# 2-11　W|A を使ってみよう

## 2-11-1 微分と積分，1 変数関数の級数展開

ある関数の級数展開をすぐに求めたいなら，W|A のトップページへ「級数」や「級数展開」と入力すると計算例一覧ページが現れます．これらのどれかの例をまねれば手っ取り早く計算できます．

さて 2-5 節の問 4, 5 や 2-6 節の問 2 で関数の近似を扱いました．これは関数の多項式による近似と言えます．つまり$\sum a_n x^n$の形のものをべき級数といい，難しい関数をわかりやすいべき級数で近似（まね）する方法を考えるとき，簡単な場合が 2-5 節の問 4, 5 や 2-6 節の問 2 の例題でした．ここではもっと詳しく一般的な場合を考えてみます．

補足 1：実数では$1 = 0.999999 \ldots = 0.\dot{9}$です．つまり同じ数字に 2 通りの表現があります．このマジックのからくりは「無限（循環）」にあります．これと同じことが例えば W|A へ「1/(1-*x*)の級数展開」とすると関数にも発見することができます．結果は $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ です．この関係に$x = 0.5$を代入すると 2 の 2 通りの表現が得られます．そして$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ はより一般的な 2 通りの表現を与える関係式だと気が付きます．つまり実数で考える世界では，数字にも関数にも同じものに 2 通りの表現があったのだと分かります．このマジックのからくりも無限（の和）にあります．

補足 2：ところで，$1 + x + x^2 + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$　は初項 1 で項比を$x$とする数列の無限和であり級数です．これは $|x| < 1$ のときのみ収束し（実数値が 1 つ決まること），その値は $\frac{1}{1-x}$ でした．関数を級数で表したときその関係が使える条件もありそうです．

以下でこのからくりを詳しく理解しましょう．W|A のトップページへ「級数展開」と入力すると級数展開の例のページが現れます．これらの例をもう少し詳しく理解したいとします．

Taylor[テイラー]の展開定理(Taylor 展開), Maclaurin[マクローリン]の展開定理(Maclaurin 展開):

関数近似に用いる 2 つの定理を大雑把に説明します．Taylor[テイラー]の展開定理とは，関数$f(x)$の値を$x=b$で求めたいとき，$x=a$ $(a \neq \mathrm{b})$ での関数値 $f(a)$, $\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=a}$, $\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=a}$, $\left[\frac{d^3f}{dx^3}\right]_{x=a}$, $\left[\frac{d^4f}{dx^4}\right]_{x=a}$, $\cdots$, $\left[\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x=a}$, $\cdots$ を用いた$x$のべき級数(途中で近似を止めるならば多項式となる)で表す方法を教えてくれる定理です．また Maclaurin[マクローリン]の展開定理とは，Taylor の展開定理の特殊な場合(つまり同じ定理)であり，関数$f(x)$の値を$x$で求めたいとき，$x=0$での関数値 $f(0)$, $\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=0}$, $\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=0}$, $\left[\frac{d^3f}{dx^3}\right]_{x=0}$, $\left[\frac{d^4f}{dx^4}\right]_{x=0}$, $\cdots$, $\left[\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x=0}$, $\cdots$ を用いた$x$のべき級数(途中で近似を止めるならば多項式となる)で表す方法を教えてくれる定理です．これらの応用は，ズバリ，関数近似に用いるのが主です．Taylor[テイラー]の展開定理は以下です．

**Taylor の展開定理**：$f(x)$を$[a,b]$で$(n-1)$回連続微分可能で，$(a,b)$で$n$回微分可能な関数とする．このとき，ある実数 c $(a<c<b)$が存在し，次式が成り立つ，

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^kf}{dx^k}\right]_{x=a}(b-a)^k+\frac{1}{n!}\left[\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x=c}(b-a)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^kf}{dx^k}\right]_{x=a}(b-a)^k+R_n \quad .$$

