは点 B_3 または B_4 に進むが，そのどちらであるか，すなわち企業 A のタイプについての企業 B の推測を企業 A が X を選んだ場合と同様に表すことができる。それを

企業 A が投資 Y を選んだときの企業 B の推測　企業 A が投資 Y を選んだときに，企業 B はその企業 A がタイプ S である確率は r，タイプ W である確率は $1 - r$ というような推測を抱く。

と表現する。すると企業 B が戦略 F を選んだ場合の利得の期待値は

$$(-1)r + 1(1-r) = 1 - 2r \tag{2.19}$$

となる。一方，戦略 N を選んだ場合の企業 B の利得の期待値はゼロである。したがって $r < 1/2$ ならば戦略 F が，$r > 1/2$ ならば N が『企業 B の最適反応』である。

不完備情報ゲームの均衡はプレイヤーの戦略だけではなく，情報が十分でない中で意思決定をするプレイヤーの推測も含めて定義されなければならない。そこで次のような均衡概念を用いる。

完全ベイジアン均衡

(1). 企業 A の戦略は企業 B の戦略に対して最適反応になっている。

(2). 企業 B の戦略は，企業 A が選ぶ戦略に対して企業 B が抱く推測のもとで最適反応になっている。

(3). 企業 A が選ぶ戦略に対して企業 B が抱く推測は，ゲームが始まる前の企業 B の推測と企業 A の均衡戦略に対して整合的な (consistent)（矛盾しない）もの

である。

以上の 3 つの条件を満たす均衡を**完全ベイジアン均衡** (perfect Bayesian equilibrium)（**あるいは完全ベイズ均衡**）と呼ぶ。

最初の 2 つの条件は，企業 B の利得が相手のタイプについての推測にもとづいて計算されるということを除いて，各プレイヤーの戦略が互いに最適反応になっているというナッシュ均衡の条件と同じであるが，最後の条件が完全ベイジアン均衡を特徴づけるものになっている。具体的にゲーム 5 の完全ベイジアン均衡を考えてみよう。

ゲーム 5 には以下の 2 つの完全ベイジアン均衡がある。

完全ベイジアン均衡 1

(1). タイプ S の企業 A もタイプ W の企業 A も投資 X を選ぶ。

(2). 企業 A が X を選んだときは企業 B は戦略 N を選び，Y を選んだときには戦略 F を選ぶ。

(3). 『企業 A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 であり，企業 A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さい（タイプ W である確率は 1/2 より大きい)』という推測を企業 B が持つ。

完全ベイジアン均衡 2

(1). タイプ S の企業 A もタイプ W の企業 A も投資 Y を選ぶ。

(2). 企業 A が X を選んだときは企業 B は戦略 F を選び，Y を選んだときには戦略 N を選ぶ。

(3). 『企業 A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さく（タイプ W である確率は 1/2 より大きい)，企業 A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 である』との推測を企業 B が持つ。

それぞれが完全ベイジアン均衡であることを確認してみよう。

完全ベイジアン均衡 1 の確認

(1). 企業 A の戦略の最適性
企業 B の戦略を前提として考えるとタイプ S の企業 A が X を選んだ場合の利得は 3，Y を選んだ場合の利得は 0 であるので X を選ぶのが最適である。同様にタイプ W の企業 A が X を選んだ場合の利得は 2，Y を選んだ場合の利得は 1 であるので X を選ぶのが最適である。

(2). 企業 B の戦略の最適性
企業 A の戦略と企業 B の推測を前提として考えると，企業 A の戦略 X に対して企業 B が N を選んだときの利得の期待値はゼロであり，一方 F を選んだときの利得の期待値は

$$\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{3}(1)=-\frac{1}{3}$$

であるので，N が最適である。また企業 A の戦略 Y に対して企業 B が F を選んだときの利得の期待値は企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さいので

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0$$

より大きく，N を選んだときの利得の期待値はゼロなので，F が最適となる。

(3). 企業 B の推測の整合性

企業 B はゲームが始まる前に企業 A が 2/3 の確率でタイプ S であると思っており，均衡において両方のタイプの企業 A が X を選ぶからその結果を見ただけでは何も新しい情報は得られない。したがって企業 A が X を選んだ場合には，ゲームが始まる前と同じようにタイプ S である確率は 2/3 であると推測しなければならない。投資 Y は均衡においてどちらのタイプの企業 A も選ばない戦略なので，企業 A が Y を選んだ場合に企業 B が抱く推測の整合性は完全ベイジアン均衡の概念では問題にならない。つまりどのような推測を持ってもよい。

完全ベイジアン均衡 2 の確認

(1). 企業 A の戦略の最適性

企業 B の戦略を前提として考えるとタイプ S の企業 A が X を選んだ場合の利得は 1，Y を選んだ場合の利得は 2 であるので Y を選ぶのが最適である。同様にタイプ W の企業 A が X を選んだ場合の利得は 0，Y を選んだ場合の利得は 3 であるので Y を選ぶのが最適である。

(2). 企業 B の戦略の最適性

企業 A の戦略と企業 B の推測を前提として考えると，企業 A の戦略 X に対して企業 B が N を選んだときの利得の期待値はゼロであり，一方 F を選んだときの利得の期待値は，企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さいから

$$\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}(1)=0$$

より大きいので，F が最適である。また企業 A の戦略 Y に対して企業 B が F を選んだときの利得の期待値は

$$\frac{2}{3}(-1)+\frac{1}{3}(1)=-\frac{1}{3}$$

で，N を選んだときの利得の期待値はゼロなので，N が最適となる。

(3). 企業 B の推測の整合性

企業 B はゲームが始まる前に企業 A が 2/3 の確率でタイプ S であると思っており，均衡において両方のタイプの企業 A が Y を選ぶからその結果を見ただけでは何も新しい情報は得られない。したがって企業 A が Y を選んだ場合には，ゲームが始まる前と同じようにタイプ S である確率は 2/3 であると推測しなければならない。投資 X は均衡においてどちらのタイプの企業 A も選ばない戦

略なので，企業 A が X を選んだ場合に企業 B が抱く推測の整合性は完全ベイジアン均衡の概念では問題にならない。したがってどのような推測を持ってもよい。

以上によって 2 つの均衡が完全ベイジアン均衡であることがわかる。

2.8.3　合理的な (reasonable) 完全ベイジアン均衡

ゲーム 5 には 2 つの完全ベイジアン均衡があるが，どちらも合理的な均衡であろうか。ここで問題になるのは**企業 B の推測の合理性**である。完全ベイジアン均衡の概念では，均衡において企業 A が選ぶ戦略についての企業 B の推測の整合性はチェックしたが，均衡で選ばれない戦略についての推測の合理性は検討していない[*17]。しかし，均衡で選ばれない戦略についての推測がどのようなものでもよいということではないであろう。特に，『このタイプの企業 A はこの戦略を選んでも得になることはないから選ぶはずがない』と言えるような場合，その戦略を選ぶ確率が正（プラス）であると推測することは合理的ではないことになる。

具体的に完全ベイジアン均衡 2 について考えてみよう。この均衡では，企業 A がもしも均衡戦略ではない投資 X を選んだ場合，『その企業 A がタイプ S である確率が 1/2 より小さい，逆に言えばタイプ W である確率が 1/2 より大きい』と企業 B が推測するという前提に立っている。しかしタイプ W の企業 A が合理的に行動するとして投資 X を選ぶことがあるであろうか。タイプ W の企業 A が X を選んだ場合に得ることができる利得の最大値は，企業 B が N を選んだときの 2 である。一方均衡戦略の Y を選べば企業 B が N を選んでくれるのでタイプ W の企業 A は 3 の利得を得ることができる。ということは，タイプ W の企業 A にとっては均衡戦略を捨ててわざわざ X を選ぶ意味がない，あるいはいわゆるインセンティブ (incentive) がないということになる。したがって X を選んだ企業 A が確率 1/2 以上でタイプ W であるというこの均衡での企業 B の推測は合理的ではない。一方，タイプ S の企業 A が投資 X を選んだ場合はどうであろうか。そのとき，企業 B が N を選ぶと企業 A は 3 の利得を得ることができるが，これは均衡におけるこのタイプの企業 A の利得 2 を上回っているので，タイプ S の企業 A には投資 X を選ぶインセンティブがある。したがって企業 B は，企業 A がもしも投資 X を選んでくれればその企業 A はタイプ S に違いないと考えるべきであるということになる。企業 B がそのような推測を持った場合，戦略 N を選んでタイプ S の企業 A との対決を避けることが最適となり完全ベイジアン均衡 2 は均衡ではなくなる。

[*17] ここでは整合性 (consistency) という言葉と合理性という言葉を区別して使う。推測が整合的であるというのは，ゲームの途中の段階において，ゲームが始まる前に抱いていた推測と始まってから得た情報および想定されている均衡を構成する戦略と矛盾しない推測を持つということである。一方合理性とは，（整合性に加えて）ゲームの構造，特にプレイヤーの利得から見て相手がある戦略を選ぶ可能性があるかどうかを検討した上で理に適った推測を持つということを意味する。

整理すると次のように表現される。

完全ベイジアン均衡の合理性の条件　以下の条件が満たされているときには，企業 B は，均衡戦略とは異なるある戦略を選ぶ企業 A がタイプ W である確率はゼロである（タイプ S である確率は 1 である）という推測を持つべきである。また，そうではない推測にもとづいて成立している完全ベイジアン均衡は合理的な均衡ではない。

(1). タイプ W の企業 A が均衡戦略とは異なるある戦略を選んで得られる**利得の最大値が均衡戦略によって得られる利得より小さい**。

(2). 一方，タイプ S の企業 A がその戦略を選んで得られる利得の最大値は均衡戦略によって得られる利得より大きい。

この条件の中でタイプ S とタイプ W の関係が逆の場合には，タイプ S である確率はゼロであるという推測を持つべきであるということになる。

以上のことから完全ベイジアン均衡 2 は合理的な均衡ではないことがわかる。では完全ベイジアン均衡 1 の方はどうであろうか。この均衡では，企業 A が均衡戦略ではない投資 Y を選んだ場合，企業 B はその企業 A がタイプ W である確率が 1/2 より大きい（1 でもよい）と推測するということが前提となっている。先ほどと同じように考えてみよう。タイプ W の企業 A が Y を選んだ場合に得ることができる利得の最大値は 3 であり，これは均衡における利得 2 より大きい。一方，タイプ S の企業 A が Y を選んだ場合に得ることができる利得の最大値は 2 であり，これは均衡における利得 3 より小さい。したがってタイプ W の企業 A には投資 Y を選ぶインセンティブがあるが，タイプ S の企業 A にはないことになり，企業 A が投資 Y を選んだときに企業 B は，『その企業 A がタイプ W である確率は 1 であるという推測を持つべきである』ということになるが，確率が 1/2 より大きいという推測も合理的なものである。

以上の議論によって，**ゲーム 5 の合理的な均衡は完全ベイジアン均衡 1 である**，という結論を得る。

2.8.4　オークションの理論：ベイジアン・ナッシュ均衡

不完備情報ゲームの 1 つの応用としてオークションの理論を紹介する。ここで扱うゲームは動学的なゲームではなく静学的なゲームである。ある美術品を巡るオークションを取り上げる。オークションと言っても公開の場で行われるものではなく，密封した封筒に自分がつける価格を書いて提出するシールドビッド・オークション (sealed-bid auction)（入札）を考える。誰がこの美術品を落札し，いくらで購入するかについて主に 2 通りの決め方がある。

(1). **シールドビッド・ファーストプライス・オークション** (sealed-bid first-price auction)（以下「ファーストプライス・オークション」と呼ぶ）：最も高い価格をつけた人がその価格で美術品を購入する。

2 人の人，プレイヤー 1 とプレイヤー 2 がこのオークションに参加する。各プレイヤーがこの美術品から得る価値は v_1（億円）と v_2（億円）であるが，それぞれ相手がどのような評価をしているかはわからない。各々の評価はこの美術品をいくらで買う気持ちがあるかということを表す[*18]。v_1，v_2 は 0 から 1 までのあらゆる値（実数値）をとる可能性があり，またどのような値も同じ確率で起きるものとする。このような確率分布は一様分布 (uniform distribution) と呼ばれる。一様分布においては，たとえば v_1 が 0.2 から 0.5 までの値をとる確率は $\frac{0.5-0.2}{1-0} = 0.3$ となる。他も同様である。厳密に 0.2 となる確率は 0 であり，常にある範囲の値をとる確率を考える。各プレイヤーにとって相手の評価は正確にはわからないが上記のような確率分布であることは知っているものとする。このゲームでは両方のプレイヤーが情報の非対称性に直面している。入札に勝ったときの利得は自分の美術品に対する評価額と入札額（支払額）の差に等しく，負けたときの利得は 0 である。一様分布の仮定によって 2 人の入札額が等しくなる確率は 0 である。各プレイヤーは不確実（確率的）な状況で戦略を選択するので期待利得を最大化するように戦略を選ぶ。各プレイヤーの入札額を p_1，p_2 で表し，以下のような戦略の組がナッシュ均衡であることを証明しよう。

$$p_1 = \frac{v_1}{2},\ p_2 = \frac{v_2}{2}$$

v_1，v_2 は各プレイヤーのタイプを表すものと考えることができる。それぞれのタイプのプレイヤーがどのような戦略を選ぶかを決めなければならない。この戦略の組がナッシュ均衡であることを示すには，各プレイヤーにとって相手がこの戦略を選んでいるときに自分もそれを選ぶことが最適であることを示せばよい。

プレイヤー 1 が上記の戦略を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が戦略（入札額）p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > \frac{v_1}{2}$ となる場合であるが，一様分布の仮定により $\frac{v_1}{2}$ は 0 から 0.5 までの値を等しい確率でとる（$0 \leqq v_1 \leqq 1$ であるから）。したがって $0 \leqq p_2 \leqq 0.5$ として入札に勝つ確率は $\frac{p_2}{0.5} = 2p_2$ である[*19]。$p_2 > 0.5$ の入札をしても勝つ確率は上がらず（$p_2 = 0.5$ で勝つ確率は 1 になる）支払額が増えるだけなのでそのような入札は行わない。勝ったときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$2p_2(v_2 - p_2) = -2(p_2^2 - p_2 v_2)$$

となる。これは p_2 の二次関数なので最大値を求める手法により（微分してもよいが）

$$-2\left[\left(p_2 - \frac{v_2}{2}\right)^2 - \frac{v_2^2}{4}\right]$$

[*18] 買ってから転売するつもりであれば，同じような情報を持っている限り両者の評価が異なることはないであろう。評価が異なるとすれば各プレイヤーにとっての価値は自分で鑑賞して得られる効用を金額で表したものと見なされる。

[*19] 負ける確率は $\frac{0.5-p_2}{0.5} = 1 - 2p_2$ である。

と変形され期待利得を最大化する入札額は

$$p_2 = \frac{v_2}{2}$$

と求まる。プレイヤー 1 と 2 を入れ替えると同様の議論によって

$$p_1 = \frac{v_1}{2}$$

が得られる。以上によって上記の戦略の組がナッシュ均衡であることが示された。このゲームのように情報が非対称な静学的ゲームで相手のタイプについての確率的な推測にもとづいて各プレイヤーが期待利得を最大化する戦略を選ぶナッシュ均衡は，**ベイジアン均衡**あるいは**ベイジアン・ナッシュ均衡**と呼ばれる。動学的なゲームの完全ベイジアン均衡に対応する。

■ファーストプライス・オークションの均衡について　プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = p_2(v_2)$$

とする。この逆関数を

$$v_2 = g_2(p_2)$$

と表す。たとえば $p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$ ならば $g_2(p_2) = 2p_2 - 2$ である。プレイヤー 1 の入札額を p_1 とすると落札する確率（$p_1 > p_2$ となる確率）は $g_2(p_1)$ に等しい（一様分布の仮定によって）。そのとき期待利得は

$$(v_1 - p_1)g_2(p_1)$$

となる。これを p_1 で微分してゼロとおくと

$$(v_1 - p_1)g_2'(p_1) - g_2(p_1) = 0$$

が得られる。プレイヤー 1 の入札額 $p_1 = p_1(v_1)$ がこの式を満たすことが均衡の条件となる。プレイヤー 1 と 2 が同一の行動をとるとすると $p_2(v_2)$ と $p_1(v_1)$ が同じ関数になるのでそれらの逆関数 $g_2(p_2)$ と $v_1 = g_1(p_1)$ も同じ関数となり，微分も同じ関数になる。したがって $g_2'(p_1) = g_1'(p_1)$ が得られるから上の式は

$$(v_1 - p_1(v_1))g_1'(p_1) - g_1(p_1) = 0$$

と書き直される。さらに逆関数の微分の関係より[20],

$$g_1'(p_1) = \frac{1}{p_1'(v_1)}$$

であるから，$g_1(p_1) = v_1$ と合わせて

$$(v_1 - p_1(v_1))\frac{1}{p_1'(v_1)} - v_1 = 0$$

が導かれ，これを整理して

$$(v_1 - p_1(v_1)) - v_1 p_1'(v_1) = 0 \tag{2.20}$$

を得る。この式を満たす関数 $p_1(v_1)$ は

$$p_1 = \frac{v_1}{2}$$

である。実際 $p_1' = \frac{1}{2}$ であるから上の式に代入すると

$$(v_1 - \frac{v_1}{2}) - \frac{1}{2}v_1 = 0$$

が成り立つ（この計算は微分方程式を解くことに相当する)。

■微分方程式のいくらか正式な解法　関数の微分を含む方程式が微分方程式である。

$$x(v_1) = v_1 p_1(v_1)$$

とおくと

$$x'(v_1) = p_1(v_1) + v_1 p_1'(v_1)$$

であるから (2.20) は次のように書き直される。

$$v_1 - x'(v_1) = 0 \text{ すなわち } x'(v_1) = v_1$$

したがって微分の公式を逆に用いて（つまり積分の公式）

$$x_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1^2 + C$$

[20] $g_1'(p_1)$ は $\frac{\Delta v_1}{\Delta p_1}$ から得られ，$p_1'(v_1)$ は $\frac{\Delta p_1}{\Delta v_1}$ から得られ,

$$\frac{\Delta v_1}{\Delta p_1} = \frac{1}{\frac{\Delta p_1}{\Delta v_1}}$$

が成り立つ。

が得られる（C は定数）。これにより

$$p_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{C}{v_1}$$

となる。定数 C は（x を）微分すると消えるので微分方程式の条件だけでは正確に再現できないが，オークションの意味を考えることによって決めることができる。v_1 がごく小さいときにはこの美術品に価値を感じないので p_1 もほとんど 0 になる。よって $C = 0$ でなければならない。以上から

$$p_1(v_1) = \frac{1}{2}v_1$$

が求まる。

(2). **シールドビッド・セカンドプライス・オークション** (sealed-bid second-price auction)（以下「セカンドプライス・オークション」と呼ぶ）：最も高い価格をつけた人が，2 番目に高い価格をつけた人の入札額で美術品を購入する。
上のファーストプライス・オークションと同じ状況を仮定する。このとき以下のような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを示す。

$$p_1 = v_1,\ p_2 = v_2$$

プレイヤー 1 がこの戦略を選ぶと仮定してプレイヤー 2 が戦略 p_2 を選んだときに入札に勝つのは $p_2 > v_1$ となる場合であるが v_1 は 0 から 1 までの値を等しい確率でとるので勝つ確率は p_2 である。勝ったときの利得は $v_2 - v_1$ に等しい。この値は p_2 には関係しない。$p_2 > v_2$ のときはオークションに勝てば利得は負（マイナス）で負けたときは 0 であるから，v_2 以上の p_2 で入札することはない。$v_2 - v_1 < 0$ のときは勝たない方がよいが，$p_2 = v_2$ を入札すれば勝つことはない。一方 $v_2 - v_1 > 0$ のときには勝った方がよいが，このときも $p_2 = v_2$ を入札すれば望み通りになる[*21]。以上によって自分の評価額に等しい額を入札することがお互いに最適であるからそのような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡となる。
セカンドプライス・オークションでは自分の入札額は支払額に影響せず相手の入札額によって支払額が決まるのでオークションに勝つか勝たないかだけを考えて自分の入札額を決めればよい。相手の入札額が自分の評価より高いか低いかによってオークションに勝つ方がよいか負ける方がよいかが決まる。したがって自分の評価に等しい額を入札することが最適な行動となるのである。このセカンドプライス・オークションは公共財の供給に関するグローブズメカニズムとよく似ている。

ファーストプライス・オークションよりセカンドプライス・オークションの方が入札額は高いが，2 番目に高い価格で購入することができるので実際に支払う額も高くなるわけ

[*21] $v_2 = v_1$ となる確率は 0 なので考える必要はないが，$p_2 = v_2$ を入札してそのようなことがあるとすれば勝っても負けても利得はともに 0 である。

ではない。実はどちらのオークションでも支払額の期待値は等しい。ファーストプライス・オークションの場合には入札額が支払額に等しいのでプレイヤー 1 が落札する場合の支払額は $\frac{v_1}{2}$ に等しく，プレイヤー 2 が落札する場合の支払額は $\frac{v_2}{2}$ に等しい。一方セカンドプライス・オークションの場合にプレイヤー 1 が落札するのは $v_1 > v_2$ のときであるが，そのときの支払額は v_2 に等しい。そして $v_1 > v_2$ という条件のもとでの v_2 の期待値は $\frac{v_1}{2}$ である。同様にプレイヤー 2 が落札するのは $v_2 > v_1$ のときであるが，そのときの支払額は v_1 に等しく，$v_2 > v_1$ という条件のもとでの v_1 の期待値は $\frac{v_2}{2}$ である。したがってセカンドプライス・オークションでの支払額の期待値はファーストプライス・オークションでの支払額に等しい。

■3 人以上の場合　人数が 3 人以上の場合についてファーストプライス・オークションを考えてみよう。n 人の人がオークションに参加し，それぞれの評価額はすべて異なっているものとする。プレイヤー $i (i = 1, 2, \cdots, n)$ の評価額を v_i で表す。やはり v_i はそれぞれ 0 から 1 までの値をとり，確率分布は一様分布であるとする。また各 v_i は独立で相関関係はないと仮定する。プレイヤー i の入札額を p_i で表す。このとき次のような戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡となる。

$$\text{各プレイヤー } i \text{ について } p_i = \frac{n-1}{n} v_i$$

$n = 2$ のときには上で見た結果と一致する。あるプレイヤー i 以外のすべての人々がこの戦略を選んでいるとき，そのプレイヤー i がオークションに勝つのは他のすべての人々の評価 v_j について $p_i > \frac{n-1}{n} v_j$ が成り立つ場合である。プレイヤー i があるプレイヤー j に勝つ確率は $\frac{n}{n-1} p_i$ であるから，独立かつ一様分布との仮定により $n-1$ 人すべてに勝って落札する確率は $\left(\frac{n}{n-1} p_i\right)^{n-1}$ に等しい。勝ったときの利得は $v_i - p_i$ であるから期待利得は

$$\left(\frac{n}{n-1} p_i\right)^{n-1} (v_i - p_i)$$

と表される。この式を p_i で微分してゼロとおくと

$$\frac{n}{n-1} \left(\frac{n}{n-1} p_i\right)^{n-2} [(n-1) v_i - n p_i] = 0$$

が得られ

$$p_i = \frac{n-1}{n} v_i$$

が求まる。i が誰であっても話は同じであるから上記の戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡である。プレイヤー i が勝ったときの支払額はもちろんこの $\frac{n-1}{n} v_i$ に等しい。

　次にセカンドプライス・オークションを考える。2 人の場合と同様に

$$\text{各プレイヤー } i \text{ について } p_i = v_i$$

という戦略の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることが示される。2 人のケースと議論はほとんど変らない。他のプレイヤーがこの戦略を選んでいるとしてプレイヤー i がオー

クションに勝つのはすべての $j \neq i$ について $p_i > v_j$ の場合であり，その確率は p_i^{n-1} である。2 番目に高い人の評価を v_k としてプレイヤー i が勝ったときの利得は $v_i - v_k$ であるが，これは p_i の値には関係しない。ある $j \neq i$ について $v_i < v_j$ のときは勝たない方がよいが $p_i = v_i$ を入札すれば勝つことはない[*22]。一方すべての $j \neq i$ について $v_i > v_j$ のときには勝った方がよいが，$p_i = v_i$ を入札すればそのようになる。したがって上記の戦略の組はベイジアン・ナッシュ均衡である。