ここで$R_n$は，$R_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x=c}(b-a)^n$ とした省略表記の記号でもあり，第 $n$ 次の剰余項と呼びます．また $k=0$ のとき，$0!=1$, $\left[\frac{d^kf}{dx^k}\right]_{k=0,x=a}=f(a)$ , $(b-a)^0=1$ となります．この項を見落とさないことが大事です．

補足：繰り返しですが，Taylor の展開定理とは，関数$f(x)$の値を$x=b$で(つまり

$f(b)$の値を)求めたいとき，$x = a$ $(a \neq \mathrm{b})$ での関数値 $f(a)$, $\left[\frac{df}{dx}\right]_{x=a}$, $\left[\frac{d^2f}{dx^2}\right]_{x=a}$, $\left[\frac{d^3f}{dx^3}\right]_{x=a}$, $\left[\frac{d^4f}{dx^4}\right]_{x=a}$, $\cdots$, $\left[\frac{d^nf}{dx^n}\right]_{x=a}$, $\cdots$ を用いた$x$のべき級数(途中で近似を止めるならば多項式となる)で表す方法を教えてくれる定理です．第 $n$ 次の剰余項を無視した場合は，$f(x)$の$(n-1)$次多項式近似になります．この場合には慣例として近似の記号(≈)を用い，$f(b) \approx \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \left[\frac{d^kf}{dx^k}\right]_{x=a} (b-a)^k$ と書きます．定理で等号(=)が成り立つのは，$(n-1)$次多項式までで近似した以外の残りの項をまとめて剰余項（「打切り誤差項」とも言います）として加えているからです．
テイラー展開とマクローリン展開を一つにまとめて「テイラー・マクローリン展開」と簡単に言うこともあります．

　さてこの定理の「ある実数c」とはなんでしょうか？どのように決まるのでしょうか？ 実はこの c の求め方は関数に依って難しいのです．しかし「平均値の定理」から存在することが分かるのです．この詳細は他の教科書に譲ります．本冊子の末尾資料「参考文献」を参考にしてください．

　さて実際に計算例で理解しましょう．

1．$f(x) = \sin(x)$のマクローリン展開を求めなさい．
補足:別の言い方,「$\sin(x)$の$x = 0$でのテイラー展開を求めなさい」と同じです．従い W|A で「sin (x)のマクローリン級数展開」や「級数　sin x x=0」などで実行できます．表示結果に含まれる「$O(x^7)$」は先の$R_7$と同じものと考えておきましょう．

2．$f(x) = \sin(x)$の$x = \pi$でのテイラー展開を求めなさい．
補足：W|A で「級数　sin (x) , x=π」で OK です．π は pi でも構いません．

3．$f(x) = cos(x)$のマクローリン展開を求めなさい．

補足：$cos(x)$は偶関数，$sin(x)$は奇関数です．展開で得られた 2 つの関数がそれぞれ偶関数($x$の偶数次数のみの項によるべき級数)で，奇関数($x$の奇数次数のみの項によるべき級数)で構成されていることを確認しましょう．

4. $\frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開を求めなさい．
補足：できれば先のマクローリン展開の定義式を用い，手計算で求めた結果と W|A での結果を比較し検算しておきましょう．

## 2-11-2 行列，行列式とその応用

5. 行列 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ の行列式，余因子行列および正則のとき逆行列を求めなさい．
補足 1：W|A で「{{1,3,5},{6,-2,1},{8,4,7}}の行列式」，「{{1,3,5},{6,-2,1},{8,4,7}}の逆行列」．
ここで残念ながら W|A で余因子行列を直接求める方法はありません．そこで逆行列を求めます．**正則である場合のみ逆行列が存在する**ので，$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\,{}^{t}\!A$がわかっているため，余因子行列 ${}^{t}A$（注：これは行列Aの転置行列ではない）は求めた行列式と逆行列の積を用い求めることができます．ステップごとの解説 では 逆行列の公式を使う を選択すると余因子行列をつくる際の手順が確認できます．
補足 2：$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}\,{}^{t}\!A$により$\mathbf{A}$の逆行列を求めるこの式の説明は省略します．しかしこの式から$\mathbf{A}^{-1}$が決まるためには$\mathbf{A}$の行列式$|\mathbf{A}|\neq 0$であることが条件としてわかります．逆にいうと，式$|\mathbf{A}|=0$のとき，$\mathbf{A}$の逆行列はありません．$\mathbf{A}$は正則行列でない，と判断できます．