3 人以上の人々がいてもセカンドプライス・オークションにおける支払額の期待値はファーストプライス・オークションにおける支払額に等しいことが言える。セカンドプライス・オークションでプレイヤー 1 が落札する場合を考える。話をわかりやすくするためにプレイヤー 1 の評価額が最も高く，以下プレイヤー 2，3，$\cdots$，n の順になっているものとする。すなわち $v_1 > v_2 > \cdots > v_n$ となっている。プレイヤー 1 が落札するが支払額は v_2 に等しいから，v_2 の期待値を求めなければならない。プレイヤー $i(i = 2, 3, \cdots, n)$ の評価額 v_i の期待値を $E(v_i)$ とすれば

$$E(v_i) = \frac{n+1-i}{n+2-i} v_{i-1} \tag{2.21}$$

となる。これを数学的帰納法によって証明しよう。まずプレイヤー n について $v_{n-1} > v_n$ という条件のもとでの v_n の期待値は

$$E(v_n) = \frac{v_{n-1}}{2} \tag{2.22}$$

に等しい。したがってまず $i = n$ のときに (2.21) が成り立つ。次にプレイヤー $n-1$ について $v_{n-2} > v_{n-1} > v_n$ という条件のもとでの v_{n-1} の期待値は

$$E(v_{n-1}) = \frac{v_{n-2} + v_n}{2}$$

と表される。v_{n-2} の値がが決まっているとして，v_n の値も決まっていれば $E(v_{n-1})$ も決まるが v_n が確率的に変る（確率変数であると言う）ということを考慮すれば $E(v_{n-1})$ も確率的に変る。また v_{n-1} 自身も確率的に変る。その上で $E(v_{n-1})$ と $E(v_n)$ の期待値を求めそれらをあらためて $E(v_{n-1})$，$E(v_n)$ と書くことにする。以下同様である。すると

$$E(v_{n-1}) = \frac{v_{n-2} + E(v_n)}{2}$$

と表され，(2.22) より

$$E(v_{n-1}) = \frac{2}{3} v_{n-2}$$

が得られる。したがって $i = n-1$ のときに (2.21) が成り立つ。そこで $i = k$ のときに成り立つと仮定して $i = k-1$ のときにも成り立つことを証明しよう。$i = k$ のときに成り立つ

[*22] ある $j \neq i$ について $v_i < v_j$ であるとは自分以外の誰かの評価が自分の評価を上回っているということである。

から

$$E(v_k) = \frac{n+1-k}{n+2-k}v_{k-1} = \frac{n+1-k}{n+2-k}E(v_{k-1}) \tag{2.23}$$

である（v_{k-1} が確率変数であるということを考慮して）。次にプレイヤー $k-1$ について $v_{k-2} > v_{k-1} > v_k$ という条件のもとでの v_{k-1} の期待値は

$$E(v_{k-1}) = \frac{v_{k-2}+v_k}{2} = \frac{v_{k-2}+E(v_k)}{2}$$

と表される（v_k が確率変数であるということを考慮して）。(2.23) をこれに代入すると

$$E(v_{k-1}) = \frac{v_{k-2}+\frac{n+1-k}{n+2-k}E(v_{k-1})}{2}$$

より

$$E(v_{k-1}) = \frac{n+2-k}{n+3-k}v_{k-2} \tag{2.24}$$

が得られる。したがって (2.21) が一般的に成り立つことが示された。これに $k=3$ を代入すると

$$E(v_2) = \frac{n-1}{n}v_1$$

となるからセカンドプライス・オークションにおける支払額の期待値はファーストプライス・オークションにおける支払額に等しい。

■ダッチ（オランダ式）・オークションとイングリッシュ・オークション　公開で行われるオークションにも主に 2 種類がある。誰も買わないような高い価格から始めて徐々に下げて行き，最初に「買った！」と声を上げた人が落札するのがダッチ・オークションであり，逆に誰もが買う低い価格から始めて徐々に上げて行き，1 人を残して全員が脱落したところでその残った人が落札するのがイングリッシュ・オークションである。ダッチ・オークションはファーストプライス・オークションと同じ結果をもたらし，イングリッシュ・オークションではセカンドプライス・オークションと同じ結果になることが言える。

ファーストプライス・オークションでは各プレイヤーが自分がつける価格を予め決めておいてそれを提出し，最も高い価格を書いた人が落札してその価格で購入する。ダッチ・オークションではどの段階で声を上げるかを決めておいて，その価格になったときに最初に声を上げた人が落札するので 1 番高い価格で声を上げるつもりだった人がその価格で購入することになる。したがってこれらは同じ仕組みのオークションとなり同じ結果をもたらす。

セカンドプライス・オークションにおいても各プレイヤーが自分がつける価格を予め決めておいてそれを提出し，最も高い価格をつけた人が落札するが 2 番目に高い入札額で購入する。イングリッシュ・オークションでは低い価格から始まってせり上がって行くので自分がつけるつもりだった入札額よりも価格の方が高くなった人が脱落して行き，最後に残った人が落札するから最も高い入札額を予定していた人が落札する。しかし購入価格は

その人の入札額ではなく，2 番目に高い入札額を考えていた人が脱落したときの価格であるからその 2 番目に高い人の入札予定額に等しくなる。したがってこれらは同じ仕組みのオークションとなり同じ結果をもたらす。

■オークションゲームの補足説明（微分方程式を用いた議論の簡易版）　2 人のプレイヤーによるある美術品をめぐるシールドビッド・ファーストプライス・オークションにおいて，プレイヤー 1，2 の評価 v_1，v_2（確率変数）が 5 から 8 までの一様分布となっているものと仮定する。各プレイヤーは相手の評価を正確には知らないがその分布は知っている。プレイヤー 1，2 の入札額がそれぞれ v_1，v_2 の一次関数になっていると考えて議論を進める。プレイヤー 2 の入札額を

$$p_2 = av_2 + b \text{（}a,\ b \text{ は正の定数）}$$

とする。この関数の逆関数は

$$v_2 = \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$$

と表される。プレイヤー 1 の入札額も同じ関数 $p_1 = av_1 + b$ で表され，その逆関数は $v_1 = \frac{1}{a}p_1 - \frac{b}{a}$ であるとする。プレイヤー 2 が落札するのは $p_2 > p_1$ となる場合であるが，それは

$$p_2 > av_1 + b$$

が成り立つときである。この式から

$$v_1 < \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$$

が得られる。v_1 は 5 から 8 までの値を等しい確率でとるので $5 \leqq \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a} \leqq 8$ として $v_1 < \frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a}$ となる確率は

$$\frac{1}{3}\left[\frac{1}{a}p_2 - \frac{b}{a} - 5\right] = \frac{p_2 - (b + 5a)}{3a}$$

に等しい。落札したときの利得は $v_2 - p_2$ であるから期待利得は

$$(v_2 - p_2)\frac{p_2 - (b + 5a)}{3a}$$

となる。これを p_2 で微分してゼロとおくと

$$-2p_2 + b + 5a + v_2 = 0$$

が得られる。したがって

$$p_2 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{b + 5a}{2}$$

を得る。これと上記の $p_2 = av_2 + b$ とから a，b それぞれは $a = \frac{1}{2}$，$b = \frac{5}{2}$ と求まる。したがって

$$p_2 = \frac{1}{2}v_2 + \frac{5}{2}$$

が得られる。p_1 も同様である。このようにして求められる均衡はベイジアン・ナッシュ均衡と呼ばれる。

2.9　シグナリングゲーム

経済学で代表的な教育と労働市場についてのシグナリングゲームの例を検討してみよう。

2.9.1　労働市場のシグナリングゲーム

次のようなゲームを考える。

ゲーム 6　何人かの労働者がいる。労働者に 2 つのタイプ，能力（生産性）が低いタイプと高いタイプがある。それぞれタイプ 1，タイプ 2 と呼ぶことにする。具体的にタイプ 1 の労働者の生産性は 1，タイプ 2 の労働者の生産性は 2 であると仮定する。各々の労働者自身は自分のタイプについて知っているが，その労働者を雇う側の企業にはわからないものとする。ある一人の労働者について企業は，彼がタイプ 1 であると思えば賃金 1 を支払い，タイプ 2 であると思えば賃金 2 を，どちらのタイプかわからない場合はその労働者の能力について何らかの確率的な推測をもち，その確率に応じた労働者の生産性の期待値（平均値）に等しい賃金を支払う。企業数は 2 つ以上あるものとする。

ゲームが始まる前に企業は労働者のタイプについてある確率的な推測を抱いているが，それはすべての企業に共通であるとする。ここでは具体的に

ゲーム開始前の企業の推測　企業は，労働者が確率 1/2 で能力が低く（タイプ 1），確率 1/2 で能力が高い（タイプ 2）という推測を抱いている。

と仮定する。すべての企業が共通の推測を持つということについては，その推測が何らかの統計的な調査などによる客観的なデータにもとづいていると考えればよい。

労働者は自分のタイプを直接企業に知らせることはできないが，どの程度の教育を受けるかによって間接的に知らせることができるかもしれない。ここでは受ける教育のレベルを 0 から 2 までの数字で表現する。たとえば 0 はまったく教育を受けない，あるいは義務教育以上の教育を受けないことを意味し，0.5 は高校まで，1 は大学卒業，1.5 は有名大学卒業，2 は超有名大学卒業などと解釈できる。これらの区切りのよい数字だけではなく 0.8 は大学中退，1.8 は有名大学を優秀な成績で卒業などと適当に解釈すればよい。教育を受けるためにはコストがかかるが，それは入学金や授業料などの経済的コストだけではなく，入学するために必要な受験勉強に費やす時間と肉体的，精神的エネルギーなどのコストも含まれる。そして『能力の高い労働者の方が高いレベルの教育を受けるために要する

コストは小さい』ものと仮定する。逆に言えば『能力の低い労働者にとってのコストの方が大きい』わけである。これは教育がシグナルの役割を果たすために必要な条件である。また，ここでは分析を簡単にするために『教育そのものは労働者の能力に影響を与えない』ものと仮定する。つまり，能力の高い労働者はレベルの高い教育を受けても受けなくても高い能力を持ち，能力の低い労働者は教育を受けても受けなくても低い能力しか持たないということである。したがって，教育を受けることは労働者の高い能力のシグナルとしての役割しか果たさない。労働者が選択する教育のレベルを e で表し，教育を受けるためのコストはタイプ 1 の労働者については $1.05e$，タイプ 2 の労働者については $0.4e$ であると仮定する。なお教育レベルの値はどんな実数でもよいのではなく 0.1 を最小単位として表されるものとする。

このゲームは以下のような 2 段階からなる。

(1). 第 1 段階
　　労働者が自分が受ける教育のレベルを決める。
(2). 第 2 段階
　　その労働者の選択を見て企業が支払う賃金を決める。

企業数が一つならばその企業は非常に低い賃金を支払って労働者からいわゆる搾取することができるかもしれないが，複数の企業が競争している状態であれば，生産性以下の賃金しか支払っていない企業は他の企業にその労働者を奪われてしまうことになるので，生産性（の期待値）に等しい賃金を支払わなければならない。したがってゲームの第 2 段階では，企業が利潤最大化を求めて意思決定をするというよりも企業間の競争によって賃金が決まると考えるべきである。

労働者の利得は賃金から教育にかかるコストを引いたものである。すべての労働者は自分自身のタイプに関する情報を，すなわち能力が高いか低いか，を除いて同じ状況におかれている。以下ではある一人の労働者と企業とのゲームを考える。

2.9.2　完全ベイジアン均衡–Separating 均衡と Pooling 均衡

このゲームの完全ベイジアン均衡を考える。次のような二種類の完全ベイジアン均衡がある。

Pooling 均衡

(1). タイプ 1 の労働者，タイプ 2 の労働者ともに教育レベル $e = 0$ を選ぶ。
(2). 企業は $e = 0$ を選んだ労働者にもそれ以外の教育レベルを選んだ労働者にも一律に賃金 1.5 を支払う。
(3). 企業は労働者がいかなる教育レベルを選ぼうとも，その労働者は確率 1/2 で能力が高く，確率 1/2 で能力が低いという推測を持つ。

Separating 均衡

(1). タイプ 2 の労働者は教育レベル $e = 1$ を選び，タイプ 1 の労働者は教育レベル $e = 0$ を選ぶ。

(2). 企業は $e \geqq 1$ を選んだ労働者に賃金 2 を支払い，$e < 1$ を選んだ労働者に賃金 1 を支払う。

(3). 企業は $e \geqq 1$ を選んだ労働者は確率 1 で（間違いなく）能力が高く，$e < 1$ を選んだ労働者は確率 1 で能力が低い（能力が高いということはありえない）という推測を持つ。

最初の均衡のように異なったタイプの労働者が同じ戦略を選ぶような均衡を Pooling **均衡**（『一括均衡』と訳される），2 番目の均衡のように異なったタイプの労働者が異なった戦略を選ぶような均衡を Separating **均衡**（『分離均衡』と訳される）と呼ぶ。それぞれが完全ベイジアン均衡であることを確認してみよう。

Pooling 均衡の確認

(1). 労働者の戦略の最適性

$e = 0$ 以外の教育レベルを選んでも $e = 0$ を選んだときより高い賃金を得ることはできない。教育にはコストがかかるからどちらのタイプの労働者にとっても $e = 0$ を選ぶことが最適である。

(2). 企業の戦略の最適性

労働者の能力についての企業の推測を前提とすれば，上で述べた企業間の競争の結果実現する賃金としては最適である。

(3). 企業の推測の整合性

(i) 労働者が $e = 0$ を選んだ場合

企業はゲームが始まる前から 1/2 の確率で労働者の能力が高いと推測していたが，どちらのタイプの労働者も均衡において $e = 0$ を選ぶので何も新しい情報を得られないからその推測を変える理由はない。したがって 1/2 の確率で能力が高いという推測は整合的である。

(ii) 労働者が $e = 0$ 以外を選んだ場合

均衡においてどちらのタイプの労働者も $e = 0$ を選ぶので，それ以外の教育レベルが選択された場合の企業の推測については完全ベイジアン均衡の概念では何も制約はない。つまり，企業と労働者の戦略の最適性に合致したものならばどのような推測を持ってもかまわない。したがって，確率 1/2 で能力が高いという推測も整合的である。

Separating 均衡の確認

(1). 労働者の戦略の最適性

企業の戦略を前提にすると，タイプ 2 の（能力の高い）労働者が $e = 1$ の教育を選んだときに得られる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 0.4 = 1.6$ であり，$e = 0$ を選んだ場合の利得は 1 である。また，$e = 1$ より大きい e を選んでも得られ

る賃金は高くならない。したがってタイプ 2 の労働者にとって $e = 1$ という戦略は最適である。一方タイプ 1 の（能力の低い）労働者が $e = 1$ を選んで得られる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 1.05 = 0.95$ であり，$e = 0$ を選んだ場合の利得は 1 であるからタイプ 1 の（能力の低い）労働者は $e = 0$ を選ぶ。

(2). 企業の戦略の最適性
均衡における労働者の戦略と企業の推測を前提とすれば，$e \geqq 1$ を選んだ労働者は能力が高く，$e < 1$ を選んだ労働者の能力は低いことになるので，それぞれに 2 と 1 の賃金が支払われるのは企業間の競争の結果としては最適である。

(3). 企業の推測の整合性
均衡戦略では能力の高い労働者が $e = 1$ を選び，能力の低い労働者が $e = 0$ を選ぶから，労働者が $e = 1$ を選んだときと $e = 0$ を選んだときの企業の推測は整合的である。$e = 1$ と $e = 0$ 以外の教育レベルが選ばれた場合の企業の推測については完全ベイジアン均衡の概念では何も制約はない。

以上によって，Pooling 均衡，Separating 均衡ともに完全ベイジアン均衡であることが確認された。

2.9.3 合理的な均衡–シグナルとしての教育

このゲームでも 2 つの完全ベイジアン均衡が得られたが，それらの均衡における企業の推測が合理的であるかどうかを検討する必要がある。問題になるのは均衡において労働者が選ばない戦略についての企業の推測であり，均衡で選ばれる戦略については完全ベイジアン均衡における企業の推測の整合性の検討によってその合理性は確認されている。

まず Pooling 均衡の合理性を検討してみよう。この均衡は労働者が $e = 0$ 以外の教育を選んだ場合にも確率 1/2 でその労働者がタイプ 2 である（能力が高い）という推測を企業が抱いているという前提にもとづいている。考えるべきはこの均衡においてタイプ 1 の（能力が低い）労働者がどの程度の教育レベルを選ぶインセンティブを持つであろうかということである。もしタイプ 1 の労働者が $e > 0$ の教育を受けることを選び，それに対して企業がその労働者がタイプ 2 の労働者であると思った場合，彼が得ることのできる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 1.05e$ である。これがタイプ 1 の労働者が e の教育レベルを選んで得られる最大の利得ということになる。$e > \frac{10}{21} \approx 0.48$ であればその値はこのタイプの労働者の均衡における利得 1.5 より小さい。したがってこの Pooling 均衡においてタイプ 1 の労働者はそれ以上の教育レベルを選ぶインセンティブを持たない。

一方タイプ 2 の労働者が e の教育レベルを選び，企業がその労働者がタイプ 2 の労働者であると思った場合に得られる利得は賃金と教育費用の差 $2 - 0.4e$ であるが，$e < 1.25$ であればその値はこのタイプの労働者の均衡における利得 1.5 より大きい。したがって前節の完全ベイジアン均衡の合理性の条件を適用すると，企業は，『もし労働者が均衡戦略とは異なって $e > 0.48 (\geqq 0.5)$ の教育レベルを選んだ場合にはその労働者はタイプ 2 であ

る（能力が高い）という推測をもつべきである』ということになる。企業がそのような推測を持つとすれば $e > 0.48$ の教育を受けた労働者に支払われる賃金は 2 になり，タイプ 2 の労働者の最適な戦略は $e > 0.48$ の教育レベルを選ぶことになるので Pooling 均衡は均衡ではなくなる。したがって Pooling 均衡は合理的ではない。

Separating 均衡においては，上で見たようにタイプ 1 の労働者は $e = 1$ 以上の教育レベルを選ぶインセンティブをもたないので $e \geqq 1$ ならばタイプ 2 であるという推測は合理的である。またタイプ 2 の労働者が $e < 1$（$e \leqq 0.9$）の教育レベルを選んだ場合には，タイプ 1 の労働者によってまねをされる可能性がある[*23]ので自分がタイプ 2 であることを企業に知らせることはできないから選ばない。したがって，Separating 均衡は合理的な均衡である。

以上の分析から，**ゲーム 6 の合理的な均衡は Separating 均衡である**，という結論が得られる。

Separating 均衡においては，高いレベルの教育を受けることによって能力の高い労働者が間接的に自分の能力を企業に認識させることができるので，教育が労働者の能力のシグナルの役割を果たしている。

2.10　協力ゲームの理論

協力ゲームとはゲームのプレイヤーが互いに話し合ったり相談したりできる状況で適当な解を見出そうとするものである。ここでは代表的な協力ゲームの理論について基本的な部分を紹介しよう。

2.10.1　コア

次のような例を考える。

隣り合わせに建っている 3 軒の家 A，B，C が近くまでパイプラインで来ている温泉を家に引き込みたいと考えているとする。各自が引けばパイプラインからの距離や家の構造などによって A は 70 万円，B は 55 万円，C は 65 万円かかる。しかし 2 軒あるいは 3 軒共同で引けば経費を安くすることができる。具体的に A と B が共同で引けば 119 万円，B と C なら 112 万円で引くことができ，単独で引くよりも合計では安くなる。一方 A と C は離れているために共同で引いても経費を下げられずメリットはない。さらに 3 軒共同で引けば 170 万円で引くことができるものとする。A と B が協力すればそれぞれ単独で引くよりも合わせて 6 万円安くすることができるので，その協力による価値を

$$v(\{A, B\}) = 6$$

[*23] タイプ 1 の労働者が $e = 0.9$ を選んで，企業がその労働者はタイプ 2 であると思って賃金 2 を支払うと，労働者の利得は $2 - 1.05 \times 0.9 > 1.055$ となり Separating 均衡の利得を上回る。

と表す。このように複数のプレイヤーが協力することを**提携**と呼ぶ。またその提携によって得られる価値を表す関数を**特性関数**と呼ぶ。上の式は提携 $\{A, B\}$ の特性関数の値が 6 であることを意味する。同様に考えると

$$v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 0$$

となる。A と C の 2 人の提携では節約はできない。また 3 人全員の提携 $\{A, B, C\}$ の特性関数の値は

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

である。単独ではもちろん節約できないので，そのことを $v(\{A\}) = 0$，$v(\{B\}) = 0$，$v(\{C\}) = 0$ と表す。3 人で一緒に引けばそれぞれが単独で引くよりも 20 万円節約できる。特性関数の値から

$$v(\{A, B\}) > v(\{A\}) + v(\{B\})$$

$$v(\{B, C\}) > v(\{B\}) + v(\{C\})$$

が得られ，さらに

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{A, B\}) + v(\{C\})$$

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{B, C\}) + v(\{A\})$$

$$v(\{A, B, C\}) > v(\{A, C\}) + v(\{B\})$$

が成り立つ。これらの式は A，B がそれぞれ単独で引くよりは協力した方がよいことを（B，C も同様），また A，B2 人，あるいは B，C2 人または A，C2 人が協力するよりも 3 人で協力した方がよいことを意味する。そこで 3 人が協力して温泉を引いたとき，その経費をどのように分担するか，逆に言えば協力することによって節約できる分をどのように分けるのが適当であるかを，ある基準にもとづいて検討してみよう。全体で節約される 20 万円の A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とする。まず節約される 20 万円すべてを 3 人に配分し，かつ各自の取り分がマイナスでは誰も参加しないので次の 2 つの条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 20 \text{（全体合理性）}$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0 \text{（個人合理性）}$$

3 人の提携を実現するには単独で引く場合と比べた場合はもちろん，2 人で協力して引く場合よりもよりよい結果が実現されなければならない。そうでなければその 2 人は提携から抜けて 2 人だけで温泉を引くことを選ぶであろう。したがって上記の条件に加えて

$$x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 8$$

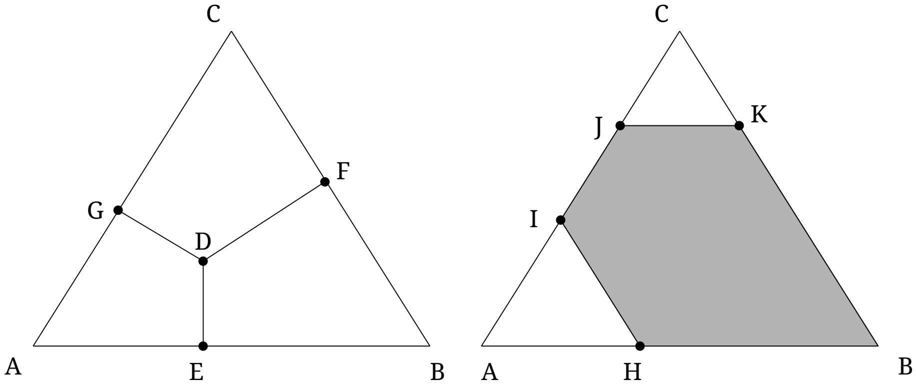


図 2.3　コアの図解

が成り立たなければならない。これらの条件を満たす配分 (x, y, z) の集合を**コア** (core) と呼ぶ。コアがなるべく狭い方が限られた配分だけが望ましい配分の候補になるが，この例ではそうはならない。$x + y \geqq 6$，$y + z \geqq 8$ なので $z \leqq 14$，$x \leqq 12$ でなければならないが，$v(\{A, C\}) = 0$ によって $x + z \geqq 0$ であればよいので y に制約はない。したがって $(x, y, z) = (0, 20, 0)$ というような配分も $(x, y, z) = (6, 0, 14)$ というような配分もコアに含まれてしまう。次の「仁」ではさらに満たすべき条件をつけ加えてコアの中から最も望ましい配分を見つけ出す方法を考えてみよう。コアが存在しないゲームもある。仁はコアが存在すればそのコアに含まれているが，コアが存在しなくても仁は存在する。詳しくは仁の説明の中で述べる。

「仁」の説明で用いる「不満」という言葉を使えば，コアはすべての提携が正の不満を持たない配分の集合である。

■コアの図解　コアの図解を紹介する。

$v(\{A, B\}) = 6,\ v(\{B, C\}) = 8,\ v(\{A, C\}) = 0,\ v(\{A, B, C\}) = 20,\ v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$

の例を考え，A，B，C の配分を x，y，z で表す。コアの条件は

$$x + y + z = 20,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0,\ x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 8$$

であるが，$x + y \geqq 6$ は $z \leqq 14$ に，$y + z \geqq 8$ は $x \leqq 12$ に対応する。さて，図のような正三角形を描く。

まず左の図を見ていただきたい。E，F，G はそれぞれ D から各辺に下ろした垂線の足である。正三角形であるから DE，DF，DG の和は一定である（簡単に証明できる)。それぞれ $DF = x$，$DG = y$，$DE = z$，$DE + DF + DG = 20$ とすると D は上の配分を表していることがわかる。D と BC の距離がプレイヤー A の，D と AC の距離が B の，D と AB

の距離が C の配分である，D はこの三角形内（辺と頂点を含む）のどこにでもとれる。例えば点 A を D とすると $(x, y, z) = (20, 0, 0)$ という配分を，AB 上のある点を D とすると $z = 0$ となる配分を表す。コアの条件 $x + y \geqq 6$, $y + z \geqq 8$ は，それぞれ $DE \leqq 14$, $DF \leqq 12$ を意味するからそれらを満たす領域は右の図のように表される。図の網掛けした部分がコアである。H，I，J，K はそれぞれ $(x, y, z) = (12, 8, 0)$，$(x, y, z) = (12, 0, 8)$，$(x, y, z) = (6, 0, 14)$，$(x, y, z) = (0, 6, 14)$ という配分を表している。