6. 連立 1 次方程式 $\begin{cases} 2x-3y+z=1 \\ 5x+y-3z=2 \\ 7x+2y+8z=3 \end{cases}$ をクラメールの公式を用いて解きなさい．

補足 1：W|A では「2x-3y+z=1,5x+y-3z=2,7x+2y+8z=3」と入力します．この時，ステップごとの解説 で クラメルの規則を使う を選択するとクラメールの公式を用いた解法が表示されます．

補足 2：クラメールの公式の説明は省略します．自分で調べて理解してください．しかしクラメールの公式が連立 1 次方程式の解法に使える条件は，連立 1 次方程式「$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$」を拡大係数行列$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b})$と表したとき，$|\mathbf{A}| \neq 0$でなければならない，となることは明らかです．

7．クラメールの公式と 1-3 で学習した方法(掃き出し法)を用いて次の連立 1 次方程式(1)と(2)を解きなさい．ただし，その計算過程を示すこと．

$$(1)\begin{cases} x+9y+9z=1 \\ x+3y+z=-1 \\ x+y+3z=3 \end{cases},\qquad (2)\begin{cases} x+4y+3z=1 \\ 2x+7y+3z=3 \\ y+4z=-1 \end{cases}$$

## 2-11-3　確率・統計

8．2-8-3 と同じ話題です．W|A で 「covariance」と入力し，その解説等から covariance を説明しなさい．日本語では共分散と言い，$\mathrm{Cov}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ などと表記し 2 つのデータ$\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$の近さ(似かより)を示す指標となります．なぜ 2 つのデータの近さを示す指標となるのか考察を述べなさい．この関数は色々なデータ分析でも用いられます．

補足：内積の幾何学的な意味を思い出しましょう．

9．Bayes' theorem というキーワードで調べたことを簡潔にまとめて列記しなさい．もしくは解説を日本語訳しなさい．The events are disjoint とは各出来事が，他の出来事とは互いに無関係に起こる，ことを意味します．

## 2-11-4　数学の広がり

10．4 次元 *xyzw* 空間内において点$\boldsymbol{r_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$ を通り，傾きが$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \\ p \end{pmatrix}$である直線の方程式は，ベクトル表示で，$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \\ w \end{pmatrix}$ とすると $(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r_0}) = t\boldsymbol{a}$, ここで *t* は実数，と表すことができます．この直線を 3 次元空間内（描くには最大の次元）においてグラフ表示するにはどのような工夫が必要でしょうか？

11．W|A の楽しい例に，「ピカチュウ」と入力すると数式でピカチュウを描く例が表示されます．

補足：W|A で，「Mathematics>」または「その他」→「プロットとグラフィックス」とし表示されたページ内の例を実行してみるといいでしょう．この例の中にも W|A でのパラメトリックプロット「媒介変数[t]によるグラフ描画」の方法がります．ついでに「極プロット」の例も覗き見しておくといいでしょう．

12．2-8 節の問 9 と同じ話題です．$f(x) = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + b_3 \sin 3x$ を$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx)\, dx$ と$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$ を用いて表す方法を考案しなさい．ここで$m = 1, 2, 3. n = 0, 1, 2, 3$ の場合の積分と$b_1$，$b_2$，$b_3$，$a_0$，$a_1$，$a_2$，$a_3$のそれぞれの関係を用いた和の表現となります．これはフーリエ展開と呼ばれ，周期的な性質を持つ関数の非常に役立つ別表現を与えるものです．