2.10.2　仁 (nucleous)

単独または 2 人の提携で実現できる価値と全員が提携したときに得られる各自の配分（または 2 人の配分の和）との差を「不満」と呼ぶことにする。今の例では次のように表される。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 6 - (x + y)\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 8 - (y + z)\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = -(x + z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z
\end{aligned}$$

たとえば配分 $(x, y, z) = (6, 0, 14)$ に対する不満は上から $0, -6, -20, -6, 0, -14$ となる。マイナスの不満とは満足度を表すと考えればよい。上の式をすべて足し合わせると

$$14 - 3(x + y + z) = -46$$

となるから不満の合計は一定である。しかしそれに偏りがあることは望ましくない。より公平な配分を考えるにはできるだけ不満を均等化することが求められるであろう。そこでまず不満の内最も大きいものをなるべく小さくすることを考える。最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$6 - (x + y) \leqq m,\ 8 - (y + z) \leqq m,\ -(x + z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$x + y + z = 20$ より $-(x + y) = z - 20$，$-(y + z) = x - 20$，$-(x + z) = y - 20$ であるから上記の条件は

$$-m \leqq x \leqq 12 + m,\ -m \leqq y \leqq 20 + m,\ -m \leqq z \leqq 14 + m$$

と書き直される。ここで $m = -6$ とすると

$$6 \leqq x \leqq 6,\ 6 \leqq y \leqq 14,\ 6 \leqq z \leqq 8$$

となる。これらを満たす (x, y, z) は存在する。しかし $m = -7$ とすると最初の条件が $7 \leqq x \leqq 5$ となり，それを満たす x はないから -6 が最大の不満を最小化した値である。

これで $x = 6$ および $y + z = 14$ が決まる。その前提で各提携（1 人の場合も提携と呼ぶことにする）の不満を求めると

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = -y \\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = -6 \\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = -6 - z \\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = -6 \\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y \\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = -z
\end{aligned}$$

が得られる。-6 が 2 つあるので 3 番目に大きい不満ができるだけ小さくなるように考えよう。すると $y + z = 14$ という条件のもとで $y = 7$，$z = 7$ が得られる。したがって $(x, y, z) = (6, 7, 7)$ が最も望ましい配分である。このようにして求められた配分を「仁」と呼ぶ。プレイヤーの数が多く 3 番目に大きい不満を最小化することで配分が確定しない場合にはさらに 4 番目，5 番目 $\cdots$ と配分が確定するまで続ける。

「仁」は不満を均等化する配分ではなく，「最大の不満を最小化し，その上で次の不満を最小化する。さらに次の不満を最小化する」というプロセスを配分が確定するまで続けて得られる配分である。不満の合計は一定なので不満を完全に均等化するような配分があればそれが仁となるが，そのような不満があるとは限らない。なお，不満を均等化するというのはもちろん配分を均等化することではない。

■コアが存在しない場合の仁　仁は不満を最小化するという条件で求められるものであり，コアの条件を課すわけではないのでコアがなくても仁は存在する。ただしその場合は正の不満が残ることになるので，一部のグループが全体の提携から抜けることも考えられる。

特性関数が次のようであるとする。

$$v(\{A, B\}) = 7,\ v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 6,\ v(\{A, B, C\}) = 10$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

A，B，C，3 人の取り分を x，y，z とするとこれらがコアに含まれるためには次の条件が満たされなければならない。

$$x + y + z = 10$$

$$x + y \geqq 7,\ y + z \geqq 8,\ x + z \geqq 6$$

$$x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ z \geqq 0$$

$x+y \geqq 7$, $y+z \geqq 8$ なので $z \leqq 3$, $x \leqq 2$ でなければならない。しかしそれでは $x+z \geqq 6$ が成り立たない。したがってこのゲームにはコアが存在しない。しかし仁は定義できる。このゲームでは各提携の不満は次のように表される。

$$\{A,B\}:\ v(\{A,B\})-(x+y)=7-(x+y)$$
$$\{B,C\}:\ v(\{B,C\})-(y+z)=8-(y+z)$$
$$\{A,C\}:\ v(\{A,C\})-(x+z)=6-(x+z)$$
$$\{A\}:\ v(\{A\})-x=-x$$
$$\{B\}:\ v(\{B\})-y=-y$$
$$\{C\}:\ v(\{C\})-z=-z$$

すべて足し合わせると

$$21-3(x+y+z)=-9$$

となってやはり一定である。最大の不満の大きさを m とするとそれぞれの不満は m 以下であるから次の式が得られる。

$$7-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 6-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

$m=\frac{1}{3}$ とすると

$$x+y \geqq \frac{20}{3},\ y+z \geqq \frac{23}{3},\ x+z \geqq \frac{17}{3},\ x \geqq \frac{1}{3},\ y \geqq \frac{1}{3},\ z \geqq \frac{1}{3}$$

が得られ，これらの式から

$$x=\frac{7}{3},\ y=\frac{13}{3},\ z=\frac{10}{3}$$

が求まる。このとき

$$x+y=\frac{20}{3}<7,\ y+z=\frac{23}{3}<8,\ x+z=\frac{17}{3}<6$$

であるから 2 人ずつの提携には不満が残る。

$m=\frac{1}{3}$ を求める。

$$7-(x+y) \leqq m,\ 8-(y+z) \leqq m,\ 6-(x+z) \leqq m,\ -x \leqq m,\ -y \leqq m,\ -z \leqq m$$

と $x+y+z=10$ より

$$-m \leqq x \leqq 2+m,\ -m \leqq y \leqq 4+m,\ -m \leqq z \leqq 3+m$$

が得られる。先の例と同じ手順で $m=-1$ が最小化された最大の不満となりそうに思われるが，一方で不等式の右辺の和は 10 以上でなければならないので $9+3m \geqq 10$ から

$$m \geqq \frac{1}{3}>-1$$

となる。この $\frac{1}{3}$ が最小化された最大の不満である。

先の例では

$$-m \leqq x \leqq 12+m,\ -m \leqq y \leqq 20+m,\ -m \leqq z \leqq 14+m$$

の右辺の和が 20 以上であるという条件 $46+3m \geqq 20$ より $m \geqq -\frac{26}{3}(<-6)$ となるので $m=-6$ が最小化された最大の不満であることに問題はない。

■より簡単な例–2 人の共同事業　もっと簡単な例を考えてみよう。2 人の人，A，B がいてある共同事業をしたときの収益の分け方を話し合っているものとする。共同事業をすれば 2000 万円の収益が得られるが，それぞれ 1 人 1 人が単独で行えば A が 100 万円，B は 200 万円の収益しか得ることができない。このゲームの特性関数は

$$v(\{A\})=100,\ v(\{B\})=200,\ v(\{A,B\})=2000$$

と表される。共同事業を行ったときの A，B の取り分を x_A，x_B とする。これらは次の条件を満たさなければならない。

$$x_A+x_B=2000,\ x_A \geqq 100,\ x_B \geqq 200$$

この条件を満たす x_A，x_B の集合がこのゲームのコアをなす。$(x_A,x_B)=(1800,200)$，$(x_A,x_B)=(100,1900)$ などコアに含まれる配分はたくさんある。次に仁を求めよう。このゲームでは提携は $\{A\}$，$\{B\}$，$\{A,B\}$ の 3 つしかないが，2 人の提携に対する 1 人だけの提携の不満は

$$\begin{aligned}\{A\}:&\ v(\{A\})-x_A=100-x_A\\ \{B\}:&\ v(\{B\})-x_B=200-x_B\end{aligned}$$

となる。2 人の不満を最小にするにはその不満を均等にすればよい。したがって

$$x_B-x_A=100$$

が成り立つことが求められる。これから $(x_A,x_B)=(950,1050)$ という配分が仁であることがわかる。

2.10.3　シャープレイ値

仁を計算したものと同じ例を用いる。ここで紹介するシャープレイ値 (Shapley value) は仁とは異なった観点から望ましい配分を求めようとするものである。シャープレイ値では提携が形成される際の各プレイヤーの貢献度が重要な意味を持つ。例えば提携 $\{A,B\}$ に C が加われば提携 $\{A,B,C\}$ が作られる，そのときの C の貢献度は $v(\{A,B,C\})-v(\{A,B\})=$

14 となる。A が 1 人だけいるところに B が加われば提携 $\{A,B\}$ が作られる，そのときの B の貢献度は $v(\{A,B\})-v(\{A\})=6$ である。また A 単独の提携については $v(\{A\})$ の値を貢献度とする。A が 1 人だけいるところに B が加わり，さらに C が加わって全員の提携が作られる過程を $A\to AB\to ABC$ と表す。同様にして B が 1 人だけいるところに C が加わり，さらに A が加わって全員の提携が作られる過程は $B\to BC\to ABC$ と表される。このときの提携 $\{B,C\}$ における C の貢献度は $v(\{B,C\})-v(\{B\})=8$，提携 $\{A,B,C\}$ における A の貢献度は $v(\{A,B,C\})-v(\{B,C\})=12$ である。このような過程は全部で 6 つある。まず各提携における各プレイヤーの貢献度を次のような一覧表で表してみる。

	A	B	C
$\{A,B,C\}$	20-8=12	20-0=20	20-6=14
$\{A,B\}$	6	6	–
$\{A,C\}$	0	–	0
$\{B,C\}$	–	8	8
$\{A\}$	0	–	–
$\{B\}$	–	0	–
$\{C\}$	–	–	0

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A\to AB\to ABC$	0	6	14
$A\to AC\to ABC$	0	20	0
$B\to AB\to ABC$	6	0	14
$B\to BC\to ABC$	12	0	8
$C\to AC\to ABC$	0	20	0
$C\to BC\to ABC$	12	8	0

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均（期待値）を求めると A，B，C それぞれ 5，9，6 である。この値の組がシャープレイ値であり，それにもとづいた配分 $(x,y,z)=(5,9,6)$ が貢献度を基準とした望ましい配分ということになる。

■より簡単な例–2 人の共同事業　仁の所で考えた A，B2 人の共同事業の例を見てみよう。共同事業から得られる収益は 2000 万円で，それぞれ 1 人 1 人が単独で行えば A が 100 万円，B は 200 万円の収益しか得ることができないと想定されていて，特性関数は

$$v(\{A\})=100,\ v(\{B\})=200,\ v(\{A,B\})=2000$$

のように表された。共同事業を行ったときの A，B の取り分を x_A，x_B とする。2 人の場合は提携の作り方が $A\to AB$ と $B\to AB$ しかない。貢献度を表にすると

	A	B
$A \to AB$	100	1900
$B \to AB$	1800	200

この表からシャープレイ値は $(950, 1050)$ であることがわかる。この配分は仁によるものと一致する。

シャープレイ値の公理

シャープレイ値は次の 4 つの条件（公理）を満たす唯一の解であることが知られている。

(1).「全体合理性」
全員の提携によって実現する利得のすべてが全員に配分されるということである。本文の表からもわかるように全員の提携が作られるプロセスにおける各プレイヤーの貢献度の和は全員の提携から得られる利得に等しい。したがって貢献度の平均値をもとに配分を決めるシャープレイ値は全体合理性を満たす。

(2).「ナルプレイヤー (null player) のゼロ評価」
ナルプレイヤーとはいかなる提携の形成にあたっても何の貢献もしないプレイヤーを意味する。あるプレイヤーを含む提携の特性関数の値と，そのプレイヤーだけを除いた提携の特性関数の値とが常に等しいとき，そのプレイヤーはナルプレイヤーとなる。この条件はそのようなナルプレイヤーの配分はゼロであることを要求する。すべての提携においてあるプレイヤーの貢献度がゼロならばそのシャープレイ値もゼロであるからこの条件は満たされている。

(3).「対称性：貢献度の等しいプレイヤーに対する配分はすべて等しくする」
プレイヤー i と j の貢献度が等しいというのは，i，j を含まない任意の提携に i が加わってできる提携の特性関数の値と j が加わってできる提携の特性関数とが等しいことを意味する。貢献度の平均値をもとに配分を決めるシャープレイ値はこの条件も満たす。

(4).「加法性」
同じプレイヤーの集合からなる 2 つのゲーム G_1，G_2 における任意の提携 S の特性関数をそれぞれ $v_1(S)$，$v_2(S)$，各ゲームにおけるプレイヤー i のシャープレイ値を $\varphi_i(v_1)$，$\varphi_i(v_2)$ とするとき

$$v(S) = v_1(S) + v_2(S)$$

という特性関数を持つゲーム G におけるプレイヤー i のシャープレイ値 $\varphi_i(v_1 + v_2)$ は

$$\varphi_i(v_1 + v_2) = \varphi_i(v_1) + \varphi_i(v_2)$$

に等しい。

各プレイヤーの G における各提携についての貢献度は G_1，G_2 における貢献度の和に等しくなるからシャープレイ値はこの条件を満たす。

■コア，仁，シャープレイ値の問題の例　3 人のプレイヤー A，B，C がいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\}) = 1,\ v(\{B\}) = 0,\ v(\{C\}) = 2$$

$$v(\{A, B\}) = 6,\ v(\{B, C\}) = 7,\ v(\{A, C\}) = 11$$

$$v(\{A, B, C\}) = 25$$

(1). **コア**

3 人で提携を結んだときの A，B，C の取り分を x，y，z とする。コアの条件は次のように表される。

$$x + y + z = 25,\ x \geqq 1,\ y \geqq 0,\ z \geqq 2$$

$$x + y \geqq 6,\ y + z \geqq 7,\ x + z \geqq 11$$

これらの条件を満たす配分の集合がコアである。条件より $1 \leqq x \leqq 18$, $0 \leqq y \leqq 14$, $2 \leqq z \leqq 19$ でなければならない。

(2). **仁**

各提携の不満は以下のようである。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = 6 - (x + y)\\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = 7 - (y + z)\\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 11 - (x + z)\\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = 1 - x\\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -y\\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = 2 - z
\end{aligned}$$

最大の不満の大きさを m とすると

$$6 - (x + y) \leqq m,\ 7 - (y + z) \leqq m,\ 11 - (x + z) \leqq m,\ 1 - x \leqq m,\ -y \leqq m,\ 2 - z \leqq m,$$

が得られる。$x + y + z = 24$ よりこれらの条件は次のように書き直される。

$$1 - m \leqq x \leqq 18 + m,\ -m \leqq y \leqq 14 + m,\ 2 - m \leqq z \leqq 19 + m$$

x，y，z の式がそれぞれ等式になる場合を考えると，$1 - m = 18 + m$，$-m = 14 + m$，$2 - m = 19 + m$ より各々 $m = -\frac{17}{2}$，$m = -7$，$m = -\frac{17}{2}$ を得る。この内最大のものは $m = -7$ であるから，これが最小化された最大の不満である。そうすると

$$8 \leqq x \leqq 11,\ 7 \leqq y \leqq 7,\ 9 \leqq z \leqq 12$$

となり $y = 7$ が決まる。$m = -\frac{17}{2}$ とすると $\frac{17}{2} \leqq y \leqq \frac{11}{2}$ となり矛盾が生じる。
$y = 7$ とすると各提携の不満は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
&\{A, B\}:\ v(\{A, B\}) - (x + y) = -1 - x \\
&\{B, C\}:\ v(\{B, C\}) - (y + z) = -z \\
&\{A, C\}:\ v(\{A, C\}) - (x + z) = 11 - (x + z) = -7 \\
&\{A\}:\ v(\{A\}) - x = 1 - x \\
&\{B\}:\ v(\{B\}) - y = -7 \\
&\{C\}:\ v(\{C\}) - z = 2 - z
\end{aligned}$$

値が決まっていない不満の最大値を最小化することを考えると $1 - x$ と $2 - z$ を等しくすることになるので $x = \frac{17}{2}$，$z = \frac{19}{2}$ が求まる。したがって仁となる配分は $(x, y, z) = (\frac{17}{2}, 7, \frac{19}{2})$ である。

(3). **シャープレイ値**

各提携における各プレイヤーの貢献度は次の表で表される。

	A	B	C
$\{A, B, C\}$	25-7=18	25-11=14	25-6=19
$\{A, B\}$	6	5	–
$\{A, C\}$	9	–	10
$\{B, C\}$	–	5	7
$\{A\}$	1	–	–
$\{B\}$	–	0	–
$\{C\}$	–	–	2

さらに，これらの提携が作られる過程における各プレイヤーの貢献度を表にすると，

	A	B	C
$A \to AB \to ABC$	1	5	19
$A \to AC \to ABC$	1	14	10
$B \to AB \to ABC$	6	0	19
$B \to BC \to ABC$	18	0	7
$C \to AC \to ABC$	9	14	2
$C \to BC \to ABC$	18	5	2

となる。全員の提携が作られる 6 つの過程が同じ確率で起きるものとして各プレイヤーの貢献度の平均を求めると A，B，C それぞれ $\frac{53}{6}$，$\frac{19}{3}$，$\frac{59}{6}$ であるからシャープ

レイ値にもとづく配分は $(x, y, z) = (\frac{53}{6}, \frac{19}{3}, \frac{59}{6})$ である。

2.11　企業立地の問題：ホテリングのモデル

ごく簡単なモデルで企業立地の問題を考えてみる。東西に範囲の決まった（有限の長さを持つ）1 本の道路の両側に一定の密度で（均等に）人が住んでいるものとする。2 つのアイスクリーム屋（かき氷屋でもよい）A，B がこの道路のどこかに店を出す。道路の長さを 1，人口も全体として 1 とし，店の大きさは無視する。したがって同じ場所に店を出すことも可能である。アイスクリームの価格は一定で 1 であるとする。また費用は 0 であると仮定する。A，B それぞれが店を出す場所を西の端からの距離で表し，x_A，x_B と書く $(0 \leqq x_A \leqq 1, 0 \leqq x_B \leqq 1)$。人々は自分の家から近い店に行く。同じ距離ならば確率 $\frac{1}{2}$ でどちらの店にも行くものとする。$x_A < x_B$（A の方が西）とすると A，B が獲得できるお客さんの数（それが利潤に等しい）π_A，π_B はそれぞれ

$$\pi_A = x_A + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$\pi_B = 1 - x_B + \frac{1}{2}(x_B - x_A) = 1 - \frac{x_A + x_B}{2}$$

となる。A が B と同じ場所に店を出したとすると利潤は等しく

$$\pi_A = \pi_B = \frac{1}{2}$$

である。また A が B を越えて東側に店を出した $(x_A = x_B + \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ として，ε はごく小さい数) ときの利潤は

$$\pi_A = 1 - \frac{2x_B + \varepsilon}{2}$$

であり，逆に B が A を越えて西側に店を出した $(x_B = x_A - \varepsilon,\ \varepsilon > 0$ として) ときの利潤は

$$\pi_B = \frac{2x_A - \varepsilon}{2}$$

である。A にとって最適な戦略を考えてみよう。$x_A < x_B$ の範囲で考えるとなるべく B に近い所に立地した方が利潤が大きくなるので最適な戦略は $x_B - \varepsilon$ であり，そのときの利潤は $\frac{2x_B - \varepsilon}{2} = x_B - \frac{\varepsilon}{2}$，B と同じ場所に立地したときの利潤は $\frac{1}{2}$，B より東側に立地したときの利潤は $1 - \frac{2x_B + \varepsilon}{2} = 1 - x_B - \frac{\varepsilon}{2}$ であるから，A の最適反応は次のようになる。

(1). $x_B < \frac{1}{2}$ のとき B より東側に隣接して（ε の距離で）立地するのが最適
(2). $x_B = \frac{1}{2}$ のとき B と同じ場所に立地するのが最適
(3). $x_B > \frac{1}{2}$ のとき B より西側に隣接して立地するのが最適

次に B について考えてみよう。$x_A < x_B$ の範囲で考えるとなるべく A に近い所に立地した方が利潤が大きくなるので最適な戦略は $x_A + \varepsilon$ であり，そのときの利潤は

$1-\frac{2x_A+\varepsilon}{2}=1-x_A-\frac{\varepsilon}{2}$，A と同じ場所に立地したときの利潤は $\frac{1}{2}$，A より西側に立地したときの利潤は $\frac{2x_A-\varepsilon}{2}=x_A-\frac{\varepsilon}{2}$ であるから，B の最適反応は次のようになる。

(1). $x_A<\frac{1}{2}$ のとき A より東側に隣接して（ε の距離で）立地するのが最適
(2). $x_A=\frac{1}{2}$ のとき A と同じ場所に立地するのが最適
(3). $x_A>\frac{1}{2}$ のとき A より西側に隣接して立地するのが最適

それぞれ相手が中央よりも西側にいるときにはそれに隣接して東側に立地するのが最適であるが，お互いにそうすることはできないのでナッシュ均衡にはならない。同じように相手が中央よりも東側にいるときにはそれに隣接して西側に立地するのが最適であるが，お互いにそうすることはできないのでナッシュ均衡にはならない。したがってナッシュ均衡は「ともに中央に立地する ($x_A=x_B=\frac{1}{2}$)」という戦略の組み合わせである。

この議論は政党が選択する政策の問題に応用されている。ある政策に対する政党の提案について 1 本の線分上に並べられるような対立軸，有権者の考え方の違いがあるものとしよう（昔で言う左翼，中道，右翼のように）。それを 0 から 1 までの数字で表し，その間に有権者の考え方が均等に分布している（均等でなければ適当に目盛りを変えて均等に分布するようにすればよい）。有権者の人数が n 人（わかりやすくするために n は奇数であるとする）であるとすると 0 から順番に数えて中央に位置する（$\frac{n+1}{2}$ 番目の）人は丁度真ん中の位置（$\frac{1}{2}$ の所）に位置する考え方を持つ。このときある 1 つの提案を巡って賛否を問うと，中央の人が賛成ならば過半数が賛成となって可決され（左翼的な案でも，右翼的な案でも），中央の人が反対ならば過半数が反対となって否決される。このように 1 つの提案が可決されるか否決されるかは中央の人がその案に賛成か反対かで決まる。このことを「中位投票者定理 (median voter theorem)」と呼ぶ。

2 つの政党 A，B があって上で仮定したような対立軸がある問題についてそれぞれが提案を行う。各政党はより多くの支持者を獲得しようと考える。各投票者は自分の考えに近い方の案を選ぶ。これはゲームとしてはアイスクリーム屋の立地の問題と同じ構造をしており，相手の政党が左翼的な案を出してくればそれより少し右翼的な案を出せば勝てるし，逆に相手が右翼的な案を出してくればそれより少し左翼的な案を出せば勝てる。結局，ともに中間の案を出すことがナッシュ均衡となる。したがって二大政党体制においては両政党の政策が似通ってきてともに中間的なものになるとされる。

2.12　鹿狩ゲームと危険支配

プレイヤー 2

プレイヤー 1		ソフト X	ソフト Y
	ソフト X	4, 4	0, 2
	ソフト Y	2, 0	3, 3

表のゲームを考える。(X,X) と (Y,Y) がナッシュ均衡であり，(X,X) がパレート効率的である。Y を選んでいるプレイヤーは相手が X でも多少の利得が得られるのに対して X を選んでいるプレイヤーは相手が X でなければ利得を得ることはできない。それだけ X を選ぶことは危険を伴う。

(Y,Y) という均衡は危険支配的 (risk dominant) であると言う。この例のようなゲームは stag hunt ゲーム（鹿狩ゲーム）と呼ばれる。二人の狩人が鹿または兎を取りに行く。ともに同じ戦略を選べば協力して獲物を得られるが，異なる戦略を選んだ場合は兎だけが少し取れて鹿は取れない。X が鹿を，Y が兎を取りに行く戦略と考える。ともに鹿を取りに行くのが望ましい均衡である（利得支配的 (payoff dominant) と言う，パレート効率性の意味で優れているということでもある）が，鹿を取りに行くと何も取れない可能性があるので利得の構造によってはともに兎を取りに行く均衡が危険支配的になる。

■危険支配の一般的な議論 次のゲームを考える。

プレイヤー 2

		X	Y
プレ		X	Y
イヤ	X	a_1, a_2	b_1, c_2
ー 1	Y	c_1, b_2	d_1, d_2

(X,X), (Y,Y) ともにナッシュ均衡であるとする。したがって，$a_1 > c_1$, $d_1 > b_1$, $a_2 > c_2$, $d_2 > b_2$ である。プレイヤー 1 の立場に立って相手（プレイヤー 2）が確率 q で X を，確率 $1-q$ で Y を選ぶとする。このゲームにおいてプレイヤー 1 が X，Y を選んだときの期待利得はそれぞれ

$$E(X) = qa_1 + (1-q)b_1$$

$$E(Y) = qc_1 + (1-q)d_1$$

であり，$E(X) > E(Y)$ となるのは

$$q(a_1 - c_1) + (1-q)(b_1 - d_1) > 0$$

すなわち

$$q > \frac{d_1 - b_1}{(a_1 - c_1) + (d_1 - b_1)} = \bar{q}$$

のときである。一方，プレイヤー 2 の立場に立って相手（プレイヤー 1）が確率 p で X を，確率 $1-p$ で Y を選ぶとすると

$$1 - p > \frac{a_2 - c_2}{(a_2 - c_2) + (d_2 - b_2)} = 1 - \bar{p}$$

であればプレイヤー 2 にとって Y を選んだときの期待利得が X を選んだときの期待利得より大きい。$\bar{q} < 1 - \bar{p}$ ならば上の式が成り立つ可能性の方が下の式が成り立つ可能性よ