補足 1：問 1-4 は関数$f(x)$をべき級数で展開（近似）する考え方でした．しかし周期的な関数をべき級数で近似すると，$x$のべき関数は周期的でないため不適切だと考えられます．そこで周期関数をうまく近似するには，よく理解している周期関数の和で近似すればよい，ということを思いつきます．ここで「よく理解している周期関数」とは，定数と$\sin(mx)$，$\cos(nx)$ です．この考えで関数を近似する方法を，「フーリエ級数展開」と言います．

補足 2：この問いの意味が解らない場合は，Fourier series などのキーワードか

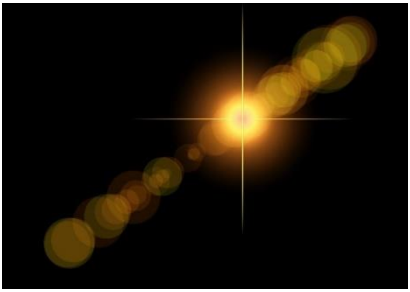
ら Wolfram Alpha の機能や Google を用いて検索するといいでしょう．

例：http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html

13．物理学での級数展開の応用：アインシュタインの特殊相対性理論によれば，運動する物体のエネルギー($E$)は次式となります．

$E(|\boldsymbol{v}|^2/c^2) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-|\boldsymbol{v}|^2/c^2}}$ ，ここで $m$は物体の質量， $\boldsymbol{v}$は物体の速度，$c$ は光速です．光速 $c$ は一般に通常の物体の速度$\boldsymbol{v}$より非常に大きいので，

$0 \leq |\boldsymbol{v}|^2/c^2 \ll 1$ と考えることができます．従い$x = |\boldsymbol{v}|^2/c^2$とし，$x$が 0 に近い値のときの関数$E(x)$を調べたくなります．そこで$E(x) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-x}}$ の関数の$x = 0$でのマクローリン展開を求めてみます．W|A で「mc^2/sqrt(1-x)の級数展開」を実行します．得られた展開は，$E(x) = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + R_3\right)$ であり，この式に再び$x = |\boldsymbol{v}|^2/c^2$を代入してみると展開の第 1 項は物体の静止エネルギー，第 2 項は運動エネルギーに対応していることが示されます．こうして古く前に考案されたニュートン力学は，近代に考案された相対性理論における近似の力学であったことが数式により示されたのでした．興味を持った人は，ネット検索でキーワード「静止エネルギー」，「相対性理論，エネルギー」などと調べるといいでしょう．現代の材料や精密装置には相対性理論でしか説明できない現象を利用したものが多くあります．



# 2-12　W|A を使ってみよう

## 2-12-1 微分と積分，　曲線の媒介変数表示，陰関数表示

W|A の 「数学>」→「プロットとグラフィックス」→「もっと表示」→「パラメトリックプロット」または「すべての例」→「数学」→「プロットとグラフィックス」→「もっと表示」→「パラメトリックプロット」の例を実行してみましょう．これらの例から W|A を用いてパラメトリックプロット「媒介変数[t]によるグラフ描画」の方法がわかります．

補足：W|A への$x = \cos^3 3t, y = \sin^3 t$ の入力例「 parametric plot ((cos(3* t))^3, (sin(t))^3 )」

1．このプロットの方法を真似て以下の曲線を描きなさい．描いた曲線の概形を手書きで丁寧に特徴をとらえて書き写します．この際に座標軸の変数や原点を書き加えることが大事です．

1-1．サイクロイド(cycloid)　$x = t - sin\,t, y = 1 - cos\,t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

1-2．アステロイド(asteroid)　$x = \cos^3 t, y = \sin^3 t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