り大きいので，プレイヤー 2 が Y にこだわることによって招く危険（リスク）がプレイヤー 1 が X にこだわることによって招く危険（リスク）より大きいと言える。逆に見ればこのとき $\bar{p} < 1 - \bar{q}$ が満たされるのでプレイヤー 1 が Y にこだわることによって招く危険（リスク）がプレイヤー 2 が X にこだわることによって招く危険（リスク）より大きい。このときともに X を選ぶ均衡がともに Y を選ぶ均衡に対して危険支配的となる。その条件は

$$\frac{d_1 - b_1}{(a_1 - c_1) + (d_1 - b_1)} < \frac{a_2 - c_2}{(a_2 - c_2) + (d_2 - b_2)}$$

であるが，両辺の分子・分母が正（なぜか？）なので

$$\frac{(a_1 - c_1) + (d_1 - b_1)}{d_1 - b_1} > \frac{(a_2 - c_2) + (d_2 - b_2)}{a_2 - c_2}$$

と書け

$$(a_1 - c_1)(a_2 - c_2) > (d_1 - b_1)(d_2 - b_2)$$

となる。この式は各プレイヤーが X を選ぶ均衡から自らはずれることによって失う利得の積が Y を選ぶ均衡から自らはずれることによって失う利得の積より大きいことを意味している。逆の場合 Y を選ぶ均衡が X を選ぶ均衡に対して危険支配的である。

対称的なゲームであれば，$a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$ なので，これらを a, b, c, d とすると上記の条件は

$$a - c > d - b$$

となる。これは各プレイヤーにとって相手が X，Y を等しい確率で選ぶと想定したときに X を選ぶ方がよいという条件になっている。

上の例では $a = 4$, $b = 0$, $c = 2$, $d = 3$ であるから，ともに Y を選ぶ（兎を取りに行く）均衡が危険支配的である。そうなるのは相手が兎を取りに行っているときに自分が鹿を取りに行った場合の損失が大きいからである。

演習問題

1. 生産関数 $x = \sqrt{LK}$（x は産出量，L，K は労働，資本投入量）から等産出量曲線（等量曲線）を導け。
2. 等産出量曲線は右上がりか，右下がりか？ またなぜか？
3. 同じ財の 2 つの等産出量曲線は交わってはならない。なぜか？
4. 異なる 2 つの財の等産出量曲線を同じ図に描いたとき，それらは交わってもよい。そのとき 2 つの等産出量曲線の傾きの大きさの違いが意味することを説明せよ？
5. 企業の費用最小化問題において賃金が安くなったときの生産方法の変化を図示して説明せよ。
6. 企業の費用最小化問題において資本レンタル（資本の報酬）が低くなったときの生産方法の変化を図示して説明せよ。
7. 「労働」と「資本」が企業の生産要素であると見なしたとき，資本の価格とは何を指すと考えられるかを述べよ。
8. 限界費用が平均費用より大きいときに産出量の増加によって平均費用はどうなるか？ 理由を含めて説明せよ。小さいときはどうか？
9. $$C(x) = 3x^2 + 100$$

   で表される費用関数を持つ企業について財の価格が 48 のときの利潤を最大にする産出量とそのときの利潤を微分を用いずに求めよ。x は産出量であり，完全競争を前提とする。
10. 完全競争市場において財を生産・販売しているある企業の費用関数が

    $$c = x^3 - 7x^2 + 2x + 4 \ (x \text{ は産出量})$$

    であるとする。またこの企業の財の価格は 26 である。
    (i) 利潤を最大化する産出量を求めよ。
    (ii) 1 単位当りある額の従量税が課されたときに産出量が 1 減る場合，その従量税がいくらであるか求めよ。
11. 完全競争における企業の利潤を次のように表す。

    $$\pi = px - wL - rK$$

$$\text{ただし } x = 6L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{1}{2}} \text{（生産関数）}$$

x： 財の産出量，p： 財の価格，L： 労働投入量，K： 資本投入量： w： 賃金率，r： 資本レンタル（資本の価格）

(i) 利潤を最大にする L，K の値，およびそのときの利潤を求めよ。

(ii) 利潤を最大にするような労働，資本の投入量と財の産出量を $\tilde{L}(p,w,r)$，$\tilde{K}(p,w,r)$，$\tilde{x}(p,w,r)$ と表す。またそのときの利潤を $\tilde{\pi}(p,w,r)$ と表す。このとき

$$\frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial p} = \tilde{x}(p,w,r),\quad \frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial w} = -\tilde{L}(p,w,r),\quad \frac{\partial\tilde{\pi}}{\partial r} = -\tilde{K}(p,w,r)$$

が成り立つことを示せ。

12. 本文で述べたように短期の費用が

$$C(x) = K + \frac{x^2}{K}$$

で表されるとき，長期の費用は

$$C_L(x) = 2x$$

と表される。短期の費用，長期の費用の関係を図を描いて説明せよ。ただし，K は生産設備の大きさ，x は産出量である。

13. ある企業の短期費用関数が

$$c = (3x - K)^3 + K^3 + 8 \text{（}K \text{ は生産設備，} x \text{ は産出量）}$$

であるとする。K は短期には調整できないが長期には調整可能である（調整費用はかからない)。この企業の長期費用関数を求めよ。

14. 完全競争市場における長期均衡とはどのような状態を指すか，図を描いて説明せよ。また，その長期均衡において企業の株主はどのような状態に置かれているかを述べよ。

15. 独占企業にとっての価格と限界収入の違いを言葉および図で説明せよ。

16. 独占企業と完全競争における企業の行動の違いについて言葉で説明せよ。

17.

$$C(x) = 4x^2 + 300 \text{（}x \text{ は産出量）}$$

で表される費用関数を持つ独占企業について，財の需要曲線が次のように与えられるとき利潤を最大にする産出量とそのときの利潤の大きさを微分を用いずに求めよ。

$$p = 280 - 3x \text{（}x \text{ は需要）}$$

18. 独占的競争の均衡を図示し，その均衡において限界費用曲線がどのような形になっていなければならないかを理由を含めて説明せよ。
19. 独占的競争と完全競争の共通点および相違点について説明せよ。
20. X 財を生産する競争的な企業 A があり財の価格は 160，費用関数は産出量を x として

$$c_A = 2x^2$$

で表される。一方 Y 財を生産する競争的な企業 B があって財の価格は 120，費用関数は産出量を y として

$$c_B = y^2 + xy$$

であるとする。

(i) 各企業が利潤を最大化するときの産出量を求めよ。
(ii) 両企業の利潤の合計を最大化するような各企業の産出量を求めよ。
(iii) (ii) の状態を実現するのに必要な企業 A に対する産出量 1 単位当りの税を求めよ。

21.

$$p = 20 - X$$

で表される需要関数のもとでのクールノーの複占モデルにおいて，企業 A の費用が $c(x) = 3x$，企業 B の費用が $c(y) = y$ で表される場合の各企業の産出量を求め，反応曲線を図示せよ。x，y は企業 A，B の産出量であり，X はその和である。

22. n 社の企業が同質財を生産するクールノーの寡占モデルを考える。n は正の整数である。各企業を i で表す。需要関数は

$$p = a - b\sum_{i=1}^{n} x_i,\ a > 0,\ b > 0$$

で表されるものとする。x_i は企業 i の産出量，p は財の価格である。また企業 i の費用関数は

$$c = dx_i + f,\ 0 < d < a,\ f > 0$$

であり，すべての企業に共通であるとする。f は生産しなくても必要となる固定費用である。

(i) 企業 i の利潤を最大化する産出量を求めよ。
(ii) 企業の利潤がゼロとなるような n の値を求め（この n は長期均衡における企業数である），f とその n の値の関係を調べよ。
(iii) 企業数が (ii) の n のときの財の価格を求めよ。f が 0 に近づくとどうなるか？

均衡においてすべての企業の産出量が等しくなることを用いてもよい。

23. 独占とクールノーの寡占における企業行動の違いについて説明せよ。

24. 差別化された財を生産する 2 つの企業 A，B がある。それぞれの産出量，価格を x_A，x_B，p_A，p_B とする。逆需要関数が

$$p_A = 24 - 2x_A + 2kx_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + 2kx_A$$

であり，企業 A，B の費用が

$$c_A = x_A$$

$$c_B = 2x_B$$

で表される。$k = \frac{1}{2}$ の場合と $k = -\frac{1}{2}$ の場合について，クールノー均衡とベルトラン均衡における各企業の産出量，各財の価格を求めよ。

25. 差別化された財を生産する 2 つの企業 A，B がある。それぞれの産出量，価格を x_A，x_B，p_A，p_B とする。逆需要関数が

$$p_A = 24 - 2x_A + x_B$$

$$p_B = 24 - 2x_B + x_A$$

であり，企業 A，B の費用はともにゼロであるとする。このときクールノー均衡とシュタッケルベルク均衡（企業 A がリーダー，B がフォローワーとする）における各企業の産出量と利潤を求めよ。

26. ある財の 2 つの地域 1，2 での需要がそれぞれ次のように表される。

$$d_1 = 600 - p_1,\ d_1 \text{は地域 1 での需要},\ p_1 \text{は価格}$$

$$d_2 = 400 - 2p_2,\ d_2 \text{は地域 2 での需要},\ p_2 \text{は価格}$$

1 つの企業が独占的に両地域に財を供給しているとき，利潤を最大化する各地域での価格，供給量を求めよ。ただしこの企業の費用関数は

$$c = \frac{x_1^2 + x_2^2}{2},\ x_1,\ x_2 \text{は各地域での供給量}$$

である。

27.

$$X\text{ 財の限界代替率} < \frac{X\text{ 財の限界費用}}{Y\text{ 財の限界費用}}$$

が成り立つ状態において X 財の生産・消費の減少による Y 財の生産・消費の増加が消費者の効用を増加させることを確認せよ。

28. 2 財 X，Y，2 人の消費者 A，B，1 つの企業からなる経済を考える。個人 A は以下のような特徴を持つ。

効用関数は $u_A = x^2 y$，X 財の初期保有量は 200，Y 財の初期保有量は 0

個人 B は以下のような特徴を持つ。

効用関数は $u_B = xy^2$，X 財の初期保有量は 100，Y 財の初期保有量は 0

x，y は各財の消費量を表す。企業は X 財を入力して Y 財を生産し，その生産関数は

$y = 10\sqrt{2}\sqrt{x}$，x は X 財の投入量，y は Y 財の産出量

である。また企業の利潤は 2 人の個人に均等に分配される。

(i) X 財，Y 財の価格を p_x，p_y としてこの企業の利潤を表し，利潤を最大化する X 財の投入量，Y 財の産出量，およびそのときの利潤を p_x，p_y で表せ。企業は各財の価格を与えられたものとして意思決定を行うものとする。

(ii) 個人 A，B それぞれについて予算制約式（配分される企業の利潤，初期保有量の売却収入を含めて）を書き，p_x，p_y の価格のもとでの（初期保有量を含む）X 財，Y 財の需要を p_x，p_y で表せ。

(iii) 需要と供給を均衡させる価格を求めよ。企業の X 財投入量は需要であり，X 財の供給は 2 人の人々の初期保有量のみである。Y 財の供給はもちろん企業の産出量に等しい。

29. ある企業の生産関数を $x = L^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$（$x$ は財の産出量，L，K は労働，資本の投入量），賃金率，資本レンタルをそれぞれ w，r とする。産出量 x が 4 のときの費用最小化問題を解き，それが費用最小化であることを確認せよ。
また，上の計算で求めた労働，資本投入量から費用関数を導き，シェパードの補題が成り立つことを確認せよ。

30. ある企業の生産関数を $x = L^{\frac{1}{3}}K^{\frac{2}{3}}$（$x$ は財の産出量，L，K は労働，資本の投入量），賃金率，資本レンタルをそれぞれ w，r とする。やはり産出量 x が 4 のときの費用最小化問題を解き，それが費用最小化であることを確認せよ。
また，上の計算で求めた労働，資本投入量から費用関数を導き，シェパードの補題が成り立つことを確認せよ。

31. n 社からなるクールノー的な寡占を考える。p を財の価格，X を全企業の産出量の合計，需要関数を $p = 240 - 4X$，各企業の共通の費用関数を $c_i = x_i^2 + 100$（x_i は各企業の産出量）として各企業の利潤を最大にする産出量を求めよ。また n が非常に大きい値になって行くとき n 社の産出量の合計はどのような値に近づいて行くか？さらに財の価格がどのような値に近づいて行くかについても答えるとともに，費用関数が $c_i = 4x_i$ のときにも同じ問題を解け。