2．次に，同じ「プロットとグラフィックス」の中の「極プロット」の例を実行しなさい．この例でギリシャ文字 $\theta$ は英語で theta です．拡張キーボードからも直接 $\theta$ を入力できます．これらの例を参考に以下の曲線を描きなさい．描いた曲線の概形を手書きで丁寧に特徴をとらえて書き写しなさい．座標軸の変数や原点を書き加えることが大事です．

補足 :「 polar plot r=1+cos theta」の例は，カーディオイド(Cardioid)　曲線と呼ばれます．

2-1．レムニスケート(Lemniscate)　$r^2 = \cos 2t,\ 0 \le t \le 2\pi.$

次に以上の問と同様にして Plotting & Graphics の中の Equations の例を実行しな

さい（曲線の陰関数表示という）．これらの例を参考に同様に以下の曲線を描きなさい．

2-2．正葉線(Folium of Descartes)　$x^3+y^3-3xy=0$.

補足：W|A で「plot x^3+y^3=3 x*y, x =-2 to 2, y=-2 to 2」と入力．

2-3．問 1-2 のアステロイド曲線の $x$>0, $y$>0 の部分，$x=\cos^3 t, y=\sin^3 t$，$0\le t\le\frac{\pi}{2}$ の長さを求めなさい．

補足：曲線がこのような媒介変数表示で与えられているときは，以下の積分で長さ($L$)が求められます．$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$，　この積分は，「微成分と解析」→「微積分の応用」→「もっと表示」→「弧長」の例など参考にするといいでしょう．

2-4．問 1-2 のアステロイド曲線の $x$>0, $y$>0 の部分，　$x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t$，$0\le t\le\frac{\pi}{2}$ と $x$ 軸と $y$ 軸で囲まれた領域の面積を求めなさい．

補足: 曲線が媒介変数表示で与えられているので，極形式の関係式に直して曲線を扱うとよいでしょう．この曲線は $r^2(t)=x^2(t)+y^2(t)=\cos^6 t+\sin^6 t$ の関係を満たします．また極形式で与えられた曲線 $r=f(t)$，$a\le t\le b$ の面積(S)は $S=\frac{1}{2}\int_a^b r^2(t)dt=\frac{1}{2}\int_a^b f(t)^2(t)dt$ で求められます．これより，$S=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^6 t+\sin^6 t)dt$ を求めればよいことがわかります．

## 2-12-2 確率・統計，基本統計量

確率変数の期待値・平均値：

| X の値 | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots\ x_n$ |
|---|---|---|---|
| 計測数 $m$ | $m_1$ | $m_2$ | $\cdots\ m_n$ |

$$\sum^{n} m_j = N$$

・平均　$\bar{\mathrm{X}} = (m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n)\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{N}}$

| Xの値 | $x_1$ | $x_2$ | $\cdots\ x_n$ |
|---|---|---|---|
| 確率 P | $p_1$ | $p_2$ | $\cdots\ p_n$ |

$$\sum^{n} p_j = 1$$

・期待値 $\mathrm{E(X)} = (p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n)$

ここで$p_j = \frac{m_j}{\boldsymbol{N}}$ と見なした場合は，平均=期待値となります.

・分散 V(X)

$$\mathrm{V(X)} = \mathrm{E}((\mathrm{X} - \bar{\mathrm{X}})^2) = (x_1 - \bar{\mathrm{X}})^2p_1 + (x_2 - \bar{\mathrm{X}})^2p_2 \cdots (x_n - \bar{\mathrm{X}})^2p_n$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{\mathrm{X}})^2p_i$$

ここで先の$p_j = \frac{m_j}{\boldsymbol{N}}$ を用いると

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{\mathrm{X}})^2\frac{m_i}{N} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i{}^2 - 2x_i\bar{\mathrm{X}} + \bar{\mathrm{X}}^2\right)\frac{m_i}{N}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\frac{m_i}{N} - 2\bar{\mathrm{X}}\sum_{i=1}^{n}x_i\frac{m_i}{N} + \bar{\mathrm{X}}^2\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{N}$$

また$\bar{\mathrm{X}} = \mathrm{E(X)}$ より　$= \sum_{i=1}^{n}x_i{}^2\,p_i - 2\bar{\mathrm{X}}^2 + \bar{\mathrm{X}}^2 = \mathrm{E(X^2)} - \bar{\mathrm{X}}^2$

$$= \mathrm{E(X^2)} - \mathrm{E}\left((\mathrm{X})\right)^2 = \mathrm{V(X)}$$

・標準偏差$\sigma$(X)

$$\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{\mathrm{V(X)}} = \sqrt{\mathrm{E(X^2)} - \mathrm{E((X))^2}}$$

確率変数の変換：

確率変数 X と定数 $a, b$ に対して，Y=$a$X+$b$( $y_i = ax_i + b,\ i = 1, \ldots, n$)とすると Y も確率変数となり

$$\mathrm{E(Y)} = a\mathrm{E(X)} + b \qquad (*1)$$

$$\mathrm{V(Y)} = a^2\mathrm{V(X)} \qquad (*2)$$

$$\sigma(\mathrm{Y}) = |a|\sigma(\mathrm{X}) \qquad (*3)$$

説明：$\mathrm{E(Y)} = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b)\, p_i = a \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + b \sum_{i=1}^{n} p_i$

$$= aE(\mathrm{X}) + b$$

$$\mathrm{V(Y)} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{Y})^2\, p_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i - E(\mathrm{Y}))^2\, p_i$$

また (*1)より

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a\mathrm{E(X)} + b))^2\, p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - a\mathrm{E(X)} - b)^2\, p_i$$

$$= a^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mathrm{E(X)})^2\, p_i = a^2 \mathrm{V(X)}$$

従い

$$\sigma(\mathrm{Y}) = \sqrt{\mathrm{V(Y)}} = \sqrt{a^2 \mathrm{V(X)}} = |a|\sigma(\mathrm{X})$$

確率変数の期待値：

2 つの異なる確率変数$\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \mathrm{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$に関する確率を$P(\mathrm{X} = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$とすると，次のような確率$q_i$, $r_i$ができます．($n = 2$, $m = 3$ の例)

| X ＼ Y | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | 計 |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $p_{13}$ | $q_1$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $p_{23}$ | $q_2$ |
| 計 | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | 1 |

ここで$p_{11} + p_{12} + p_{13} = q_1$，$p_{11} + p_{21} = r_1$ などとし他も同様とする．

2 つの異なる確率変数 XとYの和による確率変数を Z とし， $\mathrm{Z = X + Y}$ と略記します．このとき

$$\mathrm{E(X + Y) = E(Z) = E(X) + E(Y)} \qquad (*4)$$

ここで$\mathrm{E(X)} = x_1 q_1 + x_2 q_2$ ， $\mathrm{E(Y)} = y_1 r_1 + y_2 r_2 + y_3 r_3$

(*4)は$\mathrm{E}(\mathrm{aX}+\mathrm{bY})=a\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{bE}(\mathrm{Y})$や$\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}+\mathrm{Z})=\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y})+\mathrm{E}(\mathrm{Z})$が成り立つことも意味します.

・独立な確率変数の積の期待値

2 つの事象 A,B が確率的に独立とは，A と B の起こる確率がそれぞれ異なる事象によって決まる変数のときをいう.

例： A が起こる確率 $r$，B が起こる確率を $s$ とすると，A と B が同時に起こる確率は $r\cdot s$，これは$\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=\mathrm{P}(\mathrm{A})\cdot\mathrm{P}(\mathrm{B})$と表せます.