32. 表のゲームにおける各プレイヤーの純粋戦略に限定した最適反応を求めよ。さらに（存在すれば）純粋戦略に限定したナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	1, 3	5, 3
ーA	戦略 Y	4, 5	2, 2

33. ある公共財の供給を巡るゲームを考える。2 人のプレイヤー A と B がいて，公共財の需要を大きくする（大）か小さくする（小）かを政府に申告する。申告した需要に基づいて費用負担が決められる。ともに「大」を選べば十分な公共財が供給されるが，一方が「大」を他方が「小」が選んだ場合は「小」を選んだプレイヤーは少ない負担である程度の公共財を得ることができる。「大」を選んだ方は供給される公共財に比べて負担が大きくなる。ともに小を選んだ場合は公共財は供給されない。利得表は次のように表される。

プレイヤー B

プレ		大	小
イヤ	大	a, a	$1, b$
ーA	小	$b, 1$	$3, 3$

このゲームが「囚人のジレンマ」となるように a，b の値を決め，最適反応，ナッシュ均衡を分析せよ。

34. 前問と同様の公共財の供給を巡るゲームを考える。ともに「大」を選べば十分な公共財が供給され，一方が「大」を選んだ場合も公共財が供給されるがその量は少ない。利得表は次のように表される。

プレイヤー B

プレ		大	小
イヤ	大	a, a	c, b
ーA	小	b, c	$3, 3$

35. 表のゲームの純粋戦略に限定したナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレ		戦略 X	戦略 Y
イヤ	戦略 X	3, 4	1, 2
ーA	戦略 Y	5, 1	2, 2

36. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレイヤー A

	戦略 X	戦略 Y
戦略 X	1, 2	2, 3
戦略 Y	2, 3	2, 1

37. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレイヤー A

	戦略 X	戦略 Y
戦略 X	1, 2	3, 1
戦略 Y	2, 1	1, 3

38. 表のゲームの混合戦略を含めたナッシュ均衡を求めよ。

プレイヤー B

プレイヤー A

	戦略 X	戦略 Y
戦略 X	1, 1	3, 2
戦略 Y	2, 3	1, 1

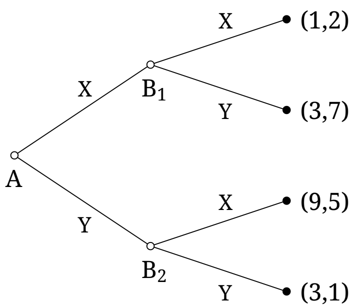
39. 表のゲームにおいて，A の方が先に戦略を選ぶことができる場合のナッシュ均衡，部分ゲーム完全均衡を求めよ。ゲームの樹ではなく標準型ゲーム（行列表記）を用いて求めること。

プレイヤー B

プレイヤー A

	戦略 X	戦略 Y
戦略 X	2, 2	5, 3
戦略 Y	3, 5	2, 2

40. 上のゲームにおいて，B の方が先に戦略を選ぶことができる場合の部分ゲーム完全均衡をゲームの樹を描いて求めよ。
41. 次の図のゲームの部分ゲーム完全均衡における各プレイヤーの戦略を求め，その理由を説明せよ。



A はプレイヤー A が，B_1，B_2 はプレイヤー B が意思決定する時点を表している。

42. アメリカとロシアの核戦略のゲームの「静学的ゲーム 2」に混合戦略による均衡があるかないか，あればどのような均衡であるかを調べよ。
43. アメリカとロシアの核戦略のゲームの「チキンゲーム」に混合戦略による均衡があるかないか，あればどのような均衡であるかを調べよ。
44. 2 つの企業 1，2 からなる寡占を考える。それらの産出量を x_1，x_2 として逆需要関数が

$$p_1 = 32 - 2(x_1 + kx_2),\ 0 < k < 1$$

$$p_1 = 32 - 2(x_2 + kx_1),\ 0 < k < 1$$

で表される。企業 1 の方が先に産出量を決められる場合の部分ゲーム完全均衡を求めよ。またそのときの各企業の利潤を比較せよ。x_1，p_1，x_2，p_2 はそれぞれ企業 1 が生産する財の産出量，価格，企業 2 が生産する財の産出量，価格である。企業の費用は 0 とする。

45. 2 つの企業 1，2 が差別化された財を生産する寡占を考える。それらの産出量と価格を x_1，x_2，p_1，p_2 として需要関数が

$$x_1 = 48 - 2p_1 + p_2$$

$$x_2 = 48 - 2p_2 + p_1$$

であるとする。また費用は 0 とする。

(i) 2 つの企業が同時に価格を決めるベルトラン的な均衡を求めよ。

(ii) 企業 1 の方が先に価格を決められる場合の部分ゲーム完全均衡を求めよ。また，そのときの各企業の利潤を求めよ。

46. 2 人のプレイヤーによるある美術品をめぐるシールドビッド・ファーストプライス・オークションを考える。それぞれの評価 v_1，v_2 が 2 から 3 までの一様分布となっているとき次の戦略（入札額）の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを証明せよ。

$$p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$$

p_1，p_2 は各プレイヤーの入札額である。各プレイヤーは相手の評価を正確には知らないが上で示したような一様分布であることは知っている。

47. 上の問題で v_1，v_2 が 1 から 4 までの一様分布となっているとき次の戦略（入札額）の組がベイジアン・ナッシュ均衡であることを証明せよ。

$$p_1 = \frac{v_1 + 1}{2},\ p_2 = \frac{v_2 + 1}{2}$$

48. 131 ページの解説に沿って第 46 問のベイジアン・ナッシュ均衡が $p_1 = \frac{v_1}{2} + 1,\ p_2 = \frac{v_2}{2} + 1$ であることを示せ。

49. 131 ページの解説に沿って第 47 問のベイジアン・ナッシュ均衡が $p_1=\frac{v_1+1}{2}$，$p_2=\frac{v_2+1}{2}$ であることを示せ。

50. 表のゲームを永遠に繰り返すときトリガー戦略

    まず最初に「戦略 X」を選ぶ。2 回目以降は前回相手が「戦略 X」を選んでいれば「戦略 X」を，「戦略 Y」を選んでいればそれ以降は永遠に「戦略 Y」を選ぶ。

    が部分ゲーム完全均衡となるために割り引き因子または割り引き率が満たすべき条件を求めよ。

B

A		X	Y
	X	5, 5	1, 7
	Y	7, 1	2, 2

51. 表のゲームにおいて次の戦略が部分ゲーム完全均衡となるために割り引き因子が満たすべき条件を求めよ。

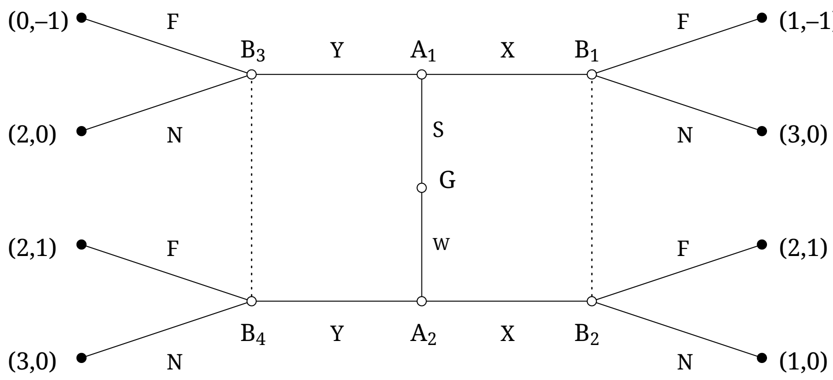
    まず最初に「戦略 X」を選ぶ。相手が「戦略 X」を選べば次の回では自分も「戦略 X」を選ぶ。ゲームのどこかで相手が「戦略 Y」を選んだらその後 2 回は自分も「戦略 Y」を選び，3 回目以降は（その 2 回のゲームでの相手の戦略に関わらず）再び「戦略 X」を選ぶ。以下同様。

B

A		X	Y
	X	4, 4	0, 7
	Y	7, 0	1, 1

52. 123 ページのゲーム 5 について次の問に答えよ。
    (i) タイプ S の企業 A が投資 X を，タイプ W の企業 A が投資 Y を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。
    (ii) タイプ S の企業 A が投資 Y を，タイプ W の企業 A が投資 X を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

53. 図に表されているような不完備情報ゲームを考える。プレイヤーは A，B，プレイヤー A のタイプは S，W，行動の選択肢は X，Y，プレイヤー B の行動の選択肢は F，N とし，ゲーム開始前に「プレイヤー B は，プレイヤー A が確率 2/3 でタイプ S であり，確率 1/3 でタイプ W であるという推測を抱いてる」とする。プレイヤーの戦略やタイプの意味は問わない。



このゲームには次の 2 つの完全ベイジアン均衡がある。

完全ベイジアン均衡 1(separating 均衡)

(i) タイプ S のプレイヤー A は X を，タイプ W のプレイヤー A は Y を選ぶ。

(ii) プレイヤー A が X を選んだときはプレイヤー B は戦略 N を選び，Y を選んだときには戦略 F を選ぶ。

(iii) 『プレイヤー A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 1 であり，プレイヤー A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率はゼロである』という推測をプレイヤー B が持つ。

完全ベイジアン均衡 2(pooling 均衡)

(i) タイプ S のプレイヤー A もタイプ W のプレイヤー A も Y を選ぶ。

(ii) プレイヤー A が X を選んだときはプレイヤー B は戦略 F を選び，Y を選んだときには戦略 N を選ぶ。

(iii) 『プレイヤー A が X を選んだときそれがタイプ S である確率は 1/2 より小さく（タイプ W である確率は 1/2 より大きい），プレイヤー A が Y を選んだときそれがタイプ S である確率は 2/3 である』との推測をプレイヤー B が持つ。

以下の問に答えよ。

(i) それぞれの均衡が完全ベイジアン均衡であることを示せ。

(ii) それぞれが合理的な均衡であるかどうかを調べよ。

(iii) タイプ S のプレイヤー A もタイプ W のプレイヤー A も X を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

(iv) タイプ S のプレイヤー A が Y を，タイプ W のプレイヤー A が X を選ぶような完全ベイジアン均衡があるかないかを調べよ。

54. 大学の入学試験や企業の就職試験における「指定校」の取り扱いについてシグナリングゲームの理論にもとづいて考えてみよ。

55. 3 人のプレイヤー A，B，C がいて，特性関数の値が次のようであるとき，コア，仁，およびシャープレイ値を求めよ。

$$v(\{A\}) = 0,\ v(\{B\}) = 0,\ v(\{C\}) = 2$$

$$v(\{A, B\}) = 6,\ v(\{B, C\}) = 8,\ v(\{A, C\}) = 2$$

$$v(\{A, B, C\}) = 20$$

コアが存在しない場合もある。本文で説明した例と比較してどのようなことが言えるか。

56. 特性関数が次のようであるとする。

$$v(\{A, B\}) = 9,\ v(\{B, C\}) = 8$$

$$v(\{A, C\}) = 7,\ v(\{A, B, C\}) = 11$$

$$v(\{A\}) = v(\{B\}) = v(\{C\}) = 0$$

このときコアと仁を求めよ。コアが存在しない場合もある。

索引

著者略歴

田中 靖人（たなか・やすひと）

1953 年　大阪府岸和田市春木生まれ

1976 年　京都大学工学部航空工学科卒業

1977 年　京都大学大学院工学研究科修士課程航空工学専攻中退

この間　哲学科学生（除籍），コンピュータプログラマー，学習塾講師などを経験

1983 年　横浜国立大学大学院経済学研究科修士課程修了

1986 年　東京大学大学院経済学研究科博士課程単位修得

その後　山形大学人文学部経済学科講師・助教授，中央大学法学部助教授・教授を経て

現在　同志社大学経済学部教授，博士・経済学（中央大学）

著書

『ゼロから始める経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）（このテキストの前身）

『ゼロから始める国際経済学（改訂版）』（中央大学生協出版局, 2000）（「国際経済学」テキストの前身）

『ゲーム理論と寡占』（中央大学出版部, 2001）

論文

https://researchmap.jp/read0162233/

E-mail: yatanaka@mail.doshisha.ac.jp

ミクロ経済学の基礎（下）

2015 年　9 月　1 日　　初版発行

2021 年　4 月　1 日　　上下分割・一部修正

著 者　田中靖人（たなかやすひと）

発 行　同志社大学経済学部

〒602-8580 京都市上京区今出川通烏丸東入 同志社大学良心館

TEL 075-251-3648（田中研究室）

Printed in Karasuma-Imadegawa