確率変数 X と Y がお互いに独立ならば,

$$\mathrm{E}(X\cdot\mathrm{Y})=\mathrm{E}(\mathrm{X})\cdot E(Y) \qquad (*5)$$

説明： $\mathrm{E}(X\cdot\mathrm{Y})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jp_iq_j=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i\sum_{j=1}^{n}y_jq_j=\mathrm{E}(\mathrm{X})\cdot\mathrm{E}(\mathrm{Y})$

・2 つの独立な確率変数 X,Y の和 Z=X+Y の分散

$$\mathrm{V}(\mathrm{Z})=\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y}) \qquad (*6)$$

説明： $\mathrm{V}(\mathrm{Z})=\mathrm{V}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})=\mathrm{E}((\mathrm{X}+\mathrm{Y})^2)-\left(\mathrm{E}(\mathrm{X}+\mathrm{Y})\right)^2$

(*4)より $=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2+2\mathrm{XY}+\mathrm{Y}^2)-\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})+\mathrm{E}(\mathrm{Y})\right)^2$

$=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)+2\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})+\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2-2\mathrm{E}(\mathrm{X})\mathrm{E}(\mathrm{Y})-\mathrm{E}(\mathrm{Y})^2$

$=\mathrm{E}(\mathrm{X}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{X})^2+\mathrm{E}(\mathrm{Y}^2)-\mathrm{E}(\mathrm{Y})^2$

$=\mathrm{V}(\mathrm{X})+\mathrm{V}(\mathrm{Y})$

同様にして

$$\mathrm{V}(a\mathrm{X}+b\mathrm{Y})=\mathrm{V}(a\mathrm{X})+\mathrm{V}(b\mathrm{Y})=a^2\mathrm{V}(\mathrm{X})+b^2\mathrm{V}(\mathrm{Y})$$

3. (*1)式を説明を参考に自分で誘導しなさい. わからない場合は対応する説明部分を手で抜き出し，式の誘導を理解しながら書き写し理解すること.

4. (*2)式を説明を参考に自分で誘導しなさい. わからない場合は対応する説明部分を手で抜き出し，式の誘導を理解しながら書き写し理解すること.

5. (*3)式を説明を参考に自分で誘導しなさい. わからない場合は対応する説明

部分を手で抜き出し，式の誘導を理解しながら書き写し理解すること．

6.  (*4)式を説明を参考に自分で誘導しなさい．わからない場合は対応する説明部分を手で抜き出し，式の誘導を理解しながら書き写し理解すること．

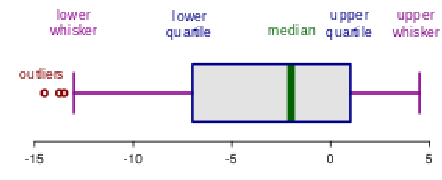
7.  (*5)式を説明を参考に自分で誘導しなさい．わからない場合は対応する説明部分を手で抜き出し，式の誘導を理解しながら書き写し理解すること．

8.  (*6)式を説明を参考に自分で誘導しなさい．わからない場合は対応する説明部分を手で抜き出し，式の誘導を理解しながら書き写し理解すること．

## 2-12-3 数学の広がり

9.  英語表記に WEB 表示を切り替えます．　Mathematics>　Example for Mathematics>　Example for Plotting & Graphics の中に現れたそれぞれの項目，Functions, Inequalities, Parametric Plots, 3D Plot, Equations, Polar plots, Number lines について，これらの各項目の中のいずれかの例をクリックし．自分の気に入ったもの 1 つを選びその例を簡潔に説明しなさい．（従い色々例を実行してみることになりますが，レポートの内容として選ぶのはその中の 1 つで構いません．または例は自分で考えたものでも構いません）

10. 問 3～8 までの内容は，高校の教科書からの抜粋です．統計学の知識は実験・観測を重視する分野では必須です．将来にはデータ分析を計算機で統計分析ソフトを使い簡単に求めることがあっても，その基礎知識があるとしばしば起こる間違ったデータ分析結果を，自信を持って疑うことができます．




箱ひげ